Sistemas Newtonianos
Ondas meánicas: descripción y modos propagativos

Por: Rodrigo Soto

Departamento de Física, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2008

$\partial f \iota$

Introducción

Las ondas son un fenómeno genérico en física.

- ondas sonoras
- ondas en la superficie del agua
- ondas electromagnéticas (luz, radio)
- ondas en mebranas (tambores)
- ondas en cuerdas (guitarra)
- ondas sísmicas

En este curso:

- ondas mecánicas, descritas por la ley de Newton.
- que se propagan en una dimensión
- sin disipación

Introducción

Las ondas son un fenómeno genérico en física.

- ondas sonoras
- ondas en la superficie del agua
- ondas electromagnéticas (luz, radio)
- ondas en mebranas (tambores)
- ondas en cuerdas (guitarra)
- ondas sísmicas

En este curso:

- ondas mecánicas, descritas por la ley de Newton.
- que se propagan en una dimensión
- sin disipación

Relación con las oscilaciones

Oscilaciones:

- Un cuerpo que se mueve en una coordenada. Ej: resorte en 1D, pendulo en un movimiento circular, etc.
- Hay un punto de equilibrio
- Ese equilibrio es estable
- Cuando se pertuba el sistema oscila
- Frecuencia $\approx$ constante elástica/inercia

Ondas:

- Se requiere un cuerpo continuo que pueda ser deformado
- Se tiene una forma de equilibrio
- Al deformarlo trata de volver a su forma original: movimiento ondulatorio.

Relación con las oscilaciones

Oscilaciones:

- Un cuerpo que se mueve en una coordenada. Ej: resorte en 1D, pendulo en un movimiento circular, etc.
- Hay un punto de equilibrio
- Ese equilibrio es estable
- Cuando se pertuba el sistema oscila
- Frecuencia $\approx$ constante elástica/inercia

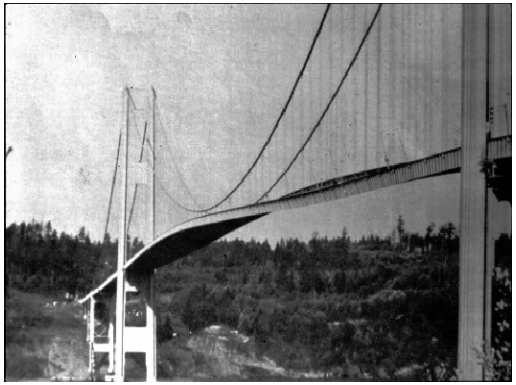
Ondas:

- Se requiere un cuerpo continuo que pueda ser deformado
- Se tiene una forma de equilibrio
- Al deformarlo trata de volver a su forma original: movimiento ondulatorio.

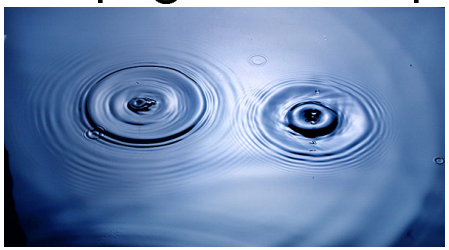
Tipos de movimiento

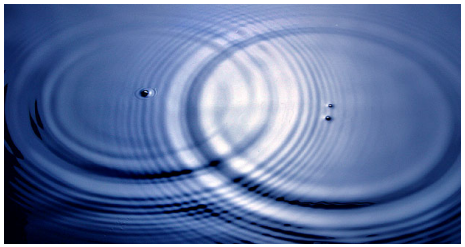
Hay varias formas de movimiento ondulatorio

- Oscilación colectiva



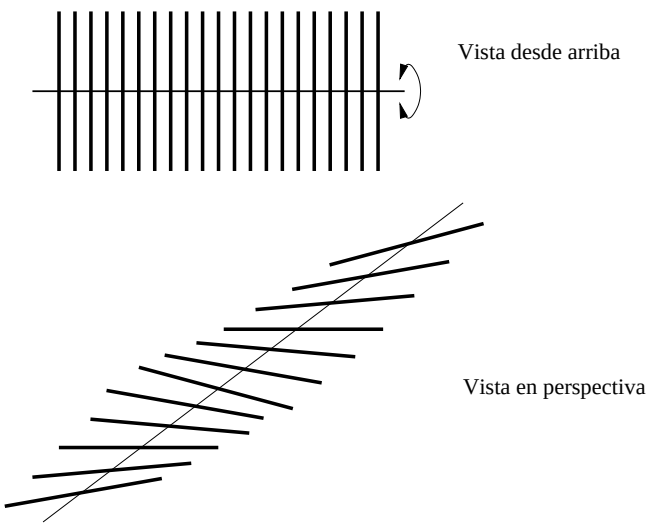
- Propagación de pulsos





Vamos a ver que los dos tipos de fenómenos se describen de manera unificada como fenómenos ondulatorios.

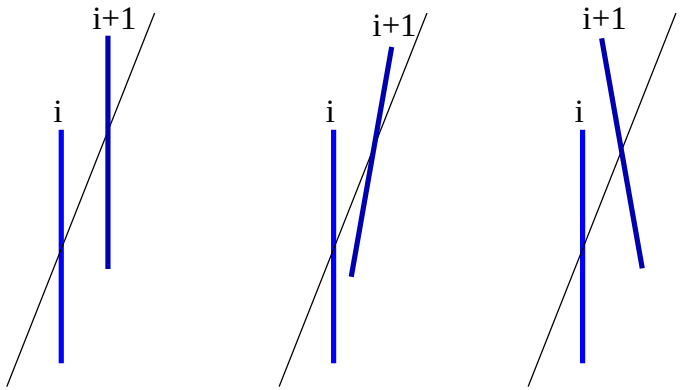
Ondas de torsión



- Varillas de masa m, largo L y momento de inercia I.
- Están soldadas por su centro a un hilo metálico
- El hilo se mantiene horizontal.
- Las varillas pueden girar en torno a su centro
- Al girar tuercen el hilo y provocan un torque a las varillas vecinas.

Ondas de torsión

Torques entre varillas:



Si $\theta_{i+1} = \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i = 0$

Si $\theta_{i+1} > \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i > 0$

Si $\theta_{i+1} < \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i < 0$

Se propone:

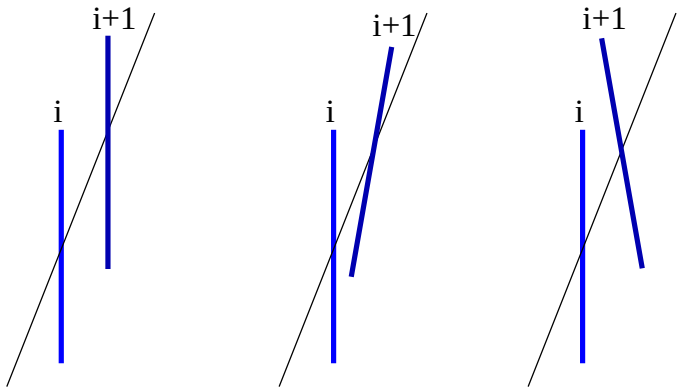
$$\tau_i = T(\theta_{i+1} - \theta_i) + T(\theta_{i-1} - \theta_i)$$

Ecuación de movimiento:

$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$$

Ondas de torsión

Torques entre varillas:



Si $\theta_{i+1} = \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i = 0$

Si $\theta_{i+1} > \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i > 0$

Si $\theta_{i+1} < \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i < 0$

Se propone:

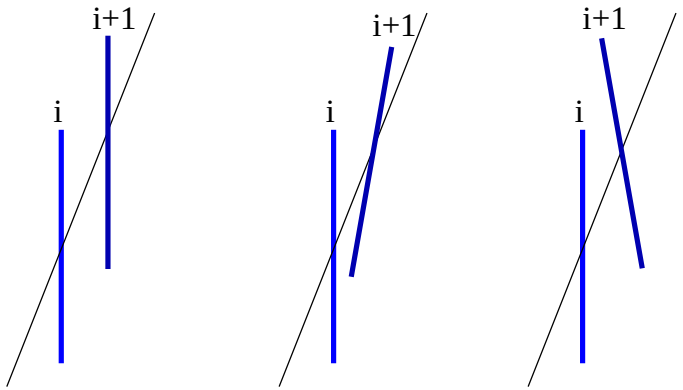
$$\tau_i = T(\theta_{i+1} - \theta_i) + T(\theta_{i-1} - \theta_i)$$

Ecuación de movimiento:

$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$$

Ondas de torsión

Torques entre varillas:



Si $\theta_{i+1} = \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i = 0$

Si $\theta_{i+1} > \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i > 0$

Si $\theta_{i+1} < \theta_i \quad \Rightarrow \quad \tau_i < 0$

Se propone:

$$\tau_i = T(\theta_{i+1} - \theta_i) + T(\theta_{i-1} - \theta_i)$$

Ecuación de movimiento:

$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$$

Ondas de torsión, aproximación continua

Sea Δ la distancia entre las varillas. Se define: $x \equiv i\Delta$
Y se considera: $\theta(x)$ ángulo de la varilla que está en x.
Se tenía

$$
\begin{aligned}
I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} &= T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \\
&= T\Delta^2\left(\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta^2}\right) \\
I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} &= T\Delta^2\left(\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}\right)
\end{aligned}
$$

Se puede escribir como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = c^2\frac{d^2\theta}{dx^2}\,; \qquad c = \sqrt{T\Delta^2/I} \quad \text{Ecuación de onda}$$

Ondas de torsión, aproximación continua

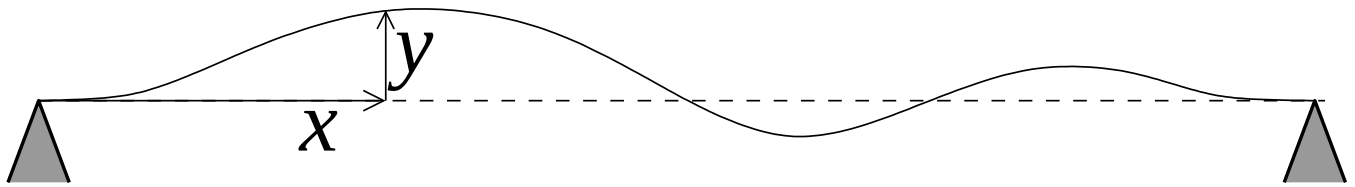
Sea Δ la distancia entre las varillas. Se define: $x \equiv i\Delta$
Y se considera: $\theta(x)$ ángulo de la varilla que está en x.
Se tenía

$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$$
$$= T\Delta^2\left(\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta^2}\right)$$
$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T\Delta^2\left(\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}\right)$$

Se puede escribir como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = c^2\frac{d^2\theta}{dx^2}\,; \qquad c = \sqrt{T\Delta^2/I} \quad \text{Ecuación de onda}$$

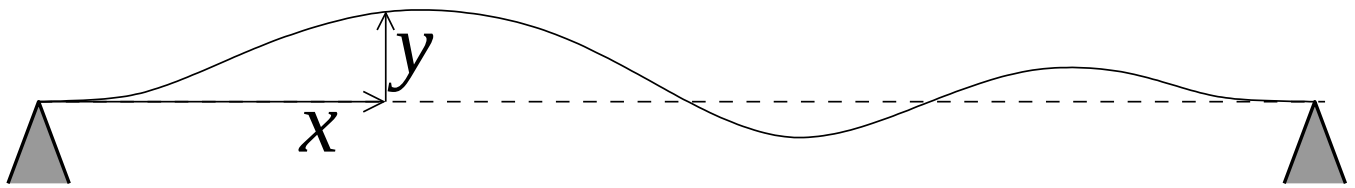
La cuerda



Cuerda de tensión T, masa M y largo L. Densidad de masa lineal $\rho = M/L$.

La cuerda se deforma verticalmente (transversalemente).

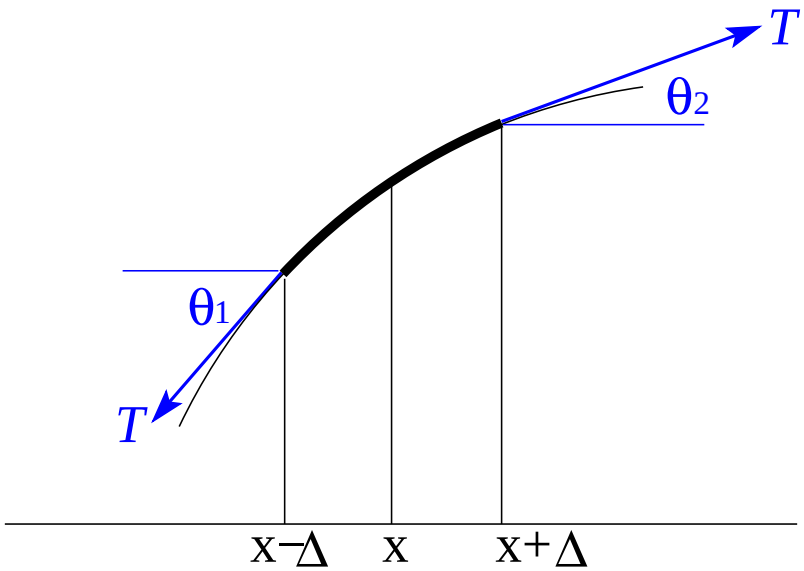
La cuerda



Cuerda de tensión T, masa M y largo L. Densidad de masa lineal $\rho = M/L$.

La cuerda se deforma verticalmente (transversalemente).

Se considera un trozo de cuerda entre $x - \Delta$ y $x + \Delta$.



$$\vec{F} = T(-\cos\theta_1 \hat{x} - \sin\theta_1 \hat{y}) + T(\cos\theta_2 \hat{x} + \sin\theta_2 \hat{y})$$

La cuerda

Se considera que los ángulos son siempre pequeños ($\theta \ll 1$).
Entonces: $\cos\theta \approx 1$ y $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$,

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= T(-\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{y}) + T(\cos\theta_2\hat{x} + \sin\theta_2\hat{y}) \\
&\approx T(-\tan\theta_1 + \tan\theta_2)\hat{y} \\
\vec{F} &= T\left(\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)\right)\hat{y}
\end{aligned}$$

Se aplica Ley de Newton. Masa $m = 2\Delta\rho$. Aceleración

$$\vec{a} = \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}$$

La cuerda

Luego

$$2\Delta\rho\frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} = T\left(\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)\right)\hat{y}$$

Simplificando el vector unitario y dividiendo por 2Δ se tiene

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2} = T\left(\frac{\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)}{2\Delta}\right)$$

Luego

$$2\Delta\rho\frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} = T\left(\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)\right)\hat{y}$$

Simplificando el vector unitario y dividiendo por 2Δ se tiene

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2} = T\left(\frac{\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)}{2\Delta}\right)$$

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2} = T\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad \text{Ecuación de onda}$$

Con $c = \sqrt{T/\rho}$

Solución de D' Alembert

Forma general de la ecuación de ondas

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

$u(x,t)$ describe la deformación relevante en el medio.
Sea una función $f(x)$ cualquiera. Se define

$$u(x,t) = f(x-ct)$$

Solución de D' Alembert

Forma general de la ecuación de ondas

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

$u(x,t)$ describe la deformación relevante en el medio.
Sea una función $f(x)$ cualquiera. Se define

$$u(x,t) = f(x-ct)$$

Calculando

$$\frac{du}{dx} = f'(x-ct) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = f''(x-ct)$$

$$\frac{du}{dt} = (-c)f'(x-ct) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = (-c)^2 f''(x-ct) = c^2 f''(x-ct)$$

Reemplazando se satisface la ecuación.

Analogamente, si $g(x)$ es una función cualquiera

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

también es solución.

¿Qué significa?

Actividad práctica 1

Graficar $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ en función de x a medida que el tiempo avanza.

Caso 1

$$f(x) = \frac{1\text{cm}}{(x/5\text{cm})^2 + 1}$$
$$g(x) = 0$$

Graficar en el rango $-100\text{cm} < x < 100\text{cm}$ para $t = 0, \ldots, 40\text{s}$
Hacerlo para $c = 1\text{cm/s}$ y $c = 2\text{cm/s}$.

Actividad práctica 1

Caso 2

$$f(x) = 0$$

$$g(x) = \frac{2\text{cm}}{\exp(x/10\text{cm}) + \exp(-x/5\text{cm})}$$

Graficar en el rango $-100\text{cm} < x < 100\text{cm}$ para $t = 0, \ldots, 40\text{s}$

Hacerlo para $c = 1\text{cm/s}$

Caso 3

$$f(x) = \frac{1\text{cm}}{(x/5\text{cm})^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{2\text{cm}}{\exp(x/10\text{cm}) + \exp(-x/5\text{cm})}$$

Graficar en el rango $-100\text{cm} < x < 100\text{cm}$ para $t = -80\text{s}, \ldots, 80\text{s}$

Hacerlo para $c = 1\text{cm/s}$

A modo de ejemplo, un programa Matlab que realiza el primer caso con $v = 1$ es

```
v=1;
x=-100:1:100;
for t=0:2:40
    y=x-v*t;
    u=1./((y./5).^2+1);
    plot(x,u)
    pause
end
```

donde se debe apretar `Enter` para pasar de un gráfico al otro.

Indique en el informe qué se observa y cómo se interpretan las soluciones de D' Alembert.

Actividad práctica 2

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

es el desplazamiento vertical de una cuerda tensa.
La velocidad vertical de cada pedazo de cuerda se obtiene como

$$v(x,t) = du(x,t)/dt = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)$$

Considere que

$$f(x) = g(x) = \frac{1\text{cm}}{(x/5\text{cm})^2 + 1}$$

Grafique u y v en el rango $-100\text{cm} < x < 100\text{cm}$ y $t = 0, \ldots, 40\text{s}$.
Use $c = 1cm/s$.

En el inforque indique qué se observa en el gráfico del desplazamiento u y la velocidad v. Interpreta a que corresponde esta solución. ¿Corresponde a alguna condición inicial especial? ¿Cómo interpreta esta solución?

Actividad práctica 2...

Si tiene tiempo, haga lo mismo para el siguiente caso

$$f(x) = \frac{1\text{cm}}{(x/5\text{cm})^2 + 1}$$
$$g(x) = -f(x)$$

Actividad práctica 3

Se busca determinar las propiedades físicas del sistema de ondas de torsión con varillas. Sabiendo que

$$c = \sqrt{T\Delta^2/I}$$

A partir del video en subido a UCursos determine el valor de I_1/I_2 y comparelo con la predicción teórica.

En el informe indique el procedimiento que usó para determinar I_1/I_2 y el valor obtenido. Indique el efecto de tener un mayor o menor I en la propagación de las ondas