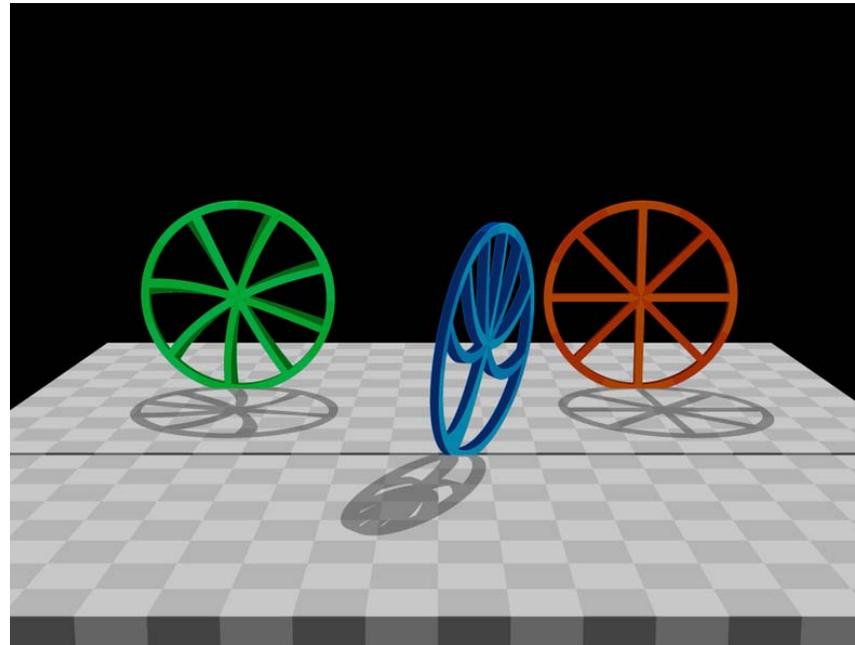


Unidad 4D. Dinámica Plana III

Movimiento de Rodadura



*René Garreaud**
**DGF FCFM-UChile*

FIA2. Semestre 2007-2

Unidad 4D. Dinámica Plana III

Para un cuerpo sólido que rota en torno a un eje fijo (e.g., péndulo físico) se puede relacionar la suma de los torques con la el cambio de momento angular:

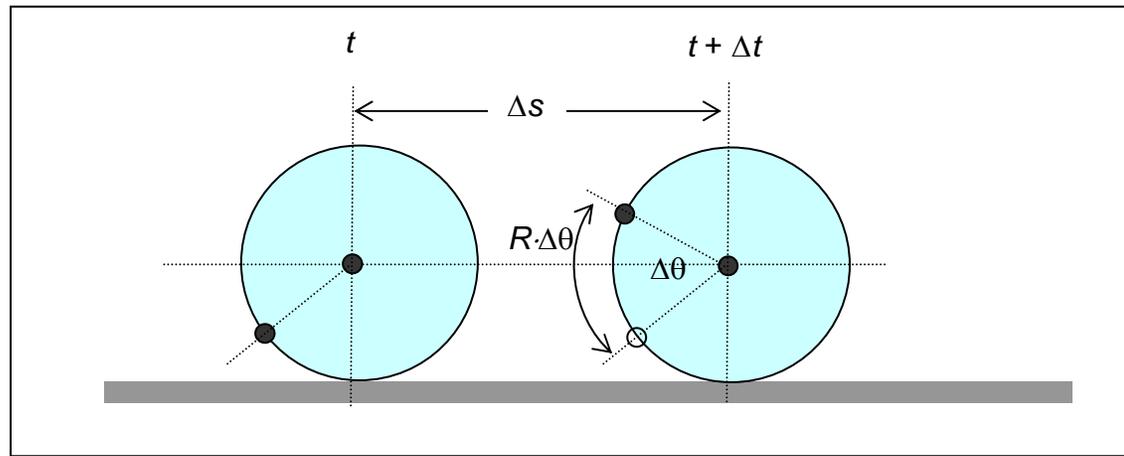
$$\tau^{\text{ext}}_{\text{O}} = d\mathbf{L}_{\text{O}}/dt = I_{\text{O}} \cdot \alpha$$

donde $\tau^{\text{ext}}_{\text{O}} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$, y $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$. Notar la similitud con:

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt = m \cdot \mathbf{a}$$

Unidad 4D. Dinámica Plana III

Movimiento de Rodadura: Rotación + Traslación



El valor $R \cdot \Delta\theta < = > \Delta s$, pero existen dos casos límites muy importantes:

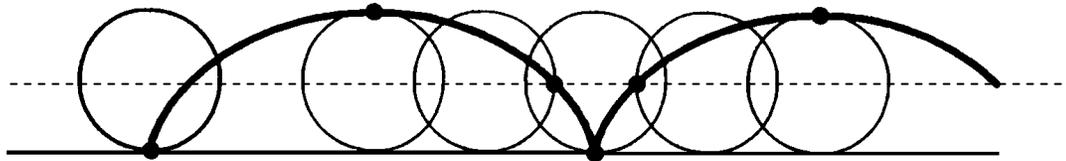
* **Resbalamiento puro:** $\Delta s > 0$ (CM se desplaza) y $\Delta\theta = 0$ (cilindro no gira).

* **Rodadura perfecta (rodar sin resbalar):** $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$ (requiere roce)

FIA2. Semestre 2007-2

Unidad 4D. Dinámica Plana III

Cinemática Rodadura Perfecta

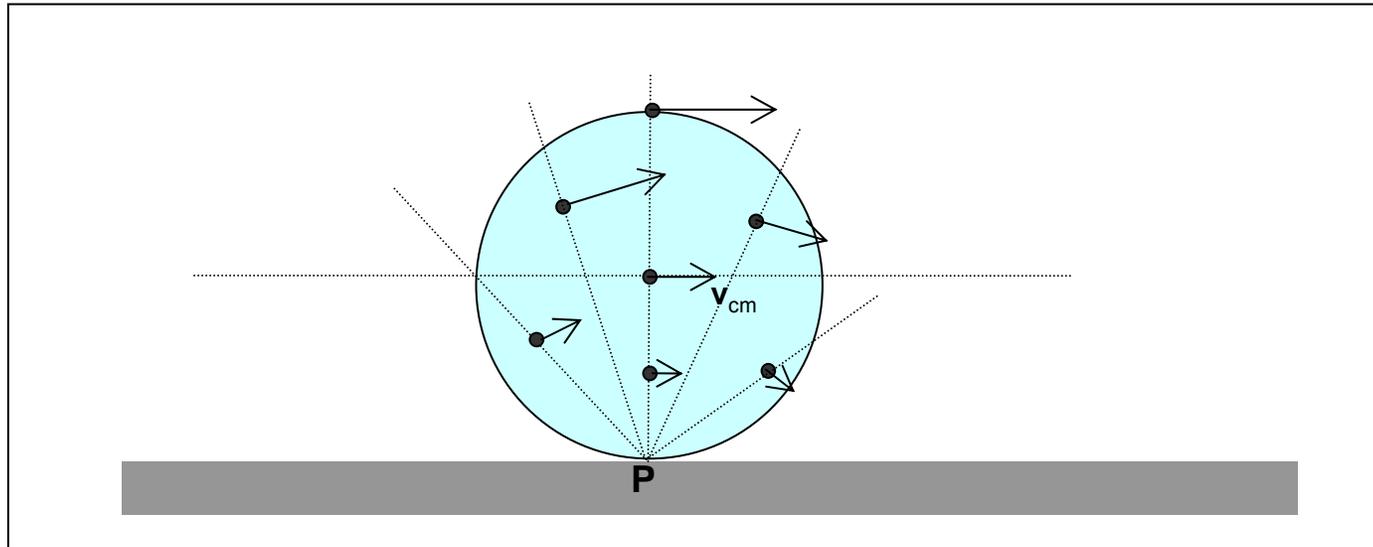


$$\Delta \mathbf{s} = R \cdot \Delta \theta \quad (2a)$$

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = d\mathbf{s}/dt = R \cdot d\theta/dt = R \cdot \omega \quad (2b)$$

$$\mathbf{a}_{\text{cm}} = d\mathbf{v}_{\text{cm}}/dt = R \cdot d\omega/dt = R \cdot \alpha \quad (2c)$$

Unidad 4D. Dinámica Plana III



En rodadura perfecta, el punto de contacto P es el centro de rotación y este se encuentra en reposo instantáneo.

Unidad 4D. Dinámica Plana III

Dinámica de la Rodadura Perfecta

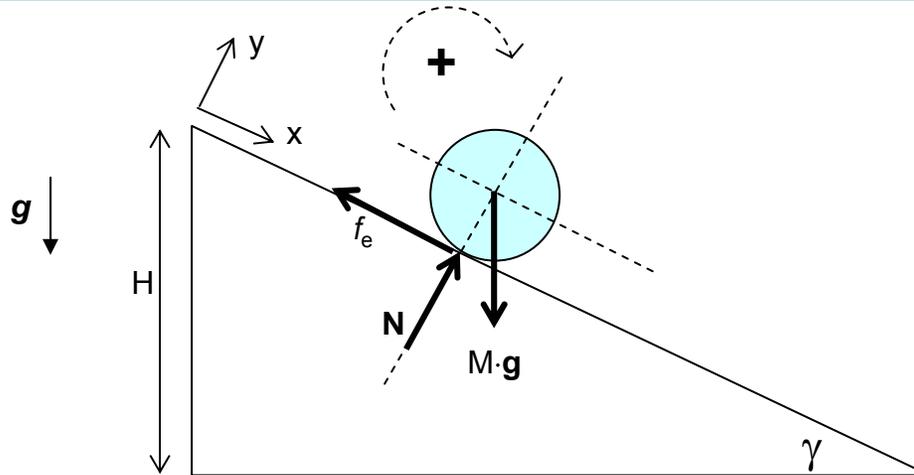
$$\rightarrow \quad \Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = M \cdot \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (3)$$

$$\rightarrow \quad \tau_P^{\text{ext}} = d\mathbf{L}_P/dt = I_P \cdot \alpha \quad (4a)$$

$$d\mathbf{L}_Q/dt = \tau_Q^{\text{ext}} - \mathbf{v}_Q \times M \cdot \mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (4b)$$

$$\rightarrow \quad \tau_{\text{cm}}^{\text{ext}} = d\mathbf{L}_{\text{cm}}/dt = I_{\text{cm}} \cdot \alpha \quad (4c)$$

Unidad 4D. Dinámica Plana III



Determine la rapidez con que llega la esfera a la base del plano inclinado.

Sol.: Determinemos a_x y luego v_f

Como suponemos rodadura perfecta $|\mathbf{f}| = |\mathbf{f}_e| \leq \mu_e |\mathbf{N}|$

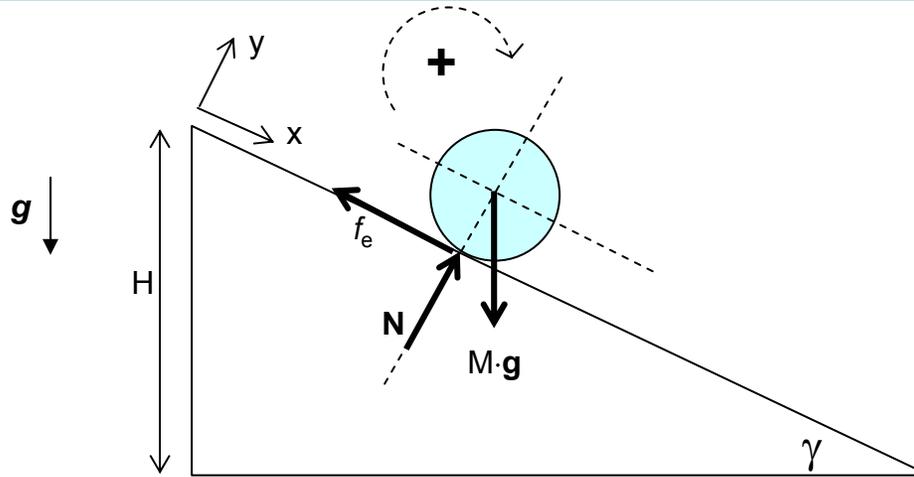
Asignamos sentido a \mathbf{f} para producir el torque necesario

$$\sum F_x = M \cdot g \cdot \text{sen}(\gamma) - f_e = M \cdot a_c$$

$$\sum F_y = N - M \cdot g \cdot \text{cos}(\gamma) = 0$$

$$\sum \tau_c = f_e \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha$$

Unidad 4D. Dinámica Plana III



Tenemos 4 incógnitas (a_{cm} , α , f_e y N) pero solo tres ecuaciones. Como se trata de rodadura perfecta podemos agregar $a_{cm} = R \cdot \alpha$. De esta forma:

$$f_e = (I_{cm} \cdot \alpha) / R = (2/5 \cdot M \cdot R^2 / R) (a_{cm} / R) = 2/5 \cdot M \cdot a_{cm}$$

Sustituyendo este resultado en ΣF_x obtenemos

$$a_{cm} = (5/7) \cdot g \cdot \text{sen}(\gamma)$$

Unidad 4D. Dinámica Plana III

Energía Rodadura Perfecta.

Como mostramos en la unidad 4B, la ecuación de trabajo-energía puede aplicarse también a un cuerpo sólido, tal que:

$$\sum W(\mathbf{F}_{NC}) = \Delta(K + \sum U)$$

Donde $K = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$ y $U = M \cdot g \cdot Y_{cm}$. En el caso de rodadura perfecta:

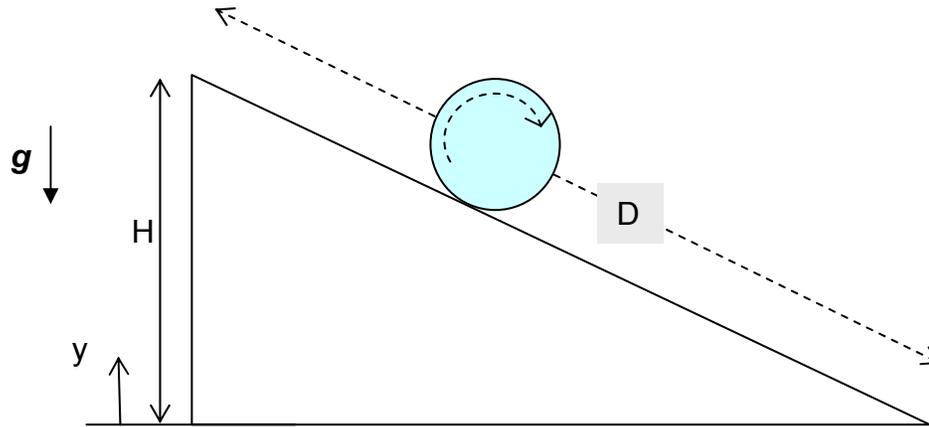
$$K = \frac{1}{2} I_P \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + M \cdot R^2) \cdot \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_{cm}^2$$

energía cinética de rotación respecto al centro de cilindro

energía cinética asociada al desplazamiento del centro de masa

Unidad 4D. Dinámica Plana III



Igual problema anterior...pero ahora empleando Energía.

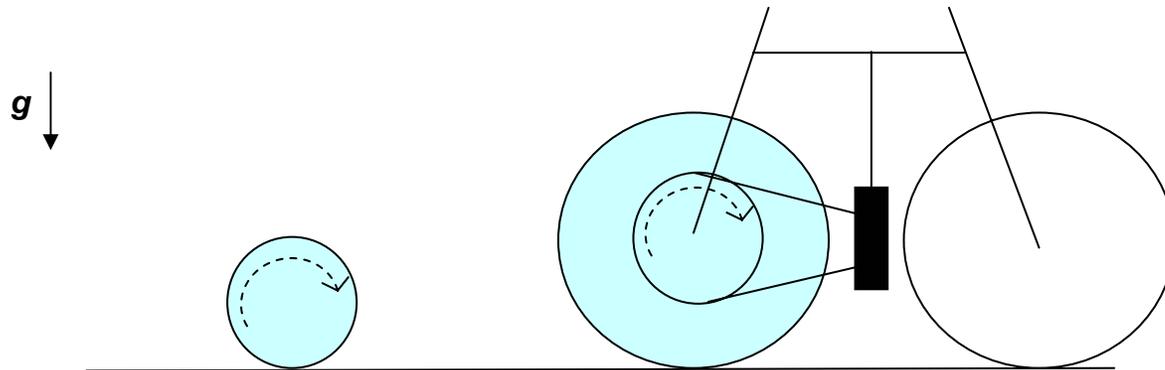
$$E_i = K_i + U_i = 0 + M \cdot g \cdot H$$

$$E_f = K_f + U_f = \left(\frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_{cm}^2 \right) + 0 = \frac{1}{2} (I_{cm}/R^2 + M) \cdot v_{cm}^2$$

$$\Delta E = W(F_R) + W(N) = 0 \text{ ???}$$

$$v_{cm}^2 = (10/7) \cdot g \cdot H = 2 \cdot (5/7) \cdot g \cdot D \cdot \text{sen}(\gamma) = 2 \cdot (5/7) \cdot g \cdot \text{sen}(\gamma) \cdot D$$

Unidad 4D. Dinámica Plana III



Preguntas para pensar:

Si $\Delta E = 0$, porque se detiene la rueda de la izquierda????

En la bicicleta de la derecha se aplica torque en el piñón de la rueda trasera...hacia adonde apunta el roce? Porque avanza la bicicleta?