FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2008-1
Unidad 4D: Amortiguamiento
Por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Indice

1. Interacción de una esfera con el aire

El desplazamiento de un globo en un medio fluído, como lo es el aire, es un fenómeno fascinante y a su vez sumamente intrigante. Aun a estas alturas de nuestra civilización, con toda la tecnología disponible, conocimiento e incontables aciertos en la física, este simple fenómeno aun esconde misterios que no han sido explicados satisfactoriamente.

Tales limitaciones no impiden, sin embargo, intentar un acercamiento fenomenológico del comportamiento de un globo cuando jugamos con él. Este conocimiento nos permitirá comprender algo sobre la caída de un paracaídas, lo costoso que es andar rápido en la carretera, las ideas detrás del vuelo de un helicóptero, la caída de una pluma en el aire, el arrastre de las aguas, el despegue del transbordador espacial o el hundimiento de una piedra en una laguna. Una característica común de estos fenómenos es atenuación del movimiento relativo entre el fluído y el objeto.

Para simplificar ideas consideremos un volumen esférico, en ausencia de gravedad e inmerso en una cámara con aire quieto. Si $\vec{r}$ representa la posición del centro de la esfera, entonces al desplazar el globo en $\delta\vec{r}$, se manifestará una resistencia del aire sobre el globo, oponiendose al desplazamiento.

En general podemos representar la fuerza del aire sobre el globo de la forma

$$\vec{F} = -f(|\vec{v}|)\hat{v} \ , \tag{1}$$

con $-\hat{v}$ representando un vector unitario en sentido opuesto al desplazamiento. La función $f(v)$ es necesariamente positiva, de otro modo bastaría con mover ligeramente un cuerpo para que este se autopropulsara en el mismo sentido de su movimiento.

La forma general de $f(v)$ va a depender del regimen de velocidades, densidad del aire, propiedades termodinámicas, geometría del cuerpo, entre muchas otras. Se reconocen, sin embargo, dos regímenes de velocidades donde $f(v)$ toma formas particularmente simples:

$$f(v) \to f_s(v) \propto v \ ,$$

para movimientos 'lentos' donde priman fuerza viscosas, y

$$f(v) \to f_r(v) \propto v^2 \ ,$$

para movimientos rápidos, que típicamente involucran la generación de turbulencias.

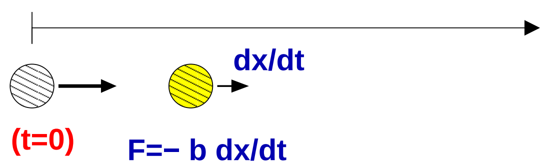
Qué es 'lento' y 'rápido' depende mucho de las propiedades mecánicas del medio: separación entre constituyentes, adherencia entre sus moléculas, adherencia con superficies, energía cinética de las moléculas constituyentes, etc.

1.1. El frenado de una esfera (sin gravedad)

Un sistema simple consiste en una esfera de masa m rodeada de aire y en ausencia de gravedad. El movimiento es unidimensional (según un eje 'x'), donde suponemos una fuerza del tipo

$$F_x = -bv_x \ ,$$

denotando por b al *coeficiente de roce viscoso* (notación Serway). Además, supondremos que la esfera parte ($t=0$) con rapidez v_o.



Al aplicar la segunda ley de Newton ($F_x = m dv_x/dt$) tenemos

$$m\frac{dv_x}{dt} = -bv_x \ , \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau}v_x \ ,$$

con $\tau = m/b$. Claramente τ (letra griega *tau*) tiene dimensiones de tiempo. En esta ecuación uno se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es aquella función $v_x(t)$, que al derivarla es proporcional a ella misma?

La respuesta la encontramos en la función exponencial, particularmente

$$v_x(t) = A\, e^{-t/\tau}\ .$$

Aquí, A representa una constante que está restringida por la *condición inicial*, vale decir, información sobre la velocidad en $t = 0$. Recordamos que en $t = 0$, $v_x = v_o$, entonces $A = v_o$. De esta forma,

$$v_x(t) = v_o\, e^{-t/\tau}\ .$$

Notar que la velocidad se atenua exponencialmente ($1/e \approx 0.368$), lo que se ilustra en la tabla siguiente:

t	v_x	$\%v_o$
0	1.000 v_o	100
τ	0.368 v_o	37
2τ	0.135 v_o	14
3τ	0.050 v_o	5
4τ	0.020 v_o	2
5τ	0.007 v_o	1

El resultado anterior para $v_x(t)$ puede ser utilizado para obtener la posición de la esfera, $x(t)$. Escribimos esta vez

$$v_x(t) = v_o\, e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_o\, e^{-t/\tau}\ .$$

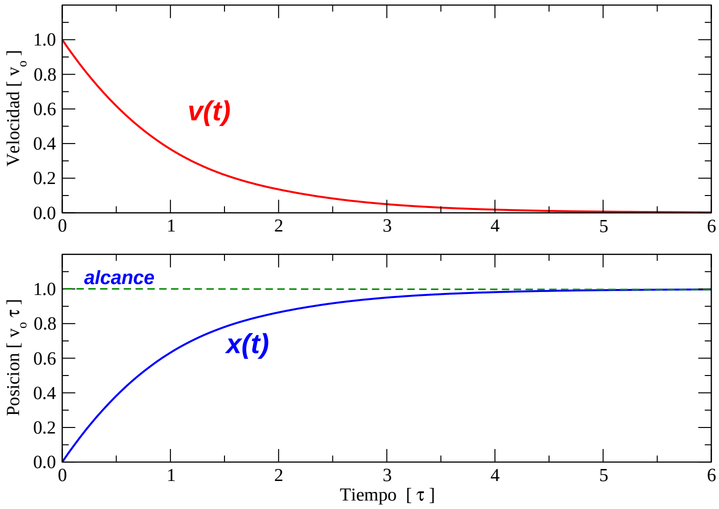
Esta vez nos preguntamos por aquella función que al derivar resulta una exponencial en t. La respuesta nuevamente es una exponencial. Planteamos

$$x(t) = -v_o\tau\, e^{-t/\tau} + C\ ,$$

con C una constante que ha de ser determinada por la condición inicial. Si exigimos que en $t = 0$ la posición de la esfera coincide con el origen ($x = 0$), entonces $C = v_o/\tau$, con lo cual

$$x(t) = v_o\tau\ (1 - e^{-t/\tau})\ . \tag{2}$$

Un gráfico de esta función se ilustra en la figura siguiente, y se observa que para un tiempo muy grande, $x \to v_o\tau$. La esfera no sobrepasará esa distancia. Cuan lejos queda tal punto dependerá de $\tau = m/b$; mientras más chico sea b (la fricción), más lejos llegará la esfera. Lo mismo ocurre si es más masivo.



La caída vertical por gravedad cuando actúa el roce viscoso se puede representar mediante la ecuación $\ddot{y} = g - (1/\tau)\dot{y}$. Si el objeto parte del reposo en $y = 0$, entonces $y(t)$ queda dado por

$$y(t) = g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right) \ .$$

No esperamos que Ud. deduzca este resultado. Sin embargo sus conocimientos le permiten *verificar* que la solución aquí obtenida satisface la ecuación $\ddot{y} = g - (1/\tau)\dot{y}$. ¡Hagalo!.

La *velocidad terminal* V_t es aquella que adquiere el cuerpo cuando deja de acelerar (se impone aceleración ~ 0). En este caso es cuando el peso (mg) equipara la fuerza por roce (bV_t). Así,

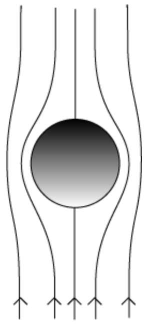
$$V_t = \frac{mg}{b} = g\tau \ .$$

1.2. La fuerza de Stokes

Si consideramos una esfera inmersa en un fluído muy viscoso y hacemos que el líquido fluya suavemente, como se ilustra en la figura, entonces la fuerza del fluído toma una forma bastante simple. La expresión para tal fuerza fué deducida por Sir George Gabriel Stokes, en el año 1840. Si la esfera tiene un radio R y la viscosidad del fluído es η (de dimensiones $ML^{-1}T^{-1}$), entonces la fuerza de arrastre está dada por la *fuerza de Stokes*

$$F_{Stokes} = 6\pi R\eta \ v \ , \tag{3}$$

donde v es la rapidez del fluído. Nótese que la fuerza es proporcional al radio de la esfera, y no a su área transversal.



La viscosidad es una propiedad mecánica de los fluidos que caracteriza la adherencia entre sus constituyentes. La miel es muy viscosa, en contraste con el agua. La viscosidad depende fuertemente de la temperatura, como se observa en la miel y el aceite al calentarlos. Más abajo tabulamos la viscosidad de algunos fluídos comunes. Las unidades mPa s y μPa s corresponden a mili-pascal$\times$segundo y micro-pascal$\times$segundo, respectivamente.

Sustancia	Temperatura [C^o]	Viscosidad [mPa s]	Viscosidad [μPa s]
Agua	100	0.28	
Alcohol etílico	20	1.1	
Agua	20	1	
Sangre	37	3 - 4	
Miel	20	20	
Aceite vegetal	40	31	
Aceite de oliva	20	84	
Aceite de motor	20	65-300	
Glicerina	20	1420	
Aire	15		18
Hidrógeno	0		8.4
Helio	0		18.6

1.3. La fuerza de arrastre de Rayleigh

Al igual que en el caso de la fuerza de Stokes, Lord Rayleigh obtiene una expresión para la fuerza de arrastre de un fluído sobre un cuerpo. En este caso la expresión viene dada por

$$F_a = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d A \,, \tag{4}$$

con ρ la densidad del fluído, A el área transversal del objeto, y C_d un coeficiente de arrastre. El valor de C_d depende en gran medida de la forma del cuerpo, variando típicamente entre 0.25 y 0.45 para un vehículo.

A modo de estimación, considerando la densidad del aire igual a 1,3 kg/m^3, un objeto de sección transversal de 1 m^2, a una velocidad de 10 m/s (36 km/h), $C_d \sim 1$, entonces la fuerza de arrastre resulta del orden de

$$F_a \sim 0.5 \times 1.3 \times 10^2 \times 1 = 65 \text{ N} .$$

La fuerza se cuadriplica si la velocidad aumenta al doble.

En el caso de un vehículo en movimiento, la fuerza de arrastre tiene este mismo comportamiento. Puesto que la potencia necesaria para mantener esa velocidad va como fuerza$\times$velocidad, entonces la potencia se comporta como v^3. Ese esfuerzo lo realiza el motor, por lo que la potencia se octuplica.

Cuando un objeto cae verticalmente por gravedad, en presencia de una fuerza de roce cuadrática en la velocidad, su movimiento queda descrito por

$$m\ddot{y} = mg - cv_y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = g - \beta^2 v_y^2 .$$

La velocidad terminal V_t se obtiene imponiendo $\ddot{y} = 0$, con lo cual $V_t^2 = mg/c$. Si inicialmente $v_y(0) = 0$ entonces se obtiene para la velocidad

$$v_y(t) = \frac{1}{\beta}\frac{1 - e^{-\beta g t}}{1 + e^{-\beta g t}} .$$

La cantidad

$$\frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{c}{mg}} ,$$

representa la velocidad terminal (V_t), de modo que podemos re-escribir convenientemente

$$v_y(t) = V_t \frac{1 - e^{-gt/V_t}}{1 + e^{-gt/V_t}} .$$

1.4. Oscilaciones amortiguadas

En la unidad anterior se estudiaron oscilaciones armónicas mecánicas. Así por ejemplo, si $x(t)$ representa la posición de un objeto, entonces su movimiento está descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 , \tag{5}$$

donde ω_o representa la *frecuencia natural* del sistema. La solución $x(t)$ a esta ecuación es

$$x(t) = A \cos(\omega_o t + \phi_o) . \tag{6}$$

En ella,

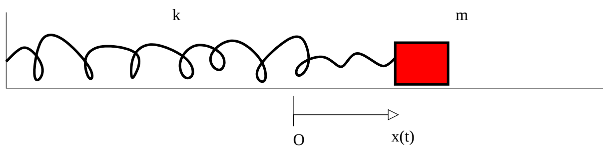
- la amplitud A depende de las condiciones iniciales (C.I)

- la constante de fase ϕ_o tambien depende de las C.I.
- la frecuencia angular ω_o NO DEPENDE de las C.I. sino de las propiedades físicas del sistema.

Consideremos esta vez el sistema formado por un bloque de masa m unido a un resorte de constante elástica k. Como es sabido, en este caso

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \; .$$

Además, supongamos la acción de una fuerza de roce viscoso $-b\dot{x}$ actuando sobre el bloque.



De acuerdo a la Segunda Ley de Newton, $ma_x = F_x$, tenemos

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \; .$$

En forma estándar,

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0 \; , \tag{7}$$

donde τ representa un *tiempo de atenuación*. En la asignatura de *Mecánica*, se estudiará en algún detalle sistemas que resultan descritos por este tipo de ecuaciones. La solución $x(t)$ en este caso es

$$x(t) = A\, e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_o) \; , \tag{8}$$

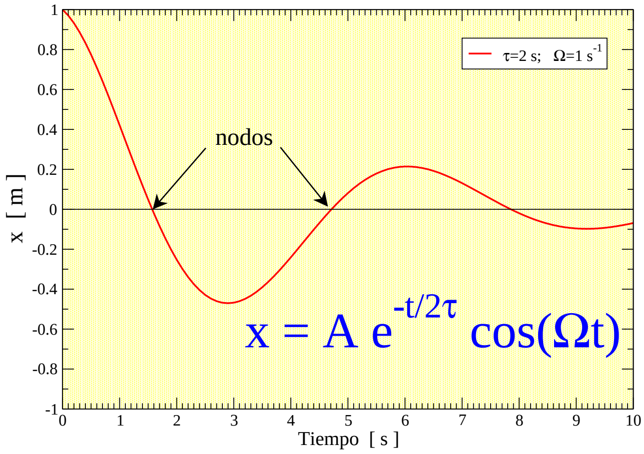
con

$$\Omega^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 \; . \tag{9}$$

Nótese que en ausencia de roce ($b = 0$), el tiempo de atenuación τ es infinito, con lo cual $\Omega \to \omega_o$. El movimiento es armónico simple, sin amortiguación.

La solución obtenida en este caso es válida sólo para fuerzas viscosas, es decir, fuerzas proporcionales a la primera potencia de la rapidez. Cuando la fuerza es $\propto v^2$, la solución de arriba no es correcta. Sin embargo, este problema se puede abordar numéricamente recurriendo al método de Verlet, lo que est totalmente accesible con los conocimientos adquiridos a la fecha.

En la figura de más abajo se ilustra la posición de un cuerpo oscilando amortiguadamente. Se puede observar la ciclicidad y atenuación del movimiento. En este caso se utilizó τ=2 s, y Ω= 1 s^{-1}. Si el cuerpo en cuestión tiene una masa de 10 gramos, ¿cuál sería la constante elástica del resorte y el coeficiente de roce b?



1.5. Péndulo formado por un globo

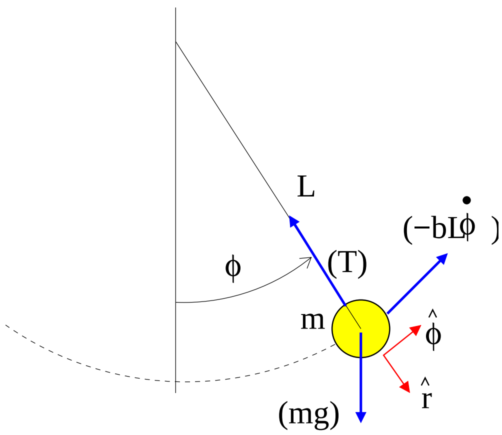
Consideremos el caso de un péndulo formado por un globo atado a un cordel. La distancia entre el centro de masas del globo y el soporte fijo es L. Son tres las fuerzas que actúan sobre el globo: el peso debido a la gravedad ($m\vec{g}$), la tensión de la cuerda ($\vec{T}$) y el roce que ejerce el aire sobre el globo ($-f(v)\hat{v}$). Supongamos que el roce es de tipo viscoso, entonces $f(v) = bv$. Este será un supuesto de trabajo que debiera, en última instancia, ser corroborado experimentalmente.

La ecuación del movimiento queda

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - b\vec{v}\ . \tag{10}$$

Descomponemos vectorialmente usando coordenadas polares (conveniente). Si la trayectoria es de radio L, la velocidad y aceleración quedan expresadas por $\vec{v} = \omega L\hat{\phi}$ (tangencial), $\vec{a} = \alpha L\hat{\phi} - \omega^2 L\hat{r}$ (tangencial + centrípeta), o bien

$$\vec{v} = L\dot{\phi}\,\hat{\phi} \qquad \vec{a} = L\ddot{\phi}\,\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{r}\ .$$



Proyectando la ecuación del movimiento exclusivamente según la componente angular $\hat{\phi}$, obtenemos

$$mL\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - bL\dot{\phi} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\phi} + \omega_o^2 \sin\phi + \frac{1}{\tau}\dot{\phi} = 0 \; .$$

El movimiento resultante es amortiguado pero no armónico: ¿porqué? En el límite de pequeñas oscilaciones podemos aproximar $\sin\phi \approx \phi$, con lo cual

$$\boxed{\ddot{\phi} + \omega_o^2\,\phi + \frac{1}{\tau}\dot{\phi} = 0 \; . \qquad (11)}$$

La ecuación es idéntica a la del resorte con roce viscoso discutido recientemente. En este caso particular identificamos

$$\omega_o^2 = \frac{g}{L}\;, \qquad \tau = \frac{m}{b}\;.$$

La función $\phi(t)$ queda expresada por

$$\boxed{\phi(t) = A\,e^{-t/2\tau}\,\cos(\Omega t + \phi_o)\;, \qquad (12)}$$

- Las constantes Ω y τ dependen de las propiedades físicas del sistema. En este caso, longitud del péndulo, aceleración de gravedad, coeficiente de roce viscoso y masa del péndulo. Ver Ec. (9).
- Note que $\Omega \neq \omega_o$, la frecuencia natural del sistema.
- La constante A (amplitud $\sim$ ángulo) depende de las condiciones iniciales del sistema. Se controla experimentalmente al soltar la esfera.
- La constante ϕ_o (contante de fase) está muy relacionada con la velocidad en $t = 0$. Esta constante puede ser representada mediante $\phi_o = -\Omega t_o$. Especificando ϕ_o se obtiene t_o y vice-versa. Lo interesante surge al observar que $\cos(\Omega t + \phi_o) = \cos(\Omega(t - t_o))$, identificándose una traslación temporal hacia la derecha, en t_o, de la curva $\cos(\Omega t)$.

1.6. Lectura complementaria

Los temas tratados en esta unidad se pueden encontrar en textos de física básica, en los capítulos donde se aborden oscilaciones, oscilaciones amortiguadas y fluídos.

- En el texto de Tipler revisar: Capítulo 5 (fuerzas de arrastre) y Capítulo 14 (oscilaciones amortiguadas).
- En el texto de Serway revisar: Capítulo 6 (fuerzas de arrastre) y Capítulo 13 (oscilaciones amortiguadas).