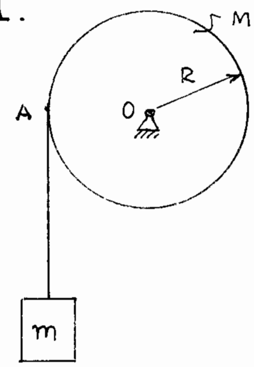
Ejercicios ilustrativos.

1.



El disco de masa M y radio R puede girar libremente en torno a un eje fijo horizontal por su centro O. La masa m cuelga de un extremo de un hilo ideal enrollado en el disco.

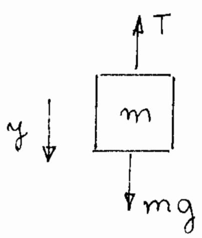
Calcular:

a) La aceleración de la masa m

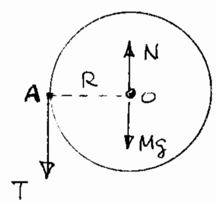
b) La tensión de la cuerda

c) La reacción de los descansos sobre el eje del disco.

D.C.L masa m



D.C.L del disco



Si tomamos el sentido del descenso de m como dirección positiva:

$$mg - T = m\,a_m \quad (1)$$

$$M = I\alpha$$

$$T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \alpha \quad (2)$$

Tenemos las incógnitas T, a y α y sólo dos ecuaciones, la del movimiento de la masa m y la de rotación del disco.

Necesitamos una tercera ecuación para poder determinar los valores de estas tres incógnitas. Esta es de tipo cinemático, que relaciona la aceleración lineal del punto A del disco con su aceleración angular α:

$$a_A = R\alpha \quad (3)$$

Se observa que esta aceleración es igual a la aceleración de la masa m, puesto que la cuerda no desliza sobre el disco. En particular, el punto A de la cuerda y el punto A del borde del disco se mueven juntos. Luego, $a_A = a_m$

Eliminando T entre las ecuaciones (1) y (2):

$$mg - \tfrac{1}{2}MR\alpha = m a_m$$

y luego, según (3)

$$mg - \tfrac{1}{2}M a_m = m a_m \quad \rightarrow \quad \boxed{a_m = \frac{m}{\frac{M}{2} + m}\, g} \quad (a)$$

En seguida, reemplazando en (1) se obtiene $\boxed{T = \dfrac{Mm}{M+2m}\, g}$ (b)

Para calcular la reacción N en el eje nos valemos de la ecuación para el movimiento del centro de masa del disco; en este caso, por encontrarse en reposo, su aceleración es nula, luego,

$$N - Mg - T = 0 \quad \rightarrow \quad N = Mg + T$$

$$\therefore \quad \boxed{N = \frac{M^2 + 3Mm}{M + 2m}\, g} \quad (c)$$

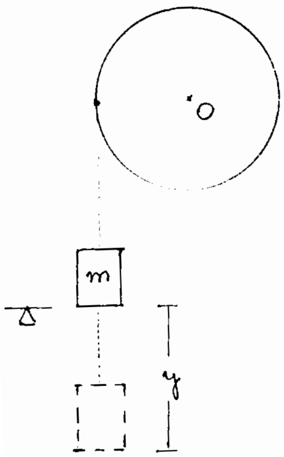
Si se deseara calcular el tiempo que tarda la masa m en descender una distancia h, podemos aprovechar el hecho que su movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado pues a_m, según (a), es constante.

Así, si parte del reposo, de $y = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}a_m t^{*2}$

$$\therefore \quad t^* = \sqrt{\frac{2h}{a_m}} = \sqrt{\frac{(M+2m)h}{mg}}$$

—

Alternativamente, aprovechando la circunstancia que se trata de un sistema conservativo debido a la ausencia de fuerzas de roce en su versión idealizada, podemos calcular por esta vía la aceleración de la masa m.



La energía mecánica del sistema en el reposo, tomando como nivel de referencia para la energía potencial de la masa m el indicado en la figura anexa, es

$$E(0) = 0$$

En el instante en que ha descendido una distancia y, su valor queda expresado como:

$$E(y) = -mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

De $E(0) = E(y) \Rightarrow -mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = 0 \quad (*)$

Además, de la condición cinemática $v = R\omega$, expresando ω en términos de v y reemplazando su valor en $(*)$ junto con $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$,

$$mgy = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}M\right)v^2$$

o $$v^2 = \frac{2mg}{m + \frac{M}{2}}\, y \qquad (**)$$

Se observa que en este caso se llega directamente al valor de la velocidad v contrariamente a lo que sucede cuando aplicamos las ecuaciones de movimiento, que nos conducen directamente a la aceleración a_m.

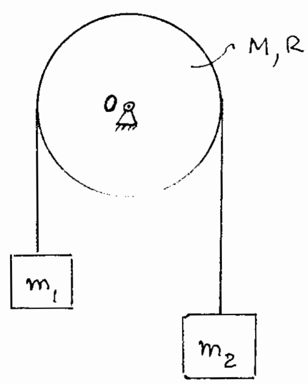
Por lo tanto, para obtener la aceleración a_m a partir de la ecuación $(**)$, debemos derivar respecto del tiempo:

$$2v\frac{dv}{dt} = \left(\frac{2mg}{m + \frac{M}{2}}\right)\frac{dy}{dt}$$

Pero, $\frac{dv}{dt} = a_m$ y $\frac{dy}{dt} = v$

Luego, $\boxed{a_m = \frac{m}{\frac{M}{2} + m}\, g}$, que es el resultado obtenido anteriormente.

2. Máquina de Atwood.



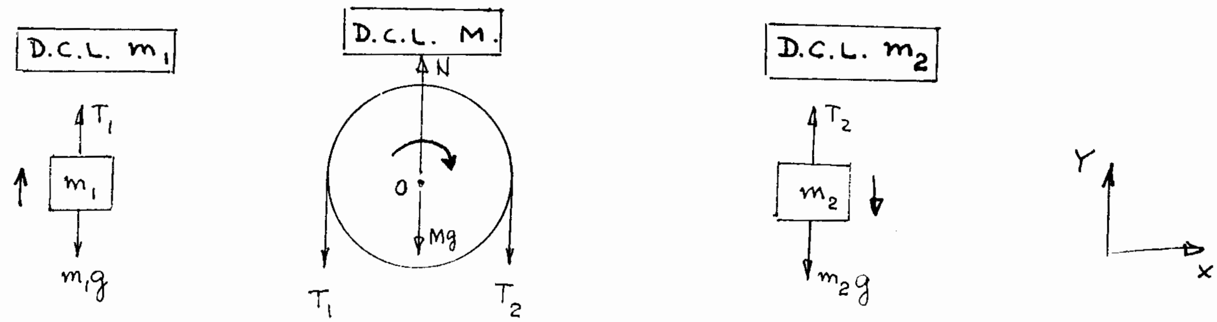
Polea de masa M y radio R puede rotar libremente (sin roce), en torno a un eje fijo horizontal que pasa por su centro O.

Cuerda ideal de cuyos extremos cuelgan masas $m_1 \neq m_2$ que hacen girar la polea.

La cuerda no desliza respecto de la polea

a) Calcular la aceleración de las masas m_1 y m_2

b) Calcular la tensión de la cuerda a cada lado de la polea.



Supongamos que la polea gire en el sentido de los punteros del reloj. Tomando un eje vertical positivo hacia arriba, las correspondientes ecuaciones de movimiento son, para m_1 y m_2 :

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad (1) \qquad\qquad T_2 - m_2 g = -m_2 a_1 \quad (2)$$

Para la polea el sentido positivo es el del eje Z. Luego, la ecuación rotacional correspondiente es :

$$T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = -I_O \alpha \quad (3)$$

Ecuación cinemática : $a_1 = R\alpha$ (4)

De (3) y (4), con $I_O = \frac{1}{2} M R^2$

$$T_1 R - T_2 R = -\frac{1}{2} M R^2 a_1 / R \quad (5)$$

Reemplazando en (5) los valores de T_1 y T_2 según (1) y (2):

$$m_1 a_1 + m_1 g + m_2 a_1 - m_2 g = -\frac{1}{2} M a_1$$

$$\therefore \quad \boxed{a_1 = \frac{m_2 - m_1}{\frac{M}{2} + m_1 + m_2}\, g} \qquad (6)$$

y luego, con este valor en (1) y (2):

$$\boxed{T_1 = \frac{M m_1 + 4 m_1 m_2}{M + 2m_1 + 2m_2}} \quad (7) \qquad \boxed{T_2 = \frac{M m_2 + 4 m_1 m_2}{M + 2m_1 + 2m_2}} \quad (8)$$

De (6) se observa que si $m_2 > m_1$, $a_1 > 0$ y el sistema se mueve según lo supuesto. Ahora, si $m_2 < m_1$, $a_1 < 0$ y el sistema se movería en sentido contrario.

Además, si se deseara calcular la rapidez de m_1 al ascender en una cantidad h, habiendo partido del reposo, se puede aprovechar el hecho de tratarse de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. De la expresión conocida $v_2^2 - v_1^2 = 2ax$ se tendría que

$$v^2 = 2ah \quad \text{o sea} \quad v = \left[\frac{2(m_2 - m_1) g h}{\frac{M}{2} + m_1 + m_2}\right]^{1/2}$$

Alternativamente, ya que el sistema es conservativo, ya que la cuerda no desliza sobre la polea:

$$E = U + K = cte. \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \Delta U + \Delta K = 0$$

$\Delta U_1 = m_1 g h$; $\Delta U_2 = -m_2 g h$ (desciende) $\Rightarrow \Delta U = m_1 g h - m_2 g h$

Además, $\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2$ ya que las energías cinéticas iniciales son todas nulas.

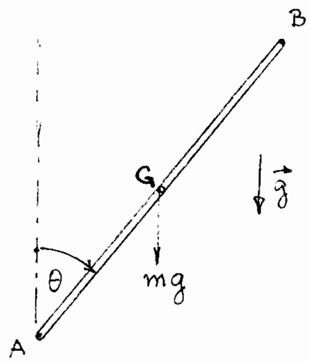
Además, se cumple que $v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$

$$\therefore \Delta U + \Delta K = 0 \Rightarrow m_1 g h - m_2 g h + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 = 0$$

$\therefore \quad v = \ldots$ idéntico a valor encontrado anteriormente.

3. Una barra delgada AB puede rotar libremente en torno a un eje horizontal fijo por su extremo A. La barra, inicialmente en posición vertical en equilibrio inestable, comienza a rotar partiendo del reposo.
Calcular : a) Su velocidad angular $\omega(\theta)$, donde θ es el ángulo que forma con la vertical ascendente. b) Reacciones en el eje A.

m = masa de la barra
l = longitud de la misma.



a) La barra gira en un plano perpendicular al eje de giro por A. Se trata de rotación <u>pura</u>.

Ecuación rotacional :

$$\tau_A = I_A \alpha \quad (1)$$

(De ahora en adelante llamaremos τ al momento de las fuerzas exteriores en vez de M como lo estábamos haciendo.)

$$\tau_A = mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta \quad ; \quad I_A = \frac{1}{3}ml^2 \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \text{ aceleración angular}$$

Luego, $\frac{1}{3}ml^2\alpha = mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta} \quad (1)$$

Para calcular la velocidad angular ω en función del ángulo θ se debería realizar previamente un cambio de variables en (1) definido por $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$ lo que la reduciría a $\omega\, d\omega = \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$.
La integración de esta última ecuación nos conduciría al resultado requerido.

Sin embargo, aprovechando que estamos frente a un sistema conservativo (no hay roce en el eje ni con el aire pues en el enunciado se dice que puede girar "libremente"), optamos por aplicar <u>la conservación de la energía mecánica</u>.

Tomando como nivel arbitrario de referencia para expresar las energías potenciales del centro de masa el nivel que corresponde a la posición del eje A, se tiene:

$$E(0) = mg\frac{\ell}{2} + 0 \quad (\text{barra en reposo en posición vertical})$$

$$E(\Theta) = mg\frac{\ell}{2}\cos\Theta + \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

Luego, de $E(\Theta) = E(0) \rightarrow mg\frac{\ell}{2}\cos\Theta + \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 = mg\frac{\ell}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1-\cos\Theta)}} \quad (2)$$

Se observa que la conservación de la energía nos conduce directamente al valor de la velocidad angular. Por lo tanto, si se deseara obtener la aceleración angular α, deberíamos hacerlo derivando (2) respecto del tiempo: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, lo que requiere una mayor familiaridad con el cálculo diferencial.

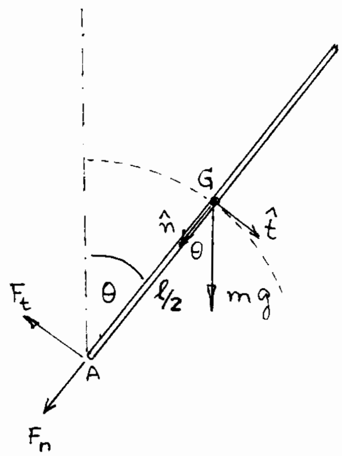
Resulta entonces que desde un punto de vista práctico, el valor de α lo obtenemos directamente de la ecuación rotacional, en tanto que la velocidad angular ω, si el sistema es conservativo, lo obtenemos directamente de la conservación de la energía mecánica.

b) Para determinar las reacciones en el eje hacemos uso de las ecuaciones de movimiento del centro de masa G. Recordemos que en un sistema de partículas, en este caso un sólido, el centro de masa se mueve como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto, sujeta a la acción de todas las fuerzas exteriores aplicadas directamente en ese mismo punto.

En el caso de nuestra barra, el centro de masa describe un arco de circunferencia de radio $\ell/2$.

$AG = \frac{\ell}{2}$

Sean F_n = componente de la reacción en A según $\hat{n}$
F_t = componente de la reacción en A según $\hat{t}$



Las ecuaciones de movimiento de G son entonces:

$$\hat{n}: \quad F_n + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell/2}$$

$$\hat{t}: \quad -F_t + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{dv}{dt}$$

Como $v = \frac{\ell}{2}\omega \;\rightarrow\; \frac{dv}{dt} = \frac{\ell}{2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\ell}{2}\alpha$

de modo que las ecuaciones anteriores toman la forma:

$$F_n + mg\cos\theta = m\frac{\ell}{2}\omega^2$$

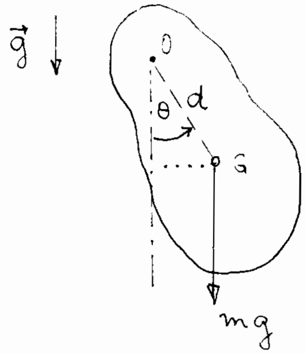
$$-F_t + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{\ell}{2}\alpha$$

Finalmente, con los valores de ω y α obtenidos en (2) y (1) se encuentra que:

$$F_n = \frac{mg}{2}(3 - 5\cos\theta) \qquad (3)$$

$$F_t = \frac{1}{4}mg\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (4)$$

4. Péndulo físico.



El cuerpo de la figura puede rotar en torno a un eje horizontal por O. Sea OG = d la distancia de O al centro de masa G.

Ecuación rotacional: $I_O\alpha = \tau_O$

o $\quad I_O\ddot{\theta} = -\,mg\,d\,\mathrm{sen}$

$\therefore \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O}\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad (1)$

La ecuación (1) es la ecuación diferencial del movimiento del péndulo físico. Para "pequeñas oscilaciones", $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ y la ecuación se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_0}\,\theta = 0$$

que es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple.

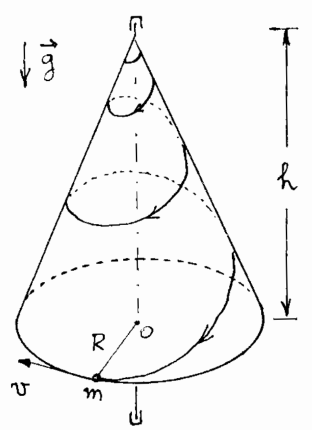
La frecuencia angular correspondiente es

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_0}}$$

Luego, el período de este movimiento será: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ésto es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgd}}\,.$$

5. Conservación del momentum angular: Un cono recto sólido, homogéneo, de masa M, radio R y altura h, puede rotar en torno a su eje geométrico vertical, montado en descansos sin fricción. Una partícula de masa m parte desde el reposo en la cúspide del cono deslizando hacia abajo por un surco liso labrado sobre la superficie del manto del cono hasta abandonarlo horizontal y tangencialmente al círculo basal. Si ambos cuerpos se encuentran inicialmente en reposo, determinar la velocidad angular final del cono. ($I = \frac{3}{10}MR^2$)



El sistema es conservativo pues no hay fricción. Además, las fuerzas exteriores $M\vec{g}$ y $m\vec{g}$ no dan momento respecto del eje de giro, de modo que el momentum angular del sistema se conserva.

De este modo, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1)$$ Conservación de la energía mecánica.

$$I\omega - mvR = 0 \qquad (2)$$ Conservación del momentum angular.

De (2): $$mv^2 = \frac{I^2\omega^2}{mR^2} \qquad (3)$$

De (3) y (1): $$\frac{I^2\omega^2}{mR^2} + I\omega^2 = 2mgh$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2mgh}{I\left(\frac{I}{mR^2}+1\right)}$$

con $I = \frac{3}{10}MR^2$ $\rightarrow$ $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{200\,mgh}{3MR^2\left(3\frac{M}{m}+10\right)}}}$$

— o —

6. Sobre una plataforma horizontal de masa m y radio R que puede rotar libremente en torno a un eje vertical por su centro O, hay una ranura lisa radial OA por la cual puede deslizar sin roce una masa m. Inicialmente esta masa se encuentra estacionada a la distancia $R/2$ del centro del disco mientras que en el extremo A de la ranura hay un pequeño animal "casualmente" también de masa m.

Súbitamente el animal comienza a caminar con rapidez v_0 relativa a la plataforma, siguiendo el borde.

Determinar la velocidad angular de la plataforma para el instante en que la masa m, deslizándose por la ranura por efecto de la rotación, se encuentra a la distancia $\frac{R}{2} < r < R$ del centro O.

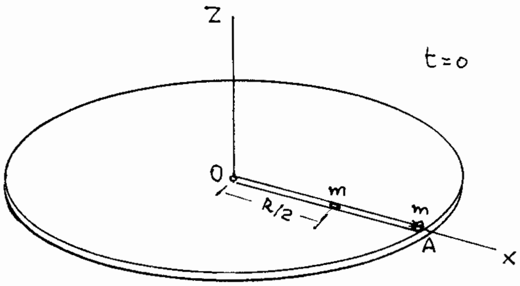


fig. 1

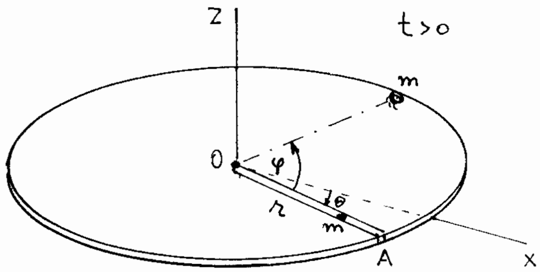


fig. 2

$$I_{disco} = \frac{1}{2} m R^2 \quad ; \quad \tau_z = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{L_z = cte.}$$

Como inicialmente el sistema está en reposo, $L_z = cte = 0$.

Cuando la masa m se encuentra entre $R/2$ y R sea ω la rapidez angular:

$$\therefore \quad L_{disco} = \frac{1}{2} m R^2 \omega$$

$$L_{masa} = r \cdot m v_m = m r^2 \omega \qquad \text{ya que } v_m = r\omega$$

$$L_{animal} = R \cdot m (v_0 + R\omega)$$

$$\therefore \quad L = L_{disco} + L_{masa} + L_{animal}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \omega + m r^2 \omega + R\, m (v_0 + R\omega) = 0$$

$$\cancel{m}\, \omega \left[\frac{3}{2} R^2 + r^2 \right] = -R\, \cancel{m}\, v_0$$

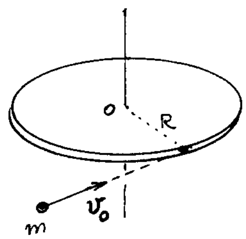
$$\therefore \quad \boxed{\omega = - \frac{R v_0}{\frac{3}{2} R^2 + r^2}}$$

Se observa que el disco rota en sentido contrario al del animal en torno al eje z, como lo indica el signo (−) en el resultado.

El eje x, inicialmente coincidente con la dirección OA, se mantiene fijo en el espacio como dirección de referencia.

El ángulo φ da la posición del animal relativa al eje de la ranura OA en fig. 2. en tanto que el ángulo θ da la posición de ésta, relativa a la dirección fija x.

7. Un disco de masa M y radio R puede girar libremente en torno a su eje vertical. Estando en reposo recibe tangencialmente el impacto de un proyectil de masa m y velocidad v_0 que queda incrustado en el borde. Calcular la velocidad angular con que queda rotando el conjunto.



El momentum angular del sistema bala-disco antes del impacto es el que corresponde a la bala únicamente pues el disco se encuentra en reposo. De este modo, $L_i = m v_0 \cdot R$

Después del impacto es $L_f = (I_d + mR^2)\omega$, donde $(I_d + mR^2)$ es el momento de inercia del conjunto respecto del eje fijo. Luego, $L_f = (\frac{M}{2}+m)R^2\omega$

Los momentos impulsivos que tienen lugar en el impacto son interiores al sistema, por lo que el momentum angular del mismo debe mantenerse constante:

$$L_i = L_f \rightarrow \quad m v_0 R = (\tfrac{M}{2}+m)R^2\omega \quad \rightarrow \boxed{\omega = \frac{m v_0}{(\frac{M}{2}+m)R}}$$

Si se desea averiguar cual ha sido la variación de la energía cinética del sistema:

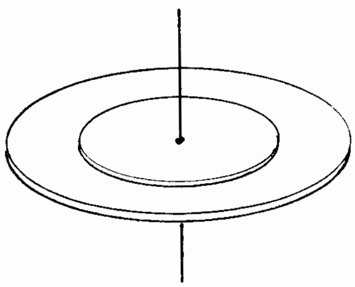
$$K_i = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \quad ; \quad K_f = \tfrac{1}{2} I \omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{M}{2}+m)R^2\omega^2$$

$$= \frac{\cancel{(\frac{M}{2}+m)}\cancel{R^2}}{2}\,\frac{m^2 v_0^2}{(\frac{M}{2}+m)^{\cancel{2}}\cancel{R^2}}$$

$$\therefore \Delta K = K_i - K_f$$

$$= \tfrac{1}{2} m v_0^2\left[1 - \frac{m}{\frac{M}{2}+m}\right] = \frac{M}{M+2m}\,\frac{m v_0^2}{2}.$$

8. Un disco de momento de inercia I_1 se encuentra girando libremente con una rapidez angular ω_1 cuando se deja caer concéntricamente sobre él un segundo disco que no gira, de momento de inercia I_2. Al entrar en contacto y luego que cesa el resbalamiento relativo, ambos giran como un todo. Determinar la rapidez angular ω_f del sistema.

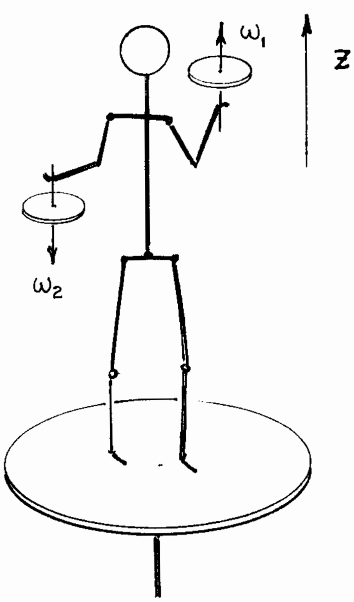


Como no existen componentes de torques esteriores en la dirección del eje de giro, se conserva el momentum angular del sistema.

$$\therefore \quad L_{antes} = L_{depues}$$

$$\text{o} \quad I_1\omega_1 = I_1\omega + I_2\omega \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{I_1\omega_1}{I_1+I_2}}$$

9.



Un hombre se encuentra de pie sobre una plataforma que puede rotar libremente sobre un eje vertical. El momento de inercia del conjunto es I_m, que se mantendrá constante. El momento de inercia de cada disco pequeño es I_0 y sus velocidades angulares son ω_1 y ω_2 tal como indica la figura. Si el hombre invierte el sentido de rotación de los discos, calcular la velocidad angular final ω del conjunto.

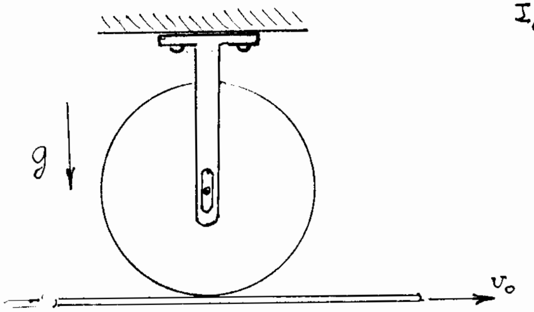
Las fuerzas que intervienen son interiores del sistema.

$$I_0\omega_1\hat{k} - I_0\omega_2\hat{k} + 0\hat{k} = -I_0\omega_1\hat{k} + I_0\omega_2\hat{k} + I_m\vec{\omega}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\omega} = \frac{2I_0}{I_m}(\omega_1 - \omega_2)\hat{k}}$$

La energía no se conserva debido al trabajo de las fuerzas interiores.

10. Un disco uniforme de masa M y radio R montado como indica la figura se encuentra en reposo al momento de entrar en contacto con una correa transportadora que se desplaza con velocidad constante v_0.

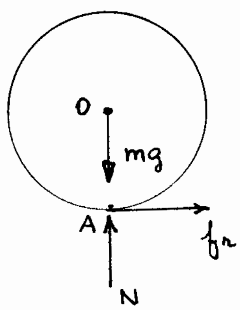


$I_0 = \frac{1}{2} M R^2$

El coeficiente de roce cinético es μ_c.

Calcular el número de vueltas que da el disco hasta el momento de comenzar a rodar sin resbalar.

D.C.L. Disco



$N = mg$ (1) ; $fr = \mu_c N = \mu_c m g$ (2)

$\tau_0 = fr \cdot R = \mu_c m g R$ (3)

$\therefore \mu_c m g R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$ $\quad (\tau_0 = I_0 \alpha)$

$\therefore \boxed{\alpha = \frac{2 \mu_c g}{R}}$ (4) Aceleración angular constante del disco mientras rueda.

Luego, de $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2 \alpha \theta$, con $\omega_1 = 0$, $\boxed{\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha}}$ (5)

En estas condiciones, la velocidad lineal de un punto cualquiera del borde del disco es $v = R\omega$. Reemplazando en (5), junto con (4):

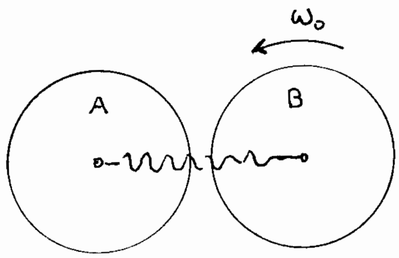
$$\theta = \frac{v^2}{R^2} \frac{R}{2 \cdot 2 \mu_c g} = \frac{v^2}{4 R \mu_c g} \quad (6)$$

Ahora, cuando v alcanza el valor v_0 de la correa cesa el resbalamiento y entonces, la rotación total ha sido, en radianes:

$$\boxed{\theta_T = \frac{v_0^2}{4 R \mu_c g}} \quad (7)$$

Luego, de $\boxed{n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{v_0^2}{8 \pi R \mu_c g}}$ (8)

11.

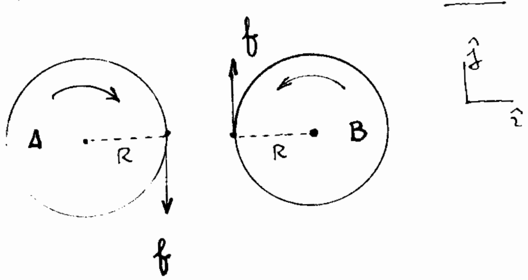


Dos discos idénticos A y B, de radios R y momentos de inercia I tienen sus ejes ligados por un resorte de longitud natural menor que 2R.

El disco A tiene su eje fijo y se encuentra detenido (sin girar). El disco B se encuentra girando en el sentido indicado, con rapidez angular inicial ω_0.

Al poner en contacto el disco B con el disco A, debido al resorte que une sus centros la fuerza de interacción es igual a F. Si el coeficiente de roce cinético es μ_c,

a) Determinar el tiempo t^* que transcurre hasta que los discos giran sin resbalar. b) Calcular la velocidad angular ω_f de ambos discos c) Calcular ΔK.



a)

Disco A

$$\vec{\tau}_A = R\hat{\imath} \times f(-\hat{\jmath}) = -Rf\hat{k}$$

$$\therefore\ \tau_A = -Rf = -R\mu_c F$$

$\therefore$ De $\tau_A = I\alpha_A$

$$\boxed{\alpha_A = -\frac{R\mu_c F}{I}} \quad (1)$$

Como α_A resulta ser constante,

$$\omega_A = 0 + \alpha_A t$$

$$\therefore\ \boxed{\omega_A = -\frac{R\mu_c F}{I}t} \quad (2)$$

Disco B

$$\vec{\tau}_B = -R\hat{\imath} \times f\hat{\jmath} = -Rf\hat{k}$$

$$\therefore\ \tau_B = -R\mu_c F$$

De $\tau_B = I\alpha_B$

$$\boxed{\alpha_B = -\frac{R\mu_c F}{I}} \quad (3)$$

$$\boxed{\omega_B = \omega_0 - \frac{R\mu_c F}{I}t} \quad (4)$$

Los discos dejan de girar cuando $\boxed{\omega_B = -\omega_A}$ (5)

o sea, cuando

$$\omega_0 - \frac{R\mu_c F}{I}t^* = \frac{R\mu_c F}{I}t^*$$

$$\therefore\ \boxed{t^* = \frac{\omega_0 I}{2\mu_c R F}} \quad (6)$$

b) $\omega_A^f = -\frac{\mu_c R F}{I} t^*$

$= -\frac{\mu_c R F}{I} \cdot \frac{\omega_0 I}{2\mu_c R F}$

$\therefore \boxed{\omega_A^f = -\frac{\omega_0}{2}}$

Análogamente,

$\omega_B^f = \omega_0 - \frac{\mu_c R F}{I} t^*$

$= \omega_0 - \frac{\mu_c R F}{I} \frac{\omega_0 I}{2\mu_c R F}$

$\therefore \omega_B^f = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2} \rightarrow \boxed{\omega_B^f = \frac{\omega_0}{2}}$

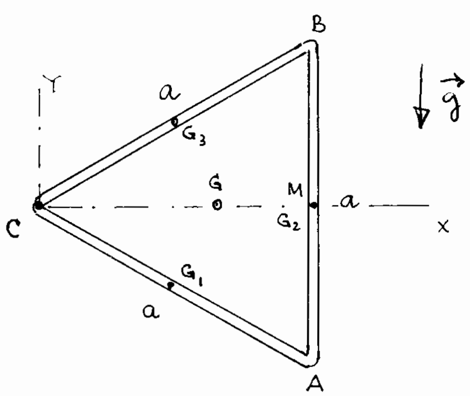
c) $\Delta K = K_f - K_i$

$= \frac{1}{2} I \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} I \left(-\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$

$= I \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{1}{2} I \omega_0^2$

$\therefore \boxed{\Delta K = -\frac{1}{4} I \omega_0^2}$

12.



El triángulo ABC formado por tres barras iguales de masas m y longitudes a puede rotar libremente por un eje horizontal fijo por C. Si se abandona desde la posición indicada y desde el reposo, calcular la aceleración angular α con que empieza a rotar.

De $\tau_C = I_C \alpha \rightarrow \alpha = \frac{(3m)g \cdot \overline{OG}}{I_C}$ (1)

Centro de masa:

Por inspección se deduce que G debe encontrarse sobre el eje de simetría CM (eje x)

$\therefore y_G = 0$

Además, con $CM = h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$3m \cdot x_G = m \frac{a}{2} \cos 30° + m \cdot \frac{a}{2} \cos 30° + m \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \rightarrow \boxed{x_G = \frac{a}{3}\sqrt{3}}$ (2)

Los momentos de inercia de las barras CB y CA con respecto al eje por C son iguales a $\frac{1}{3} m a^2$. El momento de inercia de la barra AB, según Steiner es, respecto de M, $I_M = \frac{1}{12} m a^2$

Aplicando nuevamente Steiner:

$I_C^{AB} = \frac{1}{12} m a^2 + m\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{5}{6} m a^2$

$\therefore I_C = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = \frac{3}{2} m a^2$ (3)

De (1) $\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3a} g}$