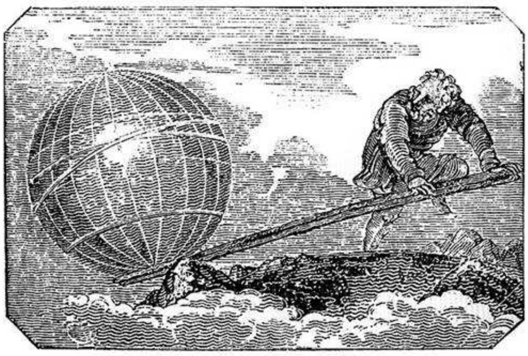
FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2008-1
Unidad 4: Estática
Preparada por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Indice

La estática es uno de los conocimientos empíricas más antiguos de nuestra civilización. Este a permitido la construcción de monumentos formidables que aún, con todos los recursos tecnológicos disponibles, nos sorprenden. El descubrimiento básico fué que era posible amplificar, mediante formas adecuadas, el efecto de una fuerza. De hecho, se le atribuye a Arquímedes haber dicho "*Dame un punto de apoyo y levantaré el Mundo*".

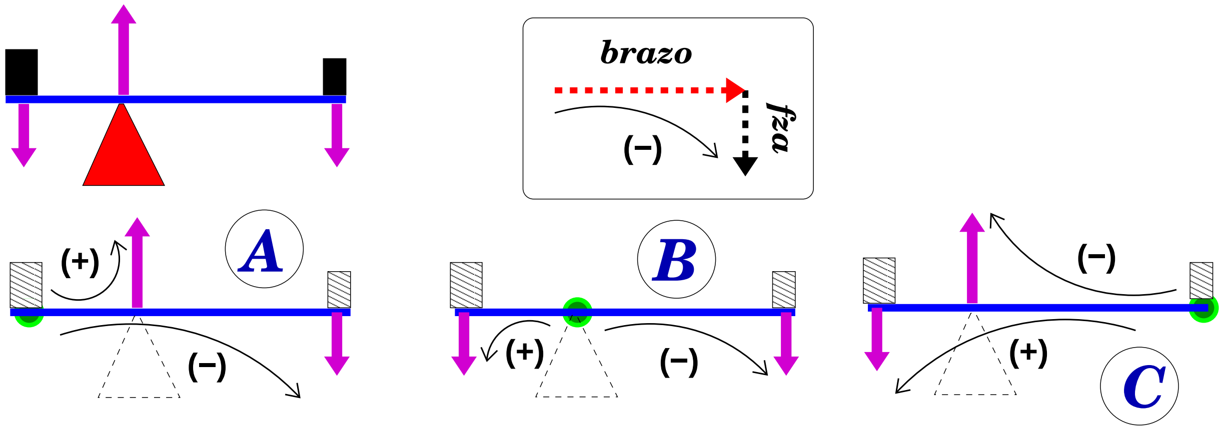


El carácter empírico de este conocimiento encuentra su fundamentación en las leyes de Newton, que como hemos visto se aplican a objetos puntuales. Veremos que las leyes de la estática aplicadas a un sólido se resumen en dos restricciones:

- Para que el centro de masas no se mueva se exige que la fuerza neta (suma de las fuerzas externas) sea nula.

- Para que el objeto no rote se exige que el *torque* neto (suma de los externos) sea nulo.

Si bién aún no hemos definido torque, algo que corregiremos enseguida, podemos describirlo como "fuerza de palanca" asociada a una fuerza. La idea es simple: consideremos un balancín equilibrado como el de la figura. Para simplificar la discución supongamos que la barra horizontal no tiene masa (masa despreciable). Los bloques en los extremos forman parte de lo que denominaremos 'sistema', de modo que el contacto de ellos con la tabla constituye una fuerza interna. Las fuerzas externas al sistema son: 1) el peso del bloque izquierdo; 2) el peso del bloque derecho y; 3) la fuerza (normal) donde se apoya la tabla. La primera exigencia es que la suma vectorial de todas ellas sea nula.



Para que el sistema no gire debe existir una compensación entre las palancas –con respecto a un punto arbitrario– que hagan girar el sólido en un sentido contra las que lo harían girar en el sentido opuesto. Ello se ilustra en los esquemas A, B y C, en los cuales se indica la "tendencia a giro" debido al par *brazo-fuerza*. Hemos convenido en este caso que los giros en el sentido anti-horario tienen signo $(+)$, mientras que los que giran en el sentido de los punteros del reloj tienen sentido de giro (–). Nótese que con respecto a los tres puntos considerados (denotados con los círculos verdes), los pares de fuerzas producen tendencia a girar en sentidos opuestos. La cuantificación de estos equilibrios requiere de la introducción de la noción de *producto cruz*.

0.1. Producto vectorial y torques

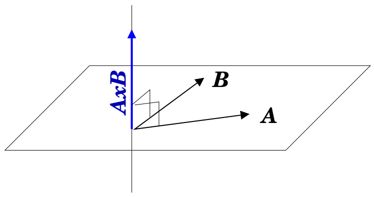
Como vimos anteriormente, el uso de palancas para levantar cuerpos es un hecho empírico en el cual, mediante una combinación de fuerza, puntos de apoyo y lugares donde se aplica la fuerza, podemos lavantar cuerpos que mediante levantamiento directo sería imposible. Este hecho es explicado mediante las ecuaciones de Newton, para lo cual requeriremos de una nueva construcción vectorial que llamaremos *producto cruz*.

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores, entonces el elemento

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}\,,$$

es un vector cuya

- dirección es perpendicular a ambos, $\vec{A}$ y $\vec{B}$;
- tamaño $AB\sin(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; y
- sentido según la *regla de la mano derecha*[1].



Con esta definición surgen las siguientes propiedades:

1. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, para todo $\vec{A}$;
2. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$;
3. $\vec{A} \times (\lambda\vec{B}) = \lambda(\vec{A} \times \vec{B})$; con λ un escalar;
4. $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$; $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$; y $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$;
5. $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta = A_\perp B = AB_\perp$, donde $A_\perp$ es la magnitud de la componente de $\vec{A}$, perpendicular a $\vec{B}$.
6. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$;

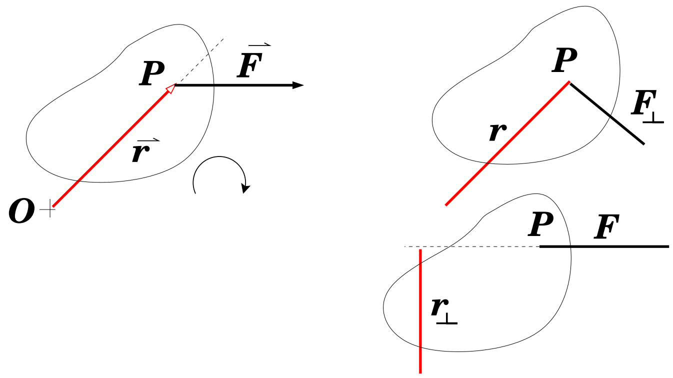
0.2. El torque de una fuerza

Se define el torque $\vec{\tau}$ de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto P como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,,$$

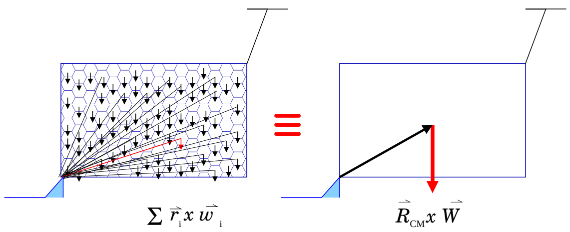
donde $\vec{r}$ es el vector qu une el orige O con el punto P. Físicamente, lo que este producto representa es la habilidad de la fuerza $\vec{F}$ de inducir un giro del cuerpo en torno al origen O. Este origen es totalmente arbitrario; sin embargo, una vez es escogido, ha de mantenerse durante el desarrollo de las ecuaciones en cuestión.

[1] En ella, ambos vectores se disponen con sus colas coincidentes. Luego, el dedo anular de la mano derecha toma la dirección y sentido de $\vec{A}$, con la palma orientada hacia $\vec{B}$. El sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ coincide con el del dedo pulgar.



0.3. El torque debido a la gravedad terrestre

Un caso de interés particular es el torque sobre un sólido debido a la gravedad. Definiendo el torque total como la suma de todos los torques, el torque debido a la gravedad lo calculamos representando el sólido como una superposición de N celdas muy pequeñas, cada una de ellas afectada por el peso $\vec{w}_i = m_i\vec{g}$.



El torque con respecto a un orige O resulta

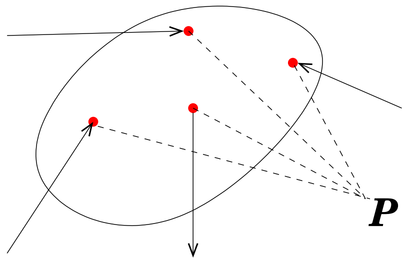
$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i\vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right)}_{M\vec{R}_{CM}} \times\vec{g} = \vec{R}_{CM} \times (M\vec{g}) \;,$$

donde hemos identificado $\vec{R}_{CM}$, el vector centro de masas del sólido con respecto a O. Este resultado nos permitirá una notable simplicidad en el estudio de sólidos.

0.4. Las leyes de la estática

En una primera etapa nos limitaremos a la aplicación de las leyes de la estática. Su demostración la dejaremos para más adelante.

Consideremos un sólido sobre el cual actúan N fuerzas externas: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots \vec{F}_N$.



Entonces, para que el sistema esté en equilibrio estático es necesario que:

I.- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \vec{0}$;

II.- $\vec{\tau}(\vec{F}_1) + \vec{\tau}(\vec{F}_2) + \cdots + \vec{\tau}(\vec{F}_N) = \vec{0}$.

OBSERVACIONES:

1. La suma de fuerzas es vectorial, de modo que muchas veces resulta conveniente expresarla en términos de componentes ortogonales, usualmente según ejes 'x', 'y' y 'z' escogidos adecuadamente.

2. Los torques son calculados con respecto a un punto P arbitrario. Entonces, la recomendación es tomar torque con respecto a un punto donde se simplifique de mejor forma el cálculo.

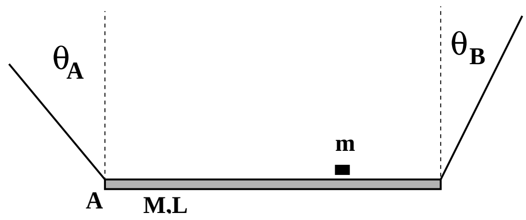
3. En este curso nos centraremos en problemas en los cuales todas las fuerzas están contenidas en un plano. Si el punto P está en el mismo plano, entonces los torques serán perpendiculares a éste. Con ello, basta con especificar si el torque

   - sale del plano; o
   - entra al plano.

   Uno puede convenir el signo $(+)$ del torque para cualquiera de estos casos, quedando los torques en sentido opuesto con signo $(-)$.

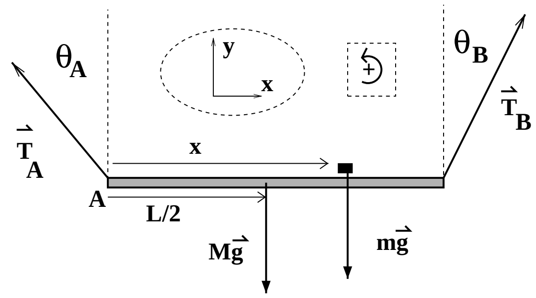
0.5. Un ejemplo (tomado de un control de 2001)

Una carga de masa $\underline{m}$ posa sobre un tablón de longitud $\underline{L}$ y masa $\underline{M}$ distribuida uniformemente. El tablón es sostenido en sus extremos por dos cuerdas ideales las cuales forman ángulos θ_A y θ_B con respecto la vertical. La carga se ubica en una posición tal que permite que el tablón se mantenga en forma horizontal. a) Determine la ubicación de la carga con respecto al extremo A del tablón. b) Verifique e interprete concisamente su respuesta para el caso $\theta_A = \theta_B$.



SOLUCION:

- Las fuerzas sobre (tablón+carga): tensiones $\vec{T}_A$ y $\vec{T}_B$, peso carga $m\vec{g}$ y peso tablón $M\vec{g}$.



- Estática bajo traslación del CM y proyecciones según $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

$$\begin{aligned}
\vec{T}_A + \vec{T}_B + m\vec{g} + M\vec{g} &= 0 \quad \Rightarrow & (1)\\
-T_A \sin\theta_A + T_B \sin\theta_B + 0 + 0 &= 0 \quad (\text{según } \hat{x}) & (2)\\
T_A \cos\theta_A + T_B \cos\theta_B - mg - Mg &= 0 \quad (\text{según } \hat{y}) & (3)
\end{aligned}$$

- De lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
T_A \sin\theta_A &= T_B \sin\theta_B & (4)\\
T_A \cos\theta_A + T_B \cos\theta_B &= (m+M)g & (5)
\end{aligned}$$

- Estática bajo rotación (torques) c/r A y (torques positivos en sentido antihorario):

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_A(\vec{T}_A) + \vec{\tau}_A(\vec{T}_B) + \vec{\tau}_A(m\vec{g}) + \vec{\tau}_A(M\vec{g}) &= 0 \quad \Rightarrow & (6)\\
0 + LT_B \cos\theta_B - xmg - (L/2)Mg &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{xmg = LT_B \cos\theta_B - MgL/2} & (7)
\end{aligned}$$

- Buscamos x: reemplazar T_A de (4) en (5) y se obtiene

$$T_B(\cos\theta_A \sin\theta_B + \cos\theta_B \sin\theta_A) = (m+M)g \sin\theta_A \rightarrow \boxed{T_B \sin(\theta_A + \theta_B) = (m+M)g \sin\theta_A}$$

- Combinar con Ec. (7) para x y despejar...

$$\boxed{x = \frac{L}{m}\left(\frac{(m+M)\sin\theta_A\cos\theta_B}{\sin(\theta_A+\theta_B)} - \frac{M}{2}\right)}$$

- Caso límite $\theta_a = \theta_B \longrightarrow$ (usar $\sin(2\beta) = 2\sin\beta\cos\beta$)

$$x \to \frac{L}{m}\left(\frac{(m+M)\sin\theta_A\cos\theta_A}{2\sin\theta_A\cos\theta_B} - \frac{M}{2}\right) \Rightarrow \boxed{x \to \frac{L}{2}}$$

vale decir, si los $\angle$'s son iguales, la carga debe ubicarse simétricamente en el tablón.