

Pauta Ejercicio 1 Sistemas Newtonianos

Tarea Nº 2
Publicada el 2 de Septiembre de 2008

Profesor: Álvaro Núñez
Auxiliar: Sebastián³

1. Pauta Ejercicio 1

Ejercicio 1

Solución

1. La energía potencial de un resorte es $\frac{1}{2}kx^2$. Por otro lado, la energía cinética es simplemente $\frac{1}{2}mv^2$. Dado que el momentum es $p = mv$, tenemos:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (1)$$

En equilibrio, el resorte se encuentra sin extensión de modo que $x = 0$ y $v = 0$. La energía total es 0.

2. Dado que toda medición tiene errores debemos considerar que:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \quad (2)$$

$$p = \langle p \rangle \pm \Delta p. \quad (3)$$

con $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ y $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$. Como en equilibrio el valor promedio $\langle x \rangle$ y $\langle p \rangle$ son cero, tenemos:

$$\langle x^2 \rangle = (\Delta x)^2 \quad (4)$$

$$\langle p^2 \rangle = (\Delta p)^2. \quad (5)$$

Ahora, los valores promedios de la energía corresponden a los valores promedio:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}k\langle x^2 \rangle. \quad (6)$$

Usando la relación encontrada previamente, tenemos:

$$\langle E \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2. \quad (7)$$

3. Dado que $\Delta x \Delta p > \hbar/2$, tenemos:

$$\langle E \rangle > \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2. \quad (8)$$

El lado derecho puede ser minimizado usando, simplemente, una derivada respecto a $(\Delta x)^2$:

$$\frac{d}{d(\Delta x^2)} \left(\frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \right) = 0 \quad (9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^4} + \frac{1}{2}k = 0 \quad (10)$$

de donde obtenemos:

$$(\Delta x)_{\text{optimo}}^2 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{mk}} \quad (11)$$

Notemos que evidentemente, la segunda derivada es positiva. Obtenemos:

$$\langle E \rangle > \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12)$$