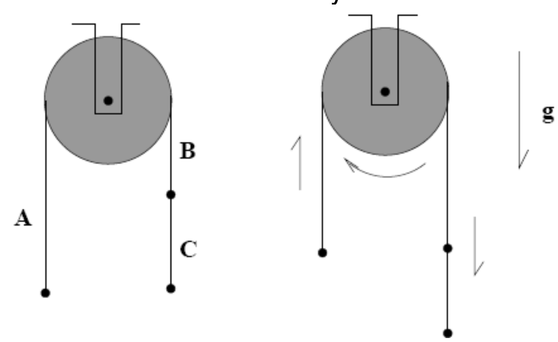
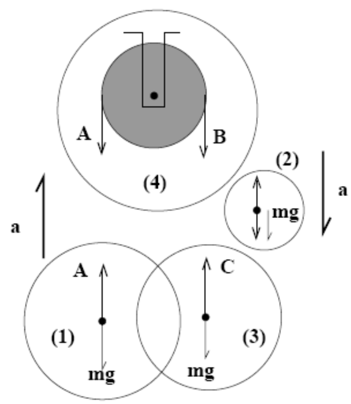
Ejercicio 4C: Torque y momento angular

En la figura se muestra una rueda cilíndrica de masa M y radio R que puede girar sin fricción en torno a su eje fijo. Una cuerda ideal descansa sobre la superficie (rugosa) de la rueda. En el extremo derecho de la cuerda se adhiere una perla de masa m; en el otro lado se adhieren dos perlas de igual masa (m) separadas por una distancia b. El sistema se suelta del reposo con las perlas extremas al mismo nivel de la horizontal. A consecuencia de la asimetría de las cargas, la rueda rota en sentido de los punteros del reloj; la cuerda no resbala con respecto a la rueda. Calcule las tensiones de la cuerda en A, B y C y ordénelas de menos a mayor.



Solución:



De los DCL para las componentes de las fuerzas:

$$T_A - mg = ma$$
$$T_C - T_B + mg = ma$$
$$mg - T_C = ma$$

<u>Opción 1</u>: Ecuación de torques para la polea

$$T_B\ R - T_A\ R = I\alpha = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

Como a =R α:

$$T_B - T_A = \frac{1}{2} M\ a$$

*S*umando las tres primeras ecuaciones:

$$T_A - T_B + mg = 3ma$$

Y usando la ecuación de torque:

$$\frac{1}{2}M\ a = mg - 3ma$$

Por lo tanto: $a = \dfrac{mg}{3m + \dfrac{M}{2}}$

Opción 2: Torque total

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{L}_{total}$$

Se necesita el momentum angular para cada partícula y éste se calcula usando producto cruz:

$$L_A = mRv$$
$$L_B = mRv$$
$$L_C = mRv$$
$$L_{polea} = I\omega$$

Por lo tanto, $L_{total} = L_A + L_B + L_C + L_{polea} = 3mRv + I\omega$

Y derivando con respecto al tiempo: $\Sigma\boldsymbol{\tau}_{ext} = 3mRa + I\,\alpha$

Pero $\Sigma\boldsymbol{\tau}_{ext} = Rmg + Rmg - Rmg = Rmg$ pues sólo se consideran las fuerzas externas.

Despejando la aceleración: $a = \dfrac{mg}{3m + \dfrac{M}{2}}$

Una vez obtenida la aceleración se calculan las tensiones de las ecuaciones de movimiento:

$$T_A = ma + mg$$
$$T_B = 2(mg - ma)$$
$$T_C = mg - ma$$

Y se reemplaza la aceleración encontrada:

$$T_A = \mathrm{mg}\frac{4\mathrm{m} + \dfrac{M}{2}}{3m + \dfrac{M}{2}}$$

$$T_B = \mathrm{mg}\frac{4\mathrm{m} + M}{3m + \dfrac{M}{2}}$$

$$T_C = \mathrm{mg}\frac{2\mathrm{m} + \dfrac{M}{2}}{3m + \dfrac{M}{2}}$$

Y el orden de las tensiones es: $T_B > T_A > T_C$