

## F11A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Semestre 2008-1

Unidad 4D: Dinámica Plana III – Movimiento de Rodadura

Por: René D. Garraud y Hugo F. Arellano

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

---

### Indice

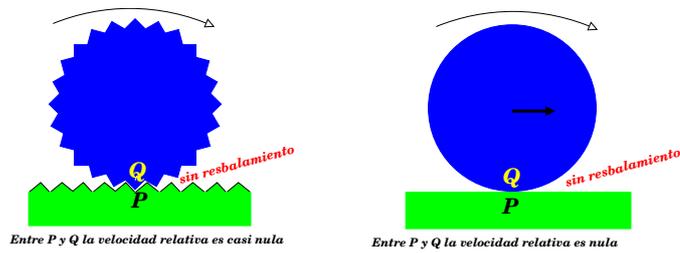
0.1. Rotaciones en torno a eje fijo . . . . .	2
0.2. Rueda sobre plano inclinado . . . . .	3
0.3. Consideraciones geométricas . . . . .	4
0.4. Energía en rodadura perfecta . . . . .	5
0.5. Comentarios sobre la relación $\vec{r} = I\vec{\alpha}$ . . . . .	7
0.6. Apéndice . . . . .	8

En una primera caracterización del movimiento de cuerpos sólidos, en relación a sus contactos con elementos externos, podemos identificar dos casos de interés particular:

- aquellos movimientos de *rotación pura* en torno a un eje fijo; y
- aquellos movimientos de rodadura sin resbalamiento.

Ciertamente estos no son los únicos casos concebibles. Podemos agregar movimientos compuestos de rotación y traslación (como un boomerang en el aire), y de rotación con resbalamiento (como el neumático de un vehículo al partir resbalando).

Si pensamos específicamente en una rueda, en la figura de más abajo ilustramos una rueda dentada que gira, sin deslizar, sobre una superficie igualmente dentada. Cuando los dientes P y Q entran en contacto no hay deslizamiento mutuo, de modo que la velocidad *instantánea* relativa entre ellos es nula. Puesto que el engranaje inferior está en reposo, entonces Q necesariamente está en reposo instantáneo. Esta idea se extiende a la rueda que no resbala de la derecha, donde observamos que el punto Q de la rueda en contacto con el plano está en reposo instantáneo.



### 0.1. Rotaciones en torno a eje fijo

En la unidad anterior abordamos el estudio de la *Máquina de Atwood*, consistente en un disco de dos cantos que gira en torno a un eje fijo debido a cargas dispuestas asimétricamente. Si  $I_o$  es el momento de inercia del disco con respecto a su eje de rotación ('o'), entonces el torque externo con respecto a ese eje ( $\vec{\tau}_o$ ) induce una aceleración angular  $\vec{\alpha}$  (alfa), determinada por

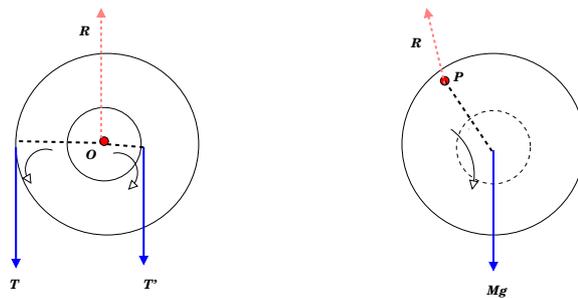
$$\vec{\tau}_o = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_o\vec{\alpha} . \tag{1}$$

Recordar que esta es una relación vectorial. Sin embargo, para cuerpos planos (y si 'o' es escogido en el plano del papel), entonces los torques resultantes son perpendiculares a este plano. Si  $\hat{k}$  es un vector unitario saliendo del (o entrando al) papel, entonces podemos expresar

$$\vec{\tau}_o = \tau_o\hat{k}; \quad \vec{\alpha} = \alpha\hat{k} ,$$

con lo cual obtenemos la relación para las componentes

$$\tau_o = I_o\alpha .$$



En la figura de más arriba se ilustran dos casos de rotación en torno a un eje fijo: el de la máquina de Atwood (izquierda) y el de una rueda que puede girar (a modo de péndulo) en torno al eje P. Ambas se rigen por la misma ecuación del movimiento  $\tau_{fijo} = I_{fijo}\alpha$ , donde el eje fijo se ubica en O y P, respectivamente.

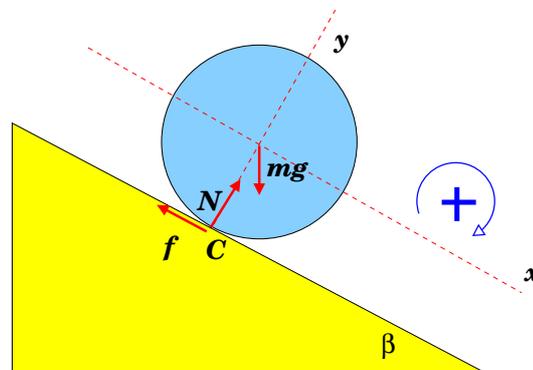
De forma muy general, la ecuación de torques (1) es válida cuando ellos se evalúan con respecto a un eje instantáneamente en reposo (*eje instantáneo de rotación*), siendo el momento de inercia

evaluado con respecto a ese eje. Por lo tanto podemos aplicarla a una rueda que rota sin resbalar, donde el punto de contacto está instantáneamente en reposo. Así,

$$\vec{\tau}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_C \vec{\alpha}. \quad (2)$$

## 0.2. Rueda sobre plano inclinado

Estudiemos el caso de una rueda de masa  $M$  y radio  $R$  rodando sobre un plano inclinado con roce. No hay resbalamiento (gracias al roce), de modo que el punto de la rueda en contacto con el piso está instantáneamente en reposo. Denotamos ese punto por 'C'. Denominando 'objeto' a la rueda, entonces las fuerzas externas actuando sobre ella son:



1. Peso (magnitud  $Mg$  hacia abajo)
2. Fuerza de contacto, que descomponemos en normal (componente  $N \perp$  al plano inclinado) y fuerza de roce (componente  $f$  a lo largo del plano).

Podemos escribir la ecuación para el movimiento traslacional del centro de masas (CM),  $\vec{F} = M\vec{a}$ , donde  $\vec{a}$  representa la aceleración del centro de masas de la rueda. Para este ejemplo específico,

$$M\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} = M\vec{a},$$

que proyectadas según los ejes  $\hat{x}$  e según  $\hat{y}$  conducen a

$$Mg \sin \beta - f = Ma_x \quad (3)$$

$$-Mg \cos \beta + N = 0 \rightarrow N = Mg \cos \beta, \quad (4)$$

quedándonos 2 incógnitas ( $f$  y  $a_x$ ), pero sólo 1 ecuación.

**ADVERTENCIA:** la igualdad  $f = \mu N$  es válida sólo en el límite del resbalamiento. Cuando ello no se especifica, entonces se está en el régimen  $f < \mu N$ . Se trata de una desigualdad, por lo que  $f$  y  $N$  se deben manejar como variables independientes.

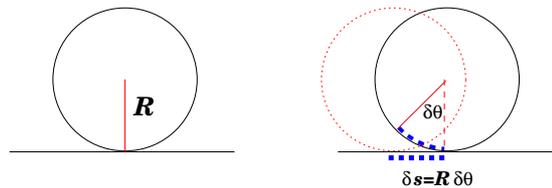
Ahora, si aplicamos la ecuación de torques con respecto al punto de contacto, es fácil verificar

$$\tau_C(M\vec{g}) + \tau_C(\vec{f}) + \tau_C(\vec{N}) = I_C\alpha \quad \rightarrow \quad MgR \sin \beta = I_C\alpha$$

### 0.3. Consideraciones geométricas

En el caso de una rueda que rota sin resbalar sobre una superficie, el desplazamiento de su centro se relaciona de forma muy simple con la rotación angular que experimenta. Para fijar ideas, en la figura de más abajo se ilustra una rueda de radio  $R$  en contacto con una superficie rectilínea. Al desplazar el centro de la rueda en  $\delta x$ , esta rota angularmente en  $\delta\theta$ . La huella impresa sobre la superficie coincide con el arco  $R\delta\theta$ . Así,

$$\delta x = R\delta\theta$$



Si estas variaciones transcurren en un lapso  $\delta t$ , entonces

$$\frac{\delta x}{\delta t} = R \frac{\delta\theta}{\delta t},$$

de modo que al tomar el límite  $\delta t \rightarrow 0$ ,

$$v = R\omega.$$

La velocidad  $v$  (instantánea) corresponde a la de traslación de su centro. Derivando ambos términos de la igualdad obtenemos

$$a = R\dot{\omega} = R\alpha$$

## RESOLUCION DEL PROBLEMA DE LA RUEDA.

Resumimos para el ejemplo de la rueda de masa  $M$  y radio  $R$ , que rueda sin resbalar sobre un plano inclinado en un ángulo  $\beta$  con respecto a la horizontal. Hemos encontrado cuatro relaciones que determinan completamente su movimiento:

$$Mg \sin \beta - f = Ma_x \quad \text{movimiento según } x \quad (5)$$

$$-Mg \cos \beta + N = 0 \quad \text{movimiento según } y \quad (6)$$

$$MgR \sin \beta = I_C \alpha \quad \text{movimiento de rotación} \quad (7)$$

$$a_x = R\alpha \quad \text{restricción de no resbalamiento} \quad (8)$$

Si queremos obtener  $a_x$ , de la Ec. (7) se tiene que  $\alpha = MgR \sin \beta / I_C$ , que sustituida en la Ec. (8) nos da para  $a_x$

$$a_x = g \frac{MR^2}{I_C} \sin \beta .$$

Recordar que  $I_C$  es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el punto de contacto. Si denotamos por  $I_{CM}$  al momento de inercia que pasa por el centro de masas de la rueda, entonces el teorema de Steiner nos permite afirmar que  $I_C = MR^2 + I_{CM}$ . Con lo anterior,

$$a_x = \frac{g \sin \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} .$$

Un par de alcances destacables sobre este resultado

- Notar que la aceleración del centro de masas es constante, de modo que su velocidad asociada se relaciona con el desplazamiento mediante

$$v^2 - v_0^2 = 2a_x \Delta x .$$

- Notese que si  $I_{CM} = 0$ , se obtiene el resultado conocido para un cuerpo resbalando sin roce:  $a_x = g \sin \beta$ . ¿Es esto razonable?.
- La ecuación (5) para el roce  $f$  sugiere una aceleración límite (¿máxima o mínima?) que garantice no resbalamiento. Se deja propuesto determinar el ángulo  $\beta$  máximo que garantice que la rueda no resbala.
- Una esfera maciza tiene un momento de inercia  $2MR^2/5$  con respecto a un eje que pasa por su centro. Verifique que en tal caso

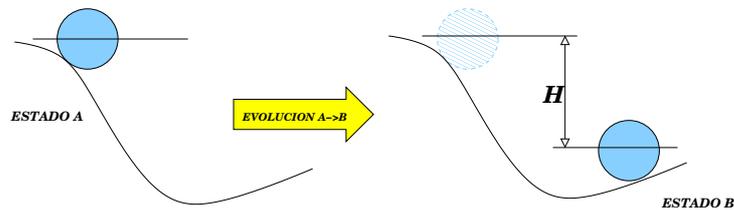
$$a_x = (5/7)g \sin \beta \approx 0.71g \sin \beta .$$

Se deja propuesto comparar este resultado con un disco y un aro.

- La caída de un 'yo-yo' es una extensión natural del problema de la rueda: hacer  $\beta \rightarrow \pi/2$ , sustituir  $f \rightarrow T$ , la tensión del cordel del yo-yo. En este caso se propone calcular la tensión del cordel.

#### 0.4. Energía en rodadura perfecta

Si la rueda está en una configuración A y evoluciona a otra B, entonces la diferencia de energía cinética entre los dos estados es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas en la evolución.



Considerando la energía mecánica  $E$  como la suma de la cinética  $K$  y potencial gravitacional  $U_g$ , entonces

$$(K + U_g)_B = (K + U_g)_A + W_{A \rightarrow B}(\text{resto de las fuerzas})$$

donde  $W_{A \rightarrow B}$  (resto de las fuerzas) corresponde al trabajo en la evolución  $A \rightarrow B$  de todas las fuerzas que no sean gravitatorias. En el caso particular de la rueda sobre el plano inclinado hay tres fuerzas a considerar:

- El peso: ya incluido en el término de energía potencial;
- La normal: no trabaja, es decir  $W_{A \rightarrow B}(\text{normal}) = 0$ ;
- El roce: no trabaja puesto que no hay deslizamiento mutuo entre la rueda y el piso, con lo cual  $W_{A \rightarrow B}(\text{roce}) = 0$ .

Con lo anterior podemos escribir

$$K_B = K_A + MgH \quad (9)$$

La energía cinética en cada caso se puede obtener considerando el movimiento de la rueda como de rotación pura en torno al punto de contacto, es decir

$$K = \frac{1}{2} I_C \omega^2 .$$

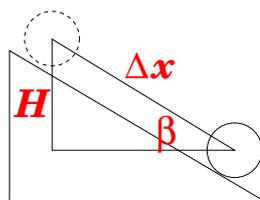
Podemos obtener  $I_C$  utilizando el teorema de Steiner,  $I_C = MR^2 + I_{CM}$ , con lo cual

$$\omega_B^2 = \omega_A^2 + \frac{2MgH}{MR^2 + I_{CM}} .$$

Nuevamente imponemos la condición de rodadura sin resbalamiento,  $v_B = \omega_B R$ ,  $v_A = \omega_A R$ , con lo cual

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2MgH}{MR^2 + I_{CM}} = v_A^2 + 2 \left( \frac{g \sin \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} \right) \Delta x .$$

En esta última hemos usado  $H = \Delta x \sin \beta$  (ver figura de más abajo).



De esta última relación inferimos por simple inspección que la aceleración lineal del centro de la rueda es

$$a_x = \frac{g \sin \beta}{1 + I_{CM}/MR^2},$$

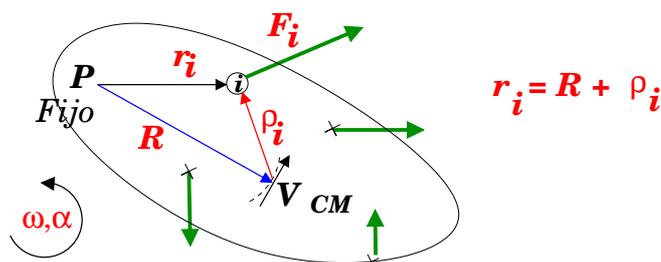
coincidente con la obtenida mediante la aplicación directa de las leyes de Newton. Era un resultado exigible, dado que la relación energía-trabajo se obtiene de las mismas leyes.

### 0.5. Comentarios sobre la relación $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Hasta ahora hemos aplicado la relación  $\vec{\tau}_P = I_P\vec{\alpha}$  a todo punto  $P$  instantáneamente en reposo. Sin embargo, como veremos a continuación, esta relación también se puede aplicar cuando  $P$  coincide con el centro de masas del sólido. Por lo tanto,

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha}.$$

En la figura de más abajo se esquematiza un sólido con eje instantáneo de rotación en  $P$ . Las  $N$  fuerzas externas se representan por los vectores de color verde y se rotulan mediante subíndices  $i$ , con  $i = 1, \dots, N$ .



1. Denotamos por  $\vec{R}$  la ubicación del CM con respecto a  $P$ .
2. En torno a  $P$ , el CM describe un arco infinitesimal de circunferencia. Su velocidad  $\vec{V}$  es perpendicular a  $\vec{R}$ . Se comprueba que  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ .
3. Puesto que el centro de masas describe (entre  $t$  y  $t + \delta t$ ) un arco de circunferencia, su aceleración tendrá dos componentes: una radial (según  $-\hat{R}$ ) proporcional a  $V^2/R$ , y otra tangencial (perpendicular a  $\hat{R}$  y a  $\omega$ ) de valor  $\alpha R$ . Entonces,

$$\vec{a} = -\frac{V^2}{R}\hat{R} + \vec{\alpha} \times \vec{R}. \quad (10)$$

4. Si rotulamos con  $\{1, \dots, i, \dots, N\}$  los puntos de aplicación de las  $N$  fuerzas externas sobre el sólido, y por  $\vec{R}$  al vector que une  $P$  con CM, entonces

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i.$$

Aquí  $\vec{r}_i$  localiza  $i$  con respecto a  $P$ , y  $\vec{\rho}_i$  al mismo punto con respecto a CM.

5. La ecuación de torques, con respecto a  $P$ , se escribe

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = I_P \vec{\alpha} \quad (11)$$

6. Sustituyendo  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i$ , y reagrupando términos,

$$\vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = I_P \vec{\alpha}$$

7. Claramente  $\vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = \vec{\tau}_{CM}$ , el torque neto con respecto a CM. Además de lo anterior, reconocemos  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = M\vec{a}$ , con  $\vec{a}$  la aceleración del CM. Sustituyendo en (11) obtenemos

$$\vec{\tau}_{CM} + \vec{R} \times (M\vec{a}) = I_P \vec{\alpha} .$$

8. Al reemplazar  $\vec{a}$  de la Ec. (10), usando que  $\vec{R} \times \hat{R} = 0$ , se tiene

$$\vec{\tau}_{CM} + \vec{R} \times (M\vec{\alpha} \times \vec{R}) = I_P \vec{\alpha} .$$

9. Se pide que verifique la identidad  $\vec{R} \times (M\vec{\alpha} \times \vec{R}) = MR^2\vec{\alpha}$ , con la cual

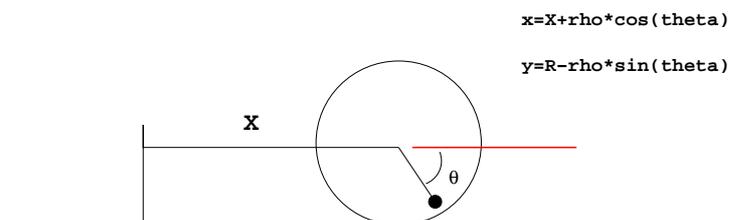
$$\vec{\tau}_{CM} = \underbrace{(I_P - MR^2)}_{I_{CM}} \vec{\alpha} ,$$

vale decir,

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM} \vec{\alpha} .$$

## 0.6. Apéndice

Una aplicación MatLab interesante es dibujar la trayectoria de los puntos de una rueda cuando este rueda sin resbalar.



Si tomamos el eje  $x$  la dirección del movimiento del centro de la rueda, y el ángulo  $\theta$  creciente en el sentido horario, entonces podemos decir que las coordenadas  $(X, Y)$  del centro del disco quedan descritas mediante

$$X = R\theta, \quad Y = R .$$

Esta construcción garantiza que para  $\theta = 0$ , el centro de la rueda se ubica en  $(0, R)$ . Las coordenadas  $(x, y)$  de un punto P en la rueda está dada simplemente por

$$x = X + \rho \cos \theta \quad (12)$$

$$y = R - \rho \sin \theta . \quad (13)$$

Si dividimos ambas igualdades por  $R$  y denotamos  $h \equiv \rho/R$ , entonces

$$x_R \equiv x/R = \theta + h \cos \theta \quad (14)$$

$$y_r \equiv y/R = 1 - h \sin \theta , \quad (15)$$

con  $0 \leq h \leq 1$ . Juegue con la siguiente rutina MatLab, modificándola a gusto, para visualizar lo que resulta. Al hacer  $h = 0$  se está identificando el centro de la rueda, cuya trayectoria debiera ser recta. Al hacer  $h = 1$  se identifica un punto en la periferia de la rueda. Cualquier valor intermedio identificará puntos al interior de la rueda.

```
theta_a=0; theta_b=6*pi; dtheta=pi/30;
theta=theta_a:dtheta:theta_b;
h=1;
xr=theta+h*cos(theta);
yr=1-h*sin(theta);
plot(xr,yr)
axis([0,theta_b,0,3]);
```

Referencias:

La rodadura perfecta de un cuerpo rígido se presentan en

- Sección 11,1 del libro *Física* de Serway, Tomo I, 3ra edición.
- Secciones 9.7 del libro *Física para la Ciencia y Tecnología* de Tipler.
- Secciones VI.7 del libro *Introducción a la Mecánica* de N. Zamorano.