

Sistemas Newtonianos

Unidad 4B

Sólidos rígidos: Energía de Rotación

Rodrigo Soto

Departamento de Física, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2008

$$\partial f_l$$

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Temario

- Conservación de energía para una partícula
- Conservación de energía en un sólido rígido en rotación
 - Momento de inercia
 - Energía potencial
- Ejemplo
- Teoremas para momentos de inercia
- Práctica

Conservación de energía para una partícula

En el caso de una partícula se vio en Fl100 que

$$\Delta K = K_B - K_A = W_{A \rightarrow B}$$

donde

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{energía cinética}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad \text{trabajo mecánico}$$

Donde $\vec{F}$ incluye a todas las fuerzas (conservativas y no conservativas).

Conservación de energía para una partícula

Si hay fuerzas conservativas y no conservativas: $\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}$

Las fuerzas conservativas cumplen

$$W_{C,A \rightarrow B} = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = -(U_B - U_A)$$

donde U es la **energía potencial de la fuerza**.

Luego el teorema de energía trabajo se escribe

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = W_{NC,A \rightarrow B}$$

Se define la **energía mecánica**

$$E = K + U$$

Y se tiene el teorema de conservación de energía

$$\Delta E = E_B - E_A = W_{NC,i \rightarrow f}$$

La energía sólo varía cuando hay fuerzas no conservativas que hacen trabajo.

Conservación de energía para una partícula

Si hay fuerzas conservativas y no conservativas: $\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}$

Las fuerzas conservativas cumplen

$$W_{C,A \rightarrow B} = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = -(U_B - U_A)$$

donde U es la **energía potencial de la fuerza**.

Luego el teorema de energía trabajo se escribe

$$\begin{aligned} K_B - K_A &= W_{A \rightarrow B} \\ &= W_{C,A \rightarrow B} + W_{NC,A \rightarrow B} \\ &= -(U_B - U_A) + W_{NC,A \rightarrow B} \\ (K_B + U_B) - (K_A + U_A) &= W_{NC,A \rightarrow B} \end{aligned}$$

Se define la **energía mecánica**

$$E = K + U$$

Y se tiene el teorema de conservación de energía

Conservación de energía para una partícula

Si hay fuerzas conservativas y no conservativas: $\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}$

Las fuerzas conservativas cumplen

$$W_{C,A \rightarrow B} = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = -(U_B - U_A)$$

donde U es la **energía potencial de la fuerza**.

Luego el teorema de energía trabajo se escribe

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = W_{NC,A \rightarrow B}$$

Se define la **energía mecánica**

$$E = K + U$$

Y se tiene el teorema de conservación de energía

$$\Delta E = E_B - E_A = W_{NC,i \rightarrow f}$$

La energía sólo varía cuando hay fuerzas no conservativas que hacen trabajo.

Conservación de energía para una partícula

Si hay fuerzas conservativas y no conservativas: $\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}$

Las fuerzas conservativas cumplen

$$W_{C,A \rightarrow B} = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = -(U_B - U_A)$$

donde U es la **energía potencial de la fuerza**.

Luego el teorema de energía trabajo se escribe

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = W_{NC,A \rightarrow B}$$

Se define la **energía mecánica**

$$E = K + U$$

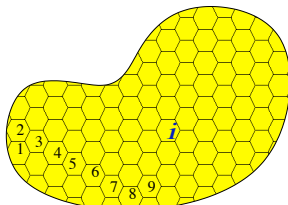
Y se tiene el teorema de conservación de energía

$$\Delta E = E_B - E_A = W_{NC,i \rightarrow f}$$

La energía sólo varía cuando hay fuerzas no conservativas que hacen trabajo.

Energía en un sólido rígido

El sólido se considera formado por muchos elementos pequeños de masa m_i , posición $\vec{r}_i$ y velocidad $\vec{v}_i$; $i = 1, 2, \dots, N$.



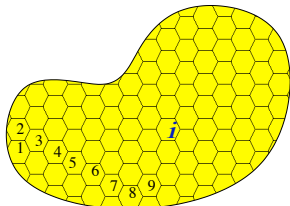
Sobre cada elemento actúan las fuerzas internas y las fuerzas externas (gravedad, normales, roce, tensión, etc.)

En un sólido rígido las fuerzas internas no hacen trabajo

Demotración:

Energía en un sólido rígido

El sólido se considera formado por muchos elementos pequeños de masa m_i , posición $\vec{r}_i$ y velocidad $\vec{v}_i$; $i = 1, 2, \dots, N$.



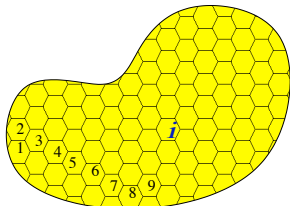
Sobre cada elemento actúan las fuerzas internas y las fuerzas externas (gravedad, normales, roce, tensión, etc.)

En un sólido rígido las fuerzas internas no hacen trabajo

Demotración:

Energía en un sólido rígido

El sólido se considera formado por muchos elementos pequeños de masa m_i , posición $\vec{r}_i$ y velocidad $\vec{v}_i$; $i = 1, 2, \dots, N$.



Sobre cada elemento actúan las fuerzas internas y las fuerzas externas (gravedad, normales, roce, tensión, etc.)

En un sólido rígido las fuerzas internas no hacen trabajo

Demotración:

Energía en un sólido rígido

Supongamos que la única fuerza externa conservativa es la gravedad
Para cada partícula

$$\Delta(K_i + m_i g z_i) = W_{NC,A \rightarrow B}^i$$

donde $W_{NC,A \rightarrow B}^i$ sólo incluye a las **fuerzas externas no conservativas**.

Sumando sobre todo el sistema

$$\begin{aligned}\sum_i \Delta(K_i + m_i g z_i) &= \sum_i W_{NC,A \rightarrow B}^i \\ \Delta\left(\sum_i K_i\right) + \Delta(MgZ) &= W_{NC,A \rightarrow B}^{\text{total}} \\ \Delta K + Mg\Delta Z &= W_{NC,A \rightarrow B}^{\text{total}}\end{aligned}$$

Energía en un sólido rígido

Supongamos que la única fuerza externa conservativa es la gravedad
Para cada partícula

$$\Delta(K_i + m_i g z_i) = W_{NC,A \rightarrow B}^i$$

donde $W_{NC,A \rightarrow B}^i$ sólo incluye a las **fuerzas externas no conservativas**.

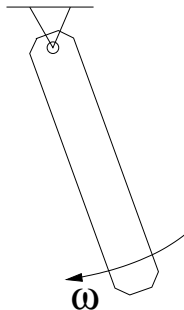
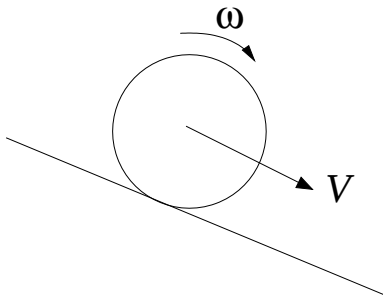
Sumando sobre todo el sistema

$$\begin{aligned}\sum_i \Delta(K_i + m_i g z_i) &= \sum_i W_{NC,A \rightarrow B}^i \\ \Delta\left(\sum_i K_i\right) + \Delta(MgZ) &= W_{NC,A \rightarrow B}^{\text{total}} \\ \Delta K + Mg\Delta Z &= W_{NC,A \rightarrow B}^{\text{total}}\end{aligned}$$

Dinámica plana de un sólido rígido

Movimiento plano

- La velocidad del sólido está en un plano (movimiento bidimensional)
- Eje de rotación es perpendicular al plano de movimiento.



Dinámica plana de un sólido rígido

Se tiene **un punto fijo O**.

La distancia de cada partícula al punto fijo es constante ρ_i .

Movimiento circular de ese radio en torno al punto fijo.

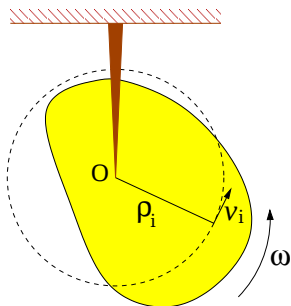
Velocidad de cada partícula $\mathbf{v}_i = \rho_i \boldsymbol{\omega}$
perpendicular al vector posición

La energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_I \right) \omega^2 \end{aligned}$$

$$K = I \omega^2 / 2$$

Se define el **momento de inercia, I**



Dinámica plana de un sólido rígido

Se tiene **un punto fijo O**.

La distancia de cada partícula al punto fijo es constante ρ_i .

Movimiento circular de ese radio en torno al punto fijo.

Velocidad de cada partícula $\mathbf{v}_i = \rho_i \boldsymbol{\omega}$
perpendicular al vector posición

La energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_I \right) \omega^2 \end{aligned}$$

$$K = I \omega^2 / 2$$

Se define el **momento de inercia, I**

Dinámica plana de un sólido rígido

Se tiene **un punto fijo O**.

La distancia de cada partícula al punto fijo es constante ρ_i .

Movimiento circular de ese radio en torno al punto fijo.

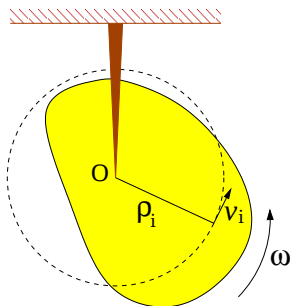
Velocidad de cada partícula $\mathbf{v}_i = \rho_i \boldsymbol{\omega}$
perpendicular al vector posición

La energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_I \right) \omega^2 \end{aligned}$$

$$K = I \omega^2 / 2$$

Se define el **momento de inercia, I**



Momento de inercia

El momento de inercia

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2$$

es una propiedad que depende de:

- el cuerpo (depende de la masa y su distribución espacial)
- del eje en torno al cual rota.

El momento de inercia es aditivo

Ej: “Cruceta” de la práctica de hoy

Momento de inercia

El momento de inercia

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2$$

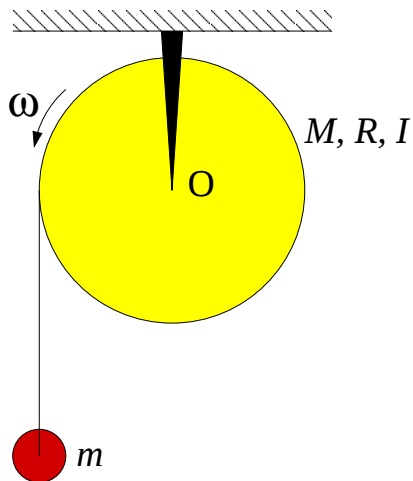
es una propiedad que depende de:

- el cuerpo (depende de la masa y su distribución espacial)
- del eje en torno al cual rota.

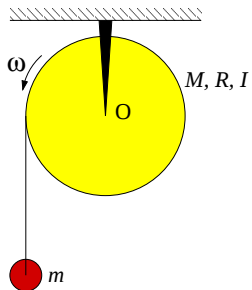
El momento de inercia es aditivo

Ej: “Cruceta” de la práctica de hoy

Ejemplo



Ejemplo



Propiedades del momento de inercia

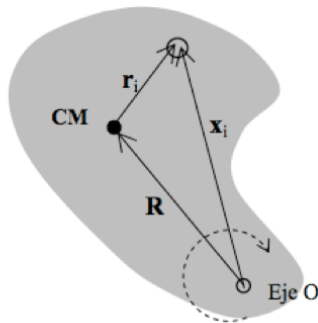
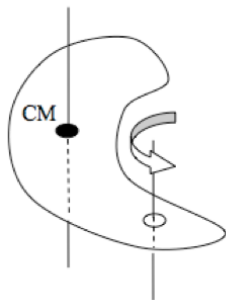
El momento de inercia depende del eje en torno al cual gira.
Eso lo hace complejo de analizar

Solución: Teorema de Steiner.

Propiedades del momento de inercia

El momento de inercia depende del eje en torno al cual gira.
Eso lo hace complejo de analizar

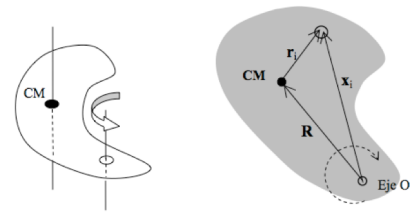
Solución: Teorema de Steiner.



Propiedades del momento de inercia

El momento de inercia depende del eje en torno al cual gira.
Eso lo hace complejo de analizar

Solución: Teorema de Steiner.

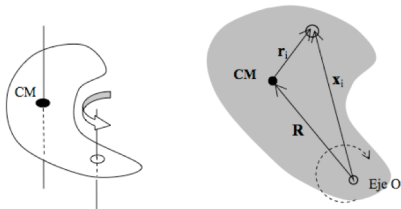


$$\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$$

Propiedades del momento de inercia

El momento de inercia depende del eje en torno al cual gira.
Eso lo hace complejo de analizar

Solución: Teorema de Steiner.



$$\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$$

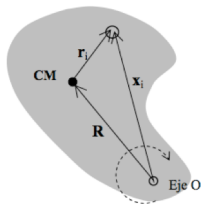
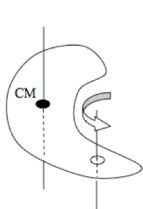
Los momentos de inercia

$$I_O = \sum m_i x_i^2; \quad I_{cm} = \sum m_i r_i^2$$

Propiedades del momento de inercia

El momento de inercia depende del eje en torno al cual gira.
Eso lo hace complejo de analizar

Solución: Teorema de Steiner.



$$\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$$

Los momentos de inercia

$$I_O = \sum m_i x_i^2; \quad I_{cm} = \sum m_i r_i^2$$

$$I_O = I_{cm} + MR^2$$

Propiedades del momento de inercia

El teorema de Steiner permite calcular el momento de inercia respecto a cualquier eje si se conoce el momento de inercia respecto al centro de masa.

Momentos de inercia respecto al centro de masa	
Disco	$\frac{1}{2}MR^2$
Aro	MR^2
Esfera llena	$\frac{2}{5}MR^2$
Cascarón esférico	$\frac{3}{5}MR^2$
Barra	$\frac{1}{12}ML^2$

Ejemplo de la clase antepasada

El momento de inercia de una barra respecto a su centro es
 $I = ML^2/2$.

¿Cuánto mide respecto a un extremo?

$$\begin{aligned}I_{\text{extremo}} &= I_O + M(L/2)^2 \\&= ML^2/12 + ML^2/4 \\I_{\text{extremo}} &= ML^2/3\end{aligned}$$

Por lo tanto, si gira respecto a su extremo tiene más energía que si gira respecto a su centro.

Ejemplo de la clase antepasada

El momento de inercia de una barra respecto a su centro es
 $I = ML^2/2$.

¿Cuánto mide respecto a un extremo?

$$\begin{aligned}I_{\text{extremo}} &= I_O + M(L/2)^2 \\&= ML^2/12 + ML^2/4 \\I_{\text{extremo}} &= ML^2/3\end{aligned}$$

Por lo tanto, si gira respecto a su extremo tiene más energía que si gira respecto a su centro.

Ejemplo de la clase antepasada

El momento de inercia de una barra respecto a su centro es
 $I = ML^2/2$.

¿Cuánto mide respecto a un extremo?

$$\begin{aligned}I_{\text{extremo}} &= I_O + M(L/2)^2 \\&= ML^2/12 + ML^2/4 \\I_{\text{extremo}} &= ML^2/3\end{aligned}$$

Por lo tanto, si gira respecto a su extremo tiene más energía que si gira respecto a su centro.

Preliminares

- Tomar películas con formato de 320x200 pixeles
- ¿Cuántos cuadros por segundo efectivamente mide la cámara?
En principio son 30 imágenes por segundo
Ejemplo: tomar un video durante 10s y contar el número de cuadros.
- ¿Cómo lograr que sean reproducibles las condiciones iniciales?
papel, regla, esquina, ...
- Atención que la posición del CM depende de la posición x de la “crucecita”

Preliminares

- Tomar películas con formato de 320x200 pixeles
- ¿Cuántos cuadros por segundo efectivamente mide la cámara?
En principio son 30 imágenes por segundo
Ejemplo: tomar un video durante 10s y contar el número de cuadros.
- ¿Cómo lograr que sean reproducibles las condiciones iniciales?
papel, regla, esquina, ...
- Atención que la posición del CM depende de la posición x de la “crucecita”

Preliminares

- Tomar películas con formato de 320x200 pixeles
- ¿Cuántos cuadros por segundo efectivamente mide la cámara?
En principio son 30 imágenes por segundo
Ejemplo: tomar un video durante 10s y contar el número de cuadros.
- ¿Cómo lograr que sean reproducibles las condiciones iniciales?
papel, regla, esquina, ...
- Atención que la posición del CM depende de la posición x de la “crucecita”

Preliminares

- Tomar películas con formato de 320x200 pixeles
- ¿Cuántos cuadros por segundo efectivamente mide la cámara?
En principio son 30 imágenes por segundo
Ejemplo: tomar un video durante 10s y contar el número de cuadros.
- ¿Cómo lograr que sean reproducibles las condiciones iniciales?
papel, regla, esquina, ...
- Atención que la posición del CM depende de la posición x de la “cruzeta”