FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

GUIA TEORICA
Unidad 4B: Energía Cinética de Rotación
Profs: H. Arellano, D. Mardones, N. Mujica
Semestre 2008-1

---

1. Conservación de la Energía para una Partícula

En el contexto de la mecánica Newtoniana el principio de Conservación de Energía para una partícula se deriva directamente de la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), de donde se obtiene el teorema del trabajo-energía: el trabajo neto realizado por las fuerzas externas actuando sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la propia part]ícula:

$$W_{neto} = K_f - K_i \tag{1}$$

donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética y el trabajo de una fuerza $\vec{F}$ en un pequeño intervalo $\vec{dx}$ se evalúa como $dW = \vec{F}\vec{dx}$ (se emplea el producto punto). Los subíndices i y f se refieren a la una condición inicial y final, respectivamente. El trabajo neto corresponde a la suma de los trabajos individuales de cada fuerza.

La evaluación del trabajo neto requiere "integrar"(es decir, sumar con mucho detalle) los dW entre una posición inicial y otra final a lo largo de la trayectoria de la partícula. Sin embargo, existen fuerzas en que el trabajo neto NO depende del camino recorrido sino que exclusivamente de la posición inicial y final de la partícula. Estas fuerzas se denominan conservativas e incluyen al peso y la fuerza elástica. En contraste, la fuerza de roce entre una partícula y una superficie (usualmente escrita como $-\mu_c N$) no es conservativa.

Como para una fuerza conservativa, Fc, el trabajo efectuado es solo función de las coordenadas, se puede definir una función de energía potencial, U, tal que el trabajo realizado es igual a la disminución en la energa potencial:

$$W_c = \int \vec{F}\vec{dx} = -\Delta U = U_i - U_f \tag{2}$$

Consideremos que sobre una partícula solo actúa una fuerza conservativa $\vec{F_c}$. Entonces, combinando (1) y (2) obtenemos que $\Delta K = W_c = -\Delta U$, de donde:

$$\Delta(K + U) = 0 \tag{3}$$

que es una forma de escribir la ley de la conservación de la energa mecánica. Podemos además definir la energía mecánica total del sistema como $E \equiv K + U$.

Como E permanece constante a medida que la partícula se desplaza, cualquier cambio de la energía cinética ocurre a expensas de igual cambio (pero de signo opuesto) en la energía potencial. Si sobre el sistema actúa más de una fuerza conservativa y otras fuerzas no-conservativas ($\vec{F_{nc}}$, como el roce), obtenemos una ecuación más general:

$$\sum W(\vec{F_{nc}}) = \Delta(K + \sum U) \tag{4}$$

La ecuación (4) puede ser aplicada en la resolución de numerosos problemas de dinámica, en especial cuando $\sum W(\vec{F_{nc}}) \sim 0$. En estos casos debe conocerse completamente el estado de la partcula (posición y velocidad) en un instante y se desconoce una de las variables de estado en un instante posterior.

Como mencionábamos anteriormente, tanto el peso como la fuerza elástica son fuerzas conservativas, y sus energías potenciales son $U_g = mgy$ y $U_e = \frac{1}{2}k\delta^2$, respectivamente. Aquí y corresponde a la altura sobre un nivel de referencia (arbitrario pero fijo). Si la partícula está sobre (bajo) ese nivel $y \geq 0$ ($y \leq 0$). δ representa la deformación (compresión o deformación) de un resorte adherido a la partícula. g es la magnitud de la aceleración de gravedad y k la constante elástica del resorte.

Ejemplo: Un objeto se suelta desde una altura H, ¿A qué velocidad impacta contra el suelo?

Solución: Despreciando el roce con el aire, podemos aplicar la conservación de energía mecánica entre el instante inicial (objeto se suelta desde el reposo) y final (objeto impacta el suelo):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg0$$

de donde obtenemos directamente

$$v_f = (2gH)^{\frac{1}{2}}$$

2. Conservación de la Energía para un Cuerpo Rígido

Veamos ahora como se aplica el principio de conservación de energía a un cuerpo rígido. Recordemos aquí que el cuerpo rígido puede trasladarse y rotar pero no sufre deformaciones de su forma (por eso es rígido). En consecuencia, la posición relativa entre las partículas que lo forman no cambia en el tiempo.

Cada partícula esta sometida a fuerzas externas (por ejemplo, el peso) y fuerzas internas (por ejemplo, las fuerzas que ejercen las partículas vecinas). Se puede demostrar que las fuerzas internas no realizan trabajo (recordar que las posiciones relativas no cambian), por lo que cada partícula conserva su energía mecánica de acuerdo a la ecuación (4).

Consideremos el caso simple en que la única fuerza externa es el peso. Entonces, para la partícula n-ésima (n de un total de N) podemos escribir: $\Delta(K_n + m_n g y_n) = 0$. En este caso el subíndice es el identificador de la partícula. Podemos sumar la expresión anterior para las N partículas y obtenemos:

$$\Delta(\sum K_n + \sum U_{ng}) = 0 \tag{5}$$

Energía Cinética de Rotación Si el cuerpo esta rotando con respecto a un eje fijo, todas la partículas tienen igual velocidad angular, ω , y la velocidad (lineal) de la partícula n-esima es $\rho_n\omega$, donde ρ_n es el radio de la orbita que describe la partícula entorno al eje de rotación. Entonces, la energía cinética del sistema resulta ser:

$$K = \sum K_n = \sum(\frac{1}{2}m_n v_n^2) = \frac{1}{2}\sum(m_n\rho_n^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{6}$$

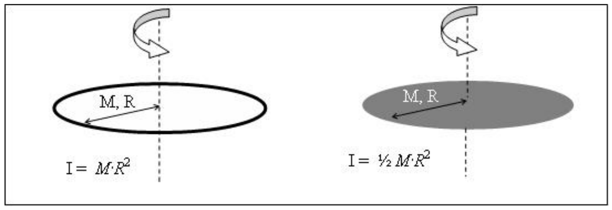


Figura 1: Momento de Inercia de un aro y un disco

La cantidad I se denomina Momento de Inercia, y es una propiedad del cuerpo que juega un papel de gran importancia en la dinámica de las rotaciones. Consideremos su definición $I = \sum(m_n \rho_n^2)$. Es claro que I crece con la masa total del cuerpo, pero depende críticamente de su forma y del eje de rotación. A igual masa, dos cuerpos pueden tener muy diferentes momentos de inercia en virtud de cuan cercana o lejana este la masa del eje de rotación.

3. El momento de Inercia

En general podemos expresar $I = \gamma M L^2$, donde M es la masa total del cuerpo, L es una dimensión característica (radio de un disco, largo de una barra) y γ un valor numérico que depende de cada caso. El valor de I es dependiente del eje en torno al cual ocurre la rotación del cuerpo. Para un cuerpo cuya forma sea relativamente simple, el valor de I se obtiene empleando cálculo integral. Para cuerpos aun más simples, I puede obtenerse aplicando la sumatoria anterior.

Por ejemplo, el momento de inercia de un anillo de material uniforme, masa M y radio R en torno a un eje que pasa por su centro es: $I = \sum(m_i r_i^2) = \sum(m_i R^2) = MR^2$

¿Qué pasa si la misma masa M se distribuye ahora en un disco de radio R? Muchas partículas que antes estaban en la periferia se mueven ahora hacia el centro del disco, haciendo disminuir el momento de inercia. De hecho, en este caso $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Propuesto: ¿Cuál es el valor de I si se trata de un cascarón cilíndrico o un cilindro sólido de radio R y masa M, que rota en torno a su eje de simetría?

Consideremos ahora el momento de inercia de una barra delgada de masa M y largo L que puede rotar en torno a uno de sus extremos. En este caso, el método de la sumatoria $I = \sum(m_i r_i^2)$ también funciona. Para eso la barra se divide en n trozos, cada uno de largo $d = \frac{L}{n}$ y masa $dm = \frac{M}{n}$. Al final de la sumatoria, se debe tomar el límite de $N \to \infty$(con lo cual d y $dm \to 0$). En el libro Introducción a la Mecánica (Nelson Zamorano) se hacen estas sumatorias en forma explicita (pags. 298-299), de donde $I_o = \frac{1}{3}ML^2$

El valor anterior es el momento de inercia de una barra respecto a su extremo. Que pasa si queremos calcular I de una barra respecto a su punto central? Aquí podemos explotar el hecho de que I es una propiedad aditiva, así que este nuevo momento de inercia se calcula como la suma de dos momentos de inercia: uno de la barra al lado derecho del centro y la otra al izquierdo (en este caso ambas son idénticas)

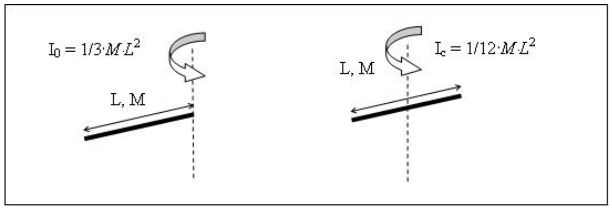


Figura 2: Momento de Inercia de una barra delgada

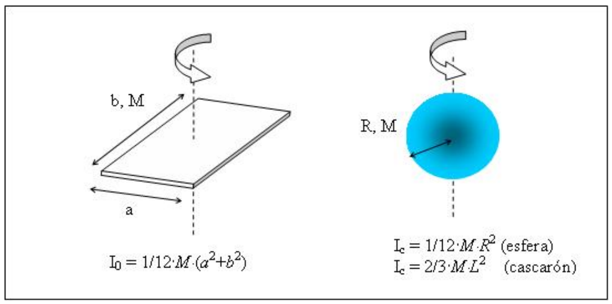


Figura 3: Momento de Inercia de una lámina, una esfera llena y un cascarón esférico

$$I_c = I_{izq} + I_{der} = 2I_o = 2[\frac{1}{3}\frac{M}{2}\frac{L}{2}^2] = \frac{1}{12}ML^2$$

Propuesto: Calcule el I de una barra en torno a un punto ubicado a $\frac{1}{4}$ de uno de sus extremos.

3.1. El centro de masa de un cuerpo rígido

Previamente definimos la posición del centro de masa de un sistema extendido como:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i} \tag{7}$$

Todos los vectores posición están referidos a un origen O de un sistema de referencia, por lo cual $\vec{R}$ cambia de si el cuerpo se mueve o rota. Sin embargo, el centro de masa, como un punto singular del cuerpo en cuestión, no cambia para un sólido rígido.

También es conveniente recordar que al considerar un sistema compuesto por varios cuerpos, podemos calcular primero la posición del CM de cada cuerpo, y luego sumarlos para encontrar el CM del sistema. En otras palabras, cada cuerpo es tratado como una partícula con la masa concentrada en su propio CM y luego empleamos la ecuación (7).

Ejemplo: un sistema formado por una barra de largo L y masa M distribuída en forma uniforme, unida a una esfera pequeña de masa $2M$ en uno de sus extremos. En un cierto instante la barra esta dispuesta en forma horizontal, pero luego rotara en torno a uno de sus extremos hasta quedar en posición vertical. Pongamos nuestro sistema de referencia en el punto de rotación (aun cuando este permanece fijo).

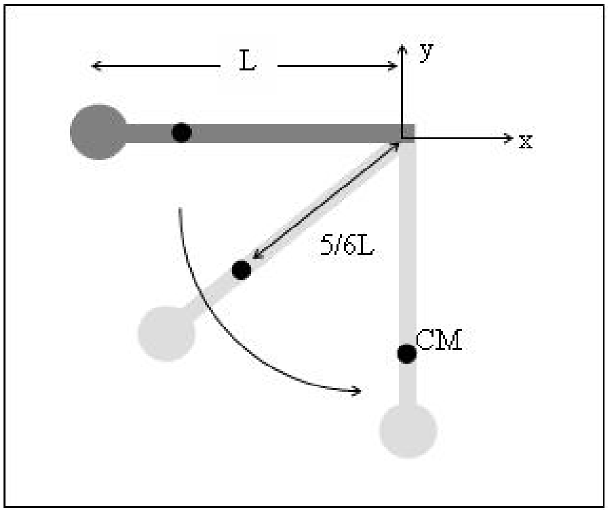


Figura 4: Centro de masa de una barra + esfera

Cuando la barra esta horizontal, la posición del CM es:

$$\vec{R}i = \frac{2M\vec{R}_{esfera} + M\vec{R}_{barra}}{3M} = -\frac{2ML + ML/2}{3M}\hat{\imath} = -\frac{5}{6}L\hat{\imath}$$

Notar que hemos empleado el hecho del que el centro de masa de una barra homogénea está en su centro (Unidad 3). El signo $-$ y el vector unitario $\hat{\imath}$ en la posición del CM aparecen por la posición específica del sistema en este instante. Más importante, sabemos que el CM se ubica a $\frac{5}{6}$ del largo desde el extremo sin la esfera (o a $\frac{1}{6}$ de su largo desde la esfera).

¿Cuál es la posición del CM cuando el sistema está vertical? No necesitamos calcular la posición del CM nuevamente. Por simple inspección podemos escribir: $\vec{R_f} = -\frac{5}{6}L\hat{\jmath}$

3.2. Teorema de Steiner, o de los Ejes Paralelos.

Cuando un cuerpo tiene algún tipo de simetría, es relativamente sencillo conocer el momento de inercia c/r a un eje que pasa por el centro de masa. El Teorema de Steiner nos permite encontrar fácilmente el momento de inercia c/r a cualquier eje paralelo al anterior, desplazado una distancia R. En su demostración empleamos la geometría y notación de la figura adjunta:

Por definición $I_O = \Sigma m_i x_i^2$, y $I_{CM} = \Sigma m_i r_i^2$. Expresamos el vector $\vec{x_i} = \vec{R} + \vec{r_i}$, luego

$$\vec{x_i}^2 = (\vec{R} + \vec{r_i})^2 = \vec{R}^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r_i} + \vec{r_i}^2$$

$$I_O = \Sigma m_i[\vec{R}^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r_i} + \vec{r_i}^2]$$

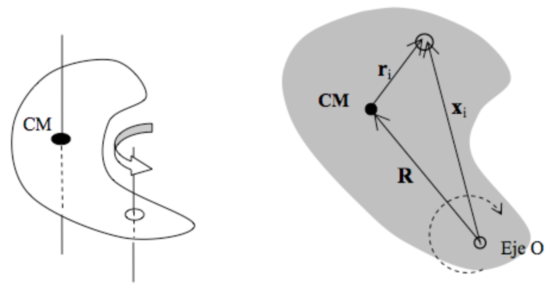


Figura 5: Geometría para Teorema de Ejes Paralelos.

pero por definición del centro de masa

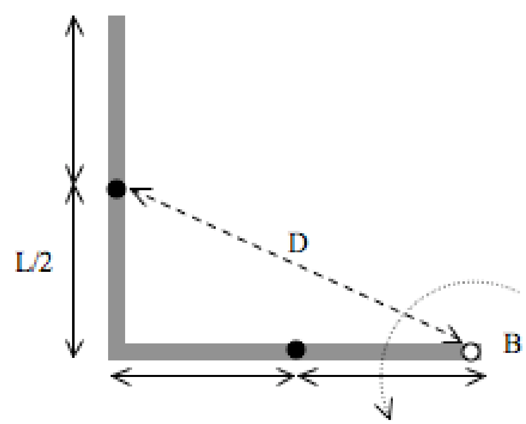
$$\Sigma m_i \vec{r_i} = 0$$

luego

$$I_O = \Sigma m_i[\vec{R}^2 + \vec{r_i}^2] = MR^2 + I_{CM}$$

Ejemplo: Consideremos una barra delgada en forma de L, con dos partes iguales cada una de masa M y largo L. Calcular el momento de inercia respecto su extremo B. Recuerde que el momento de inercia de una barra de largo L y masa M con respecto a su CM es $\frac{1}{12}ML^2$.

Aunque se trata de un cuerpo slido, haremos el cálculo descomponiendo la L en sus dos partes (vertical y horizontal): $I_B = I_H + I_V$. En cada caso aplicamos Steiner:



$$I_H = I_{CM} + M(L/2)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$
$$I_V = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{5}{4}ML^2 = \frac{4}{3}ML^2$$

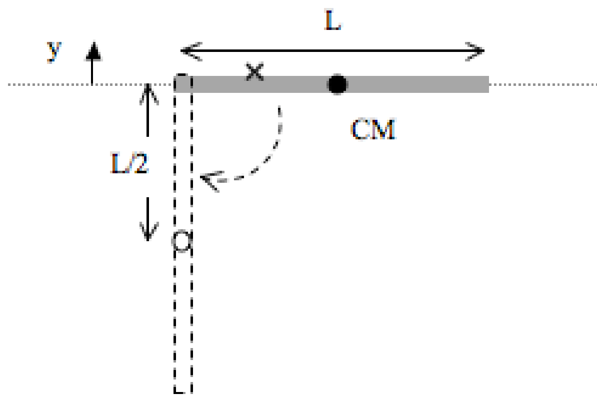
luego

$$I_B = \frac{5}{3}ML^2$$

Problema propuesto: Se tiene un disco homogéneo de radio R y masa M al cual se adhiere radialmente una barra de largo L y masa m. Calcule el momento de inercia del sistema c/r al centro del disco y a un extremo de la barra. Estudie los casos límites $L << R$, $m << M$, $m >> M$.

4. Energía de Rotación de una barra en torno a un eje fijo.

Una barra uniforme de largo L y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin friccin que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta de la posicin horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando esta pasa por la vertical? ¿Cuál es la velocidad del CM en ese instante?



Podemos resolver este problema fácilmente considerando la energía mecánica del sistema $E = K + U_g$. Para U_g tomemos como referencia el nivel donde la barra esta horizontal. Como la rotación ocurre en torno a un extremo, $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$. Suponiendo que la barra es uniforme, su CM esta en su centro geométrico. Si la barra parte del reposo se tiene $E_i = K_i + U_{gi} = 0 + 0$

$$E_f = \frac{1}{2}I_0\omega_f^2 + Mgy_f = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega_f^2 + Mg(-\frac{1}{2}L) = 0$$

$$\omega_f = (3g/L)^{1/2}$$

$$v_{CMf} = \frac{1}{2}L\omega_f = \frac{1}{2}(3gL)^{1/2}$$

¿Qué pasa si la bara rota en torno al punto marcado por una x?

Consideremos un cuerpo rígido sobre el cual solo actúa el peso y que puede rotar en torno a un eje. Si el cuerpo se suelta desde el reposo, podemos evaluar la velocidad angular en cualquier otro instante (por ejemplo, cuando su CM pasa por su punto ms bajo) empleando la conservación de la energía mecánica

$$\omega_f = \left(\frac{2Mg\Delta y}{I}\right)^{1/2}$$

donde Δy es el cambio en la posición del centro de masa. Como I es proporcional a M, el resultado anterior es independiente de la masa del cuerpo. De esta forma, la velocidad angular final crece con el desplazamiento del centro de masa (se esta transformando energía potencial gravitacional en energía cinética) pero disminuye con I. Si realizamos el mismo experimento pero cambiamos su geometría, no es simple determinar si aumenta o disminuye ω_f, pues cambia tanto I como Δy. Por ejemplo, si hacemos que la masa quede más cercana al eje de rotación, disminuye I y Δy.

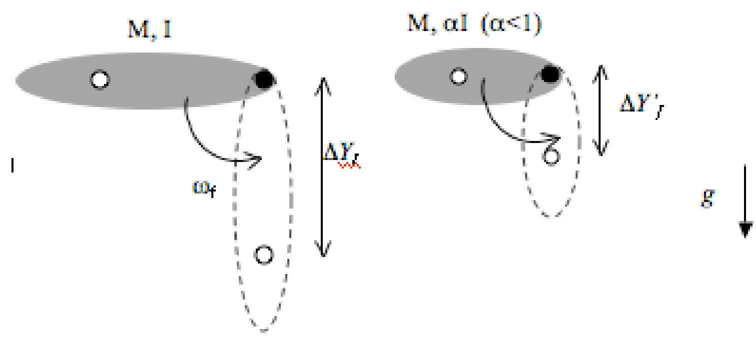


Figura 6: Dos cuerpos de igual masa pero distinta forma, ¿cuál cae más rápido?

Lectura Suplementaria

El material teórico de las Unidades 3 y 4A es lectura esencial para la materia de esta semana.

- *Fisica. Serway Tomo 1. McGraw Hill*
  Seccikones 10.4 y 10.5
- *Física para la ciencia y la tecnología. Tipler. Reverté*
  Secciones 8.5 y 9.5
- *Introducción a la Mecánica* de Nelson Zamorano
  Secciones VI.6.2 y VI.8
- Capítulo 9 *Rotación de un Cuerpo Rígido* de Massmann contiene la materia necesaria, pero con aplicación de cálculo integral sencillo.