Pauta Ejercicio 2
Sistemas Newtonianos

Tarea Nº 2
Publicada el 2 de Septiembre de 2008

Profesor: Álvaro Nuñez
Auxiliar: Sebastián[3]

1. Pauta Ejercicio 2

Ejercicio 2

Solución

1. Como los cuatro triángulos que debemos considerar son semejantes nos centraremos en el estudio de uno solo. Un triángulo rectángulo queda completamente determinado por su hipotenusa y el ángulo que esta forma con alguno de los catetos. Usando el sistema de referencia de la figura, fijando tanto c como α el triángulo queda completamente determinado. Ahora, la posición del centro de masas (X, Y), debe también quedar determinado por dichas variables. Tenemos, entonces, que:

$$X = X(c, \alpha) \tag{1}$$
$$Y = Y(c, \alpha) \tag{2}$$

Usando análisis dimensional obtenemos, simplemente: $X = c \times f(\alpha)$ y $Y = c \times g(\alpha)$ donde f y g son funciones adimensionales de α. Si dividimos todos los lados del triángulo por la mitad, el ángulo α no cambia. De modo que la posición del CM corresponde a $(X/2, Y/2)$.

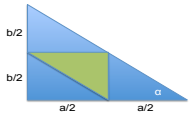

Figura 1: El triángulo se divide en 4 partes iguales.

2. Ahora podemos simplemente evaluar los CM de cada uno de los triángulos que componen el triángulo grande. Para el primero ya lo hemos evaluado:

$$\mathrm{CM}_1 = \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right). \tag{3}$$

El segundo es simplemente el primero desplazado hacia la derecha por $a/2$:

$$\mathrm{CM}_2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right), \tag{4}$$

mientras que el tercero es el primero desplazado hacia arriba por $b/2$:

$$\mathrm{CM}_3 = \left(\frac{X}{2}, \frac{b}{2} + \frac{Y}{2}\right). \tag{5}$$

Por último, el cuarto esta invertido y desplazado hacia $(a/2, b/2)$

$$\mathrm{CM}_4 = \left(\frac{a}{2} - \frac{X}{2}, \frac{b}{2} - \frac{Y}{2}\right). \tag{6}$$

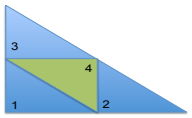

Figura 2: Enumeración de los triángulos.

3. El CM del todo es el CM de las partes (propiedad mágica). Como cada triángulo tiene un cuarto de la masa tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{CM} &= \frac{\frac{M}{4}\mathrm{CM}_1 + \frac{M}{4}\mathrm{CM}_2 + \frac{M}{4}\mathrm{CM}_3 + \frac{M}{4}\mathrm{CM}_4}{M} && (7)\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{CM}_1 + \mathrm{CM}_2 + \mathrm{CM}_3 + \mathrm{CM}_4\right) && (8) \end{aligned}$$

usando la parte anterior, tenemos,

$$\mathrm{CM} = \frac{1}{4}\left(a + X, b + Y\right) \tag{9}$$

pero sabemos que el CM es (X, Y), de modo que:

$$(X, Y) = \frac{1}{4}\left(a + X, b + Y\right) \tag{10}$$

Obteniendo:

$$(X, Y) = \frac{1}{3}\left(a, b\right). \tag{11}$$

4. FInalmente, consideremos un triángulo cualquiera. Trazando una altura h desde un vértice, dividimos el lado opuesto en dos partes, sean estas λ y γ. Fijando el origen en el punto de intersección entre la altura y dicho lado, tenemos que el triángulo de la derecha tiene su CM en $(\gamma/3, h/3)$, mientras que el CM de la izquierda en $(-\lambda/3, h/3)$. Las masas son proporcionales al área de cada triángulo. El de la derecha tiene área $h\gamma/2$ y el de la izquierda $h\lambda/2$. El área total es $h(\lambda+\gamma)/2$. El CM del trángulo es el CM de sus partes (¡propiedad mágica!):

$$\begin{aligned} \mathrm{CM} &= \frac{M_1\mathrm{CM}_1 + M_2\mathrm{CM}_2}{M_1 + M_2} && (12)\\ &= \frac{\frac{h\gamma}{2} \times \left(\frac{\gamma}{3}, \frac{h}{3}\right) + \frac{h\lambda}{2} \times \left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{h}{3}\right)}{\frac{h(\lambda+\gamma)}{2}} && (13)\\ &= \frac{1}{3}\left(\gamma - \lambda, h\right) && (14) \end{aligned}$$

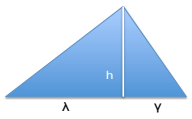

Figura 3: Triángulo general