

Unidad 5C - Oscilaciones Forzadas

Índice

1. Introducción	1
2. Ejemplos cotidianos	2
3. Ecuación y solución analítica	3
4. Solución numérica	6
5. Un forzaje un poco más realista	6
6. Sobre la solución de la ecuación de un oscilador forzado	8

1. Introducción

En las unidades anteriores se estudiaron oscilaciones armónicas mecánicas. Se consideró también el efecto del roce viscoso (de algún tipo) sobre estas oscilaciones, lo cual se llama un oscilador amortiguado. Este oscilador puede ser representado gráficamente como se muestra en la figura 1, el cual consta de tres elementos: una masa (inercia), una fuerza restitutiva (resorte) y el roce (amortiguador). Es importante notar que no se ha especificado aún el origen del roce en este sistema. Puede ser un roce superficial con el plano en la cual se apoya la masa, o puede ser roce viscoso con el aire o algún líquido lubricante. Notemos también que el largo natural del resorte simplemente nos dice que en equilibrio, es decir cuando la suma de fuerzas es nula, la masa se encuentra naturalmente a una distancia l_o de la pared, lo que define $x = 0$. En el caso de un péndulo formado por un globo, la fuerza restitutiva está dada por la gravedad, y el roce está dominado por la fuerza de arrastre de Rayleigh.

En esta unidad estudiaremos el caso de un oscilador amortiguado forzado. Esto significa que a la imagen anterior agregaremos un forzaje con una dependencia explícita en el tiempo. La idea es que si uno fuerza el sistema a una frecuencia bien particular, el movimiento oscilatorio será amplificado. Esta frecuencia es denominada *frecuencia de resonancia* o *frecuencia natural de vibración*. Un primer ejemplo es un columpio. Se trata de un péndulo, en el cual se realiza un forzaje periódico en el tiempo moviendo las piernas de *cierta manera* hacia adelante y hacia atrás. Aquí, se deben mover las piernas sincronizadamente con el péndulo, si uno lo hace más rápido, o más lento, el columpio no funciona.

Por simplicidad, supondremos en esta unidad que el amortiguamiento está dado por un roce viscoso lineal. Esto ayuda en el tratamiento matemático y numérico del problema, aunque puede ser poco realista en algunas situaciones. El énfasis estará dado en el efecto del forzaje más que en considerar bien cuál es el mecanismo dominante de roce en estos sistemas.

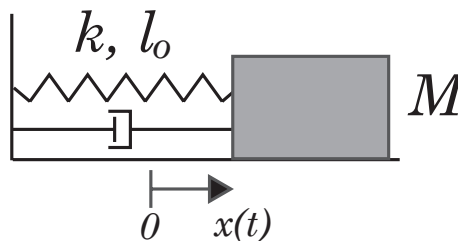


Figura 1: Esquema de un oscilador amortiguado compuesto por un resorte, una masa y algún tipo de roce. El forzaje externo puede ser incluido como una fuerza $\vec{F}(t)$ que actúa sobre la masa M .

2. Ejemplos cotidianos

Como se explicó al comienzo del semestre, el modelamiento físico de un sistema puede hacerse en diferentes grados de complejidad. El modelo que estudiaremos en esta unidad, presentado en la figura 1, es el más simple que puede considerarse. Más adelante, ustedes irán agregando grados de complejidad a los sistemas bajo estudio. Aquí mencionamos algunos ejemplos cotidianos de sistemas oscilantes forzados que presentan las características básicas que discutiremos a continuación.

- Los instrumentos musicales son buenos ejemplos de osciladores forzados. Sin embargo, pertenecen a una clase más compleja pues son medios continuos y por lo tanto presentan un conjunto de frecuencias de resonancia (notas musicales de una cuerda de guitarra por ejemplo). Se estudiarán los *modos de resonancia* de una cuerda un poco más adelante en el semestre.
- Los edificios tienen frecuencias naturales de vibración, por muy compleja que sea su estructura. Si un terremoto ocurre a una frecuencia de resonancia del edificio, este



Figura 2: Derrumbe del Hotel Continental ocurrido durante el terremoto de 1985 en ciudad de México. Este edificio entró en resonancia con la frecuencia de forzaje del temblor, y sus pisos superiores colapsaron. Otros edificios contiguos, más altos o más bajos, no sufrieron los mismos daños que este hotel.

puede llegar a romperse. Por supuesto que técnicas actuales reducen esta posibilidad. Un ejemplo de un colapso real se muestra en la figura 2.

- Aunque la formación de una superficie ondulada bastante regular, llamada *calamina*, en un camino de tierra aún no es bien entendida, los vehículos que transitan sobre un camino calaminado deben tener cuidado de no entrar en resonancia. En algunas salidas de autopistas, o antes de un peaje, se instalan calaminas artificiales, de modo de advertir al conductor que va muy rápido y que debe disminuir su velocidad.
- Existe la leyenda de que durante el siglo XIX un ejército Francés produjo el colapso de un puente al cruzarlo debido al forzaje resonante que produjeron los soldados al marchar. Se dice que en la actualidad se advierte a los soldados de no marchar sobre un puente.

3. Ecuación y solución analítica

La ecuación de Newton de un oscilador amortiguado es la siguiente

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x}. \quad (1)$$

Dividiendo por M y reordenando se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0, \quad (2)$$

donde $\tau = M/b$ representa un tiempo de atenuación, con M la masa y b la constante de roce viscoso (fuerza de roce viscoso $= -b\dot{x}$), y $\omega_o = \sqrt{k/M}$ es la frecuencia angular de

resonancia. La solución $x(t)$ de esta ecuación es

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_o), \quad (3)$$

con

$$\Omega^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2. \quad (4)$$

Nótese que esta solución es válida si $\Omega^2 > 0$. Cuando el roce es pequeño, τ es grande y por lo tanto $\Omega \approx \omega_o$. Las constantes A y ϕ_o se determinan de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$.

En el caso de un oscilador amortiguado forzado, con una fuerza $F(t) = F_o \sin(\omega t)$, la ecuación de Newton resulta

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_o \sin(\omega t). \quad (5)$$

De nuevo, dividiendo por M y reordenando se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{M} \sin(\omega t). \quad (6)$$

La solución analítica de esta ecuación es mas compleja, pero puede demostrarse que la solución general es la suma de dos soluciones, la dada por la ecuación (3) más una particular. Por ahora simplemente daremos la solución:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_o) + \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin(\omega t - \delta), \quad (7)$$

con

$$\tan \delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_o^2 - \omega^2)}. \quad (8)$$

Al final de esta guía se indican los pasos a seguir para demostrar que esta es efectivamente la solución de la ecuación (6). Las constantes A y ϕ_o se determinan de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. El primer término de esta solución corresponde a un transiente, es decir después de un cierto tiempo este término decae a cero, tal como en la solución de un oscilador amortiguado sin forzaje externo. Es el segundo término, proporcional a F_o , el que da la solución estacionaria, es decir aquella que perdurará en el tiempo. De esta manera se puede interpretar δ como una diferencia de fase entre la solución estacionaria y el forzaje.

Cuando $b \rightarrow 0$, se tiene $\tau \rightarrow \infty$, por lo que $e^{-t/2\tau} \rightarrow 1$. Además, en este límite, la amplitud de la parte estacionaria $B(\omega) \rightarrow F_o/(M(\omega_o^2 - \omega^2))$, y por lo tanto presenta una divergencia en $\omega = \omega_o$.

Ejemplos de la solución $x(t)$ para dos valores de la frecuencia de forzamiento se muestran en la figura 3, lejos (a) y cerca (b) de la frecuencia de resonancia natural ω_o . Es importante notar de que a pesar de que el decaimiento $\tau = 4,72$ s, en este caso (por las condiciones

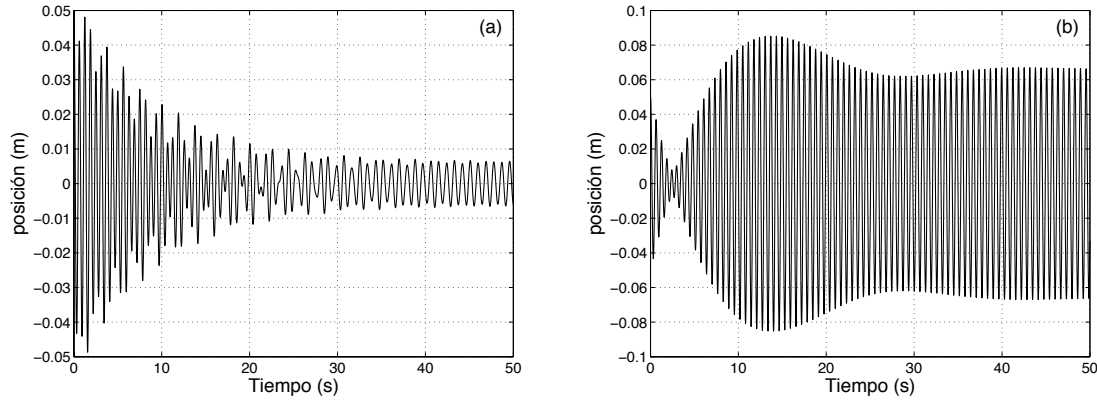


Figura 3: Ejemplos de soluciones $x(t)$ obtenidas con $M = 0,778$ kg, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $F_o = 0,25$ N, $x(0) = 0,05$ m, $\dot{x}(0) = 0$. En (a), $\omega = 7$ rad/s y en (b) $\omega = 9,8$ rad/s. La frecuencia natural de resonancia es $\omega_o = \sqrt{k/M} = 10$ rad/s.

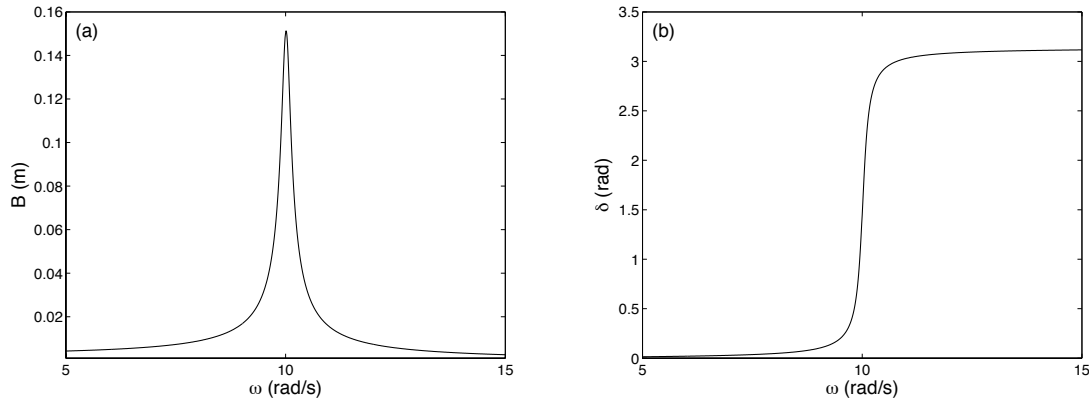


Figura 4: (a) Curva de resonancia de la amplitud B como función de ω . (b) Diferencia de fase δ como función de ω . Ambas curvas fueron obtenidas con $M = 0,778$ kg, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $F_o = 0,25$ N. La frecuencia natural de resonancia es $\omega_o = \sqrt{k/M} = 10$ rad/s.

iniciales) el transiente tiene un efecto importante sobre la solución para tiempos más largos, hasta aproximadamente 40 s.

Si nos fijamos únicamente en la solución estacionaria ($e^{(-t/2\tau)} \rightarrow 0$), ésta tiene una amplitud dada por

$$B = \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}. \quad (9)$$

Ejemplos de la amplitud B y el desfase δ como funciones de ω se muestran en la figura 4. Se observa que la función $B(\omega)$ tiene un máximo. Imponiendo $dB(\omega)/d\omega = 0$ se obtiene que el

máximo ocurre cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_o^2 - 2 \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2. \quad (10)$$

De nuevo, cuando el roce es pequeño, τ es grande y por lo tanto el sistema es resonante, es decir su respuesta es máxima, cuando $\omega \approx \omega_o$.

La interpretación de δ es simple. Para $\omega \ll \omega_r$, $\delta \approx 0$, es decir siendo la amplitud de oscilación pequeña, está en fase con el forzaje. Por el contrario, para $\omega \gg \omega_r$, también la respuesta de la amplitud de oscilación es pequeña pero el desfase es $\delta \approx 180^\circ$. Finalmente, para $\omega = \omega_r$, se tiene $\delta = 90^\circ$.

4. Solución numérica

La solución analítica dada por la ecuación (7) no es fácil de manipular. En particular dadas las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ de deben obtener las constantes A y ϕ_o , lo que algebraicamente no es sencillo. Una manera de resolver la ecuación (6) es usando el algoritmo de Verlet, visto en la unidad 1. Para ello aproximaremos

$$\dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \quad \ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}.$$

Luego, la versión discreta de la ecuación (6) es

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{\tau} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \omega_o^2 x_i = \frac{F_o}{M} \sin(\omega t_i), \quad (11)$$

y despejando x_{i+1} se obtiene

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \frac{F_o(\Delta t)^2}{M} \sin(\omega t_i) - \frac{\Delta t(x_i - x_{i-1})}{\tau} - \omega_o^2(\Delta t)^2 x_i. \quad (12)$$

Las condiciones iniciales se consideran al imponer $x_1 = x(0)$ y $x_2 = x(0) + \dot{x}(0) \cdot \Delta t$ y se obtiene la secuencia de los x_i con $i > 2$. Finalmente, los resultados presentados en la figura 3 fueron obtenidas numéricamente usando precisamente este algoritmo.

5. Un forzaje un poco más realista

Una pregunta natural que nace al estudiar la ecuación de un oscilador mecánico forzado es de qué manera se puede obtener un forzaje del tipo $F_o \sin(\omega t)$ en una situación realista. Una manera podría ser de forzar a la masa con un campo magnético o eléctrico, aunque es deseable de tener un sistema mecánico más simple.

Un modelo bastante simple es el que se presenta en la figura 5. Sobre un carro *grande*, de masa M , se coloca un carro *pequeño* el cual se mueve con respecto al carro grande de una

manera sinusoidal, es decir $y(t) = y_o \sin(\omega t)$. Debemos insistir que el movimiento del carro pequeño es relativo al carro grande. De este modo el origen $0'$ de la coordenada $y(t)$ se encuentra fijo al carro grande.

El punto de partida entonces es escribir la ecuación de Newton para el centro de masa del sistema:

$$(M + m) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{M \cdot x + m \cdot (x + y)}{M + m} \right) = -kx - b\dot{x}. \quad (13)$$

Es importante notar que en este modelo el roce viscoso solo actúa sobre la masa M , y no sobre la masa pequeña m . Con un poco de álgebra se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o^2 x = -\frac{m}{M + m} \ddot{y}, \quad (14)$$

donde ahora $\tau = (M + m)/b$ y $\omega_o^2 = k/(M + m)$. Suponemos ahora que el carro pequeño tiene algún tipo de motor que permite asegurar que $y(t) = y_o \sin(\omega t)$ para todo t , entonces $\ddot{y} = -y_o \omega^2 \sin(\omega t)$. Con esto, la ecuación de Newton resulta

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{m y_o \omega^2}{M + m} \sin(\omega t), \quad (15)$$

que básicamente igual a la ecuación (6) salvo que la constante que va delante de $\sin(\omega t)$, llamada F_o , ya no es independiente de ω . La solución analítica (7) no cambia, sólo debe cambiarse F_o/M por $m y_o \omega^2 / (M + m)$. De igual manera, la amplitud de la solución estacionaria $B(\omega)$ cambia sólo en el reemplazo $F_o/M \rightarrow m y_o \omega^2 / (M + m)$, es decir si cambia como función de ω . Explícitamente tenemos

$$B = \frac{m y_o \omega^2 / (M + m)}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}. \quad (16)$$

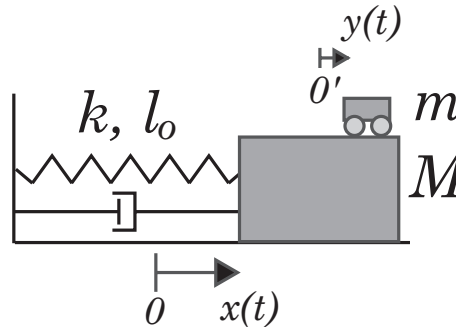


Figura 5: Esquema de un oscilador amortiguado compuesto por un resorte, una masa y algún tipo de roce. El forzaje externo sobre la masa M se obtiene por un movimiento oscilatorio impuesto a la masa m , es decir con $y(t) = y_o \sin(\omega t)$.

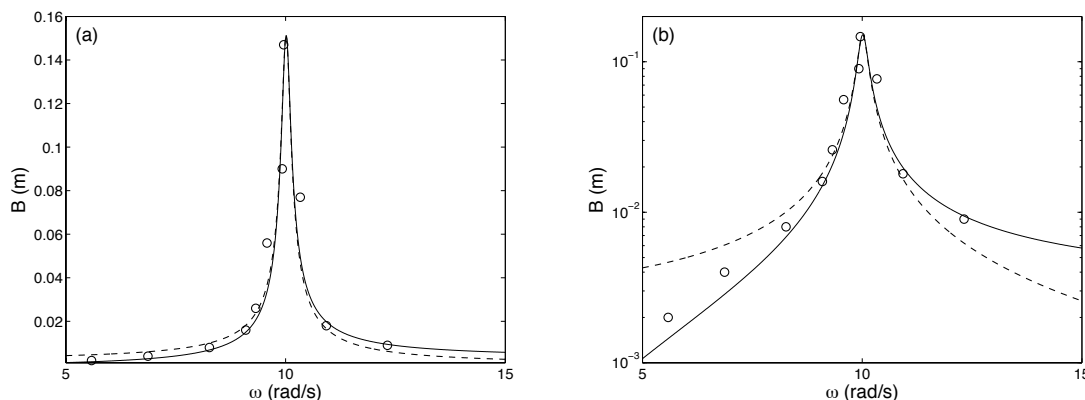


Figura 6: Curvas de resonancias de la amplitud B como función de ω , en escala lineal (a) y en escala semilogarítmica (b). La curva segmentada es la misma presentada en la figura 4a. La curva continua se obtuvo con la ecuación (16) con $M = 0,735$ kg, $m = 43$ g, $y_o = 5,8$ cm, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $\omega_o = \sqrt{k/(M + m)} = 10$ rad/s. Los datos (o) corresponden a medidas experimentales.

La diferencia de $B(\omega)$ obtenida con F_o constante o con $my_o\omega^2$ se muestra en la figura 6. La curva original es más simétrica con respecto al máximo; la curva $B(\omega)$ nueva, dada por (16), es más asimétrica. Los datos experimentales que se presentan fueron obtenidos con el mismo montaje que se usará en clases durante la sesión práctica. Estos datos muestran que efectivamente la resonancia parece más asimétrica entorno al máximo. El acuerdo entre los datos y la nueva curva $B(\omega)$ es bastante bueno, lo que se aprecia mejor en la figura 6b que presenta el la coordenada vertical en escala logarítmica de base 10.

Finalmente, debemos decir que la solución numérica en este caso también es ligeramente corregida, por el reemplazo $F_o/M \rightarrow my_o\omega^2/(M + m)$ en la ecuación (12).

6. Sobre la solución de la ecuación de un oscilador forzado

Para terminar esta guía daremos una pauta simple de cómo entender la solución de la ecuación (6). Si bien la demostración formal de que ésta es la solución general es complicada, se pueden dar algunas pistas de como mostrar que es una solución. Se les sugiere que efectivamente hagan estos pasos como tarea:

- (1) Se intenta una solución de la forma

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_o) + B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t),$$

la cual se reemplaza en la ecuación (6).

- (2) La solución transiente (proporcional a A) es solución de la ecuación sin forzaje, por lo que sólo queda la solución estacionaria. Se buscan entonces los valores B_1 y B_2 .
- (3) Se escribe

$$B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) = B \sin(\omega t - \delta),$$

y se encuentran B y δ .