

Unidad 4B. Dinámica Plana I

Energía de Sólidos Rígidos

Anexo B. Antecedentes Teóricos

*René Garreaud**

**DGF FCFM-UChile*

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 1. Conservación de la Energía para una Partícula

Para una partícula, este principio se deriva directamente de la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$), obteniéndose que el Teorema del trabajo-energía:

$$W_{\text{neto}} = k_f - k_i$$

donde $k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ es la energía cinética y el trabajo de una fuerza $\mathbf{F}$ en un pequeño intervalo $d\mathbf{x}$ se evalúa como $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ (se emplea el producto punto). La evaluación del trabajo neto requiere “integrar” los dW a lo largo de la trayectoria de la partícula.

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 2. Fuerzas conservativas

Existen fuerzas en que el trabajo neto NO depende del camino recorrido sino que exclusivamente de la posición inicial y final de la partícula. Estas fuerzas se denominan **conservativas** e incluyen al peso ($m \cdot \mathbf{g}$) y la fuerza elástica. En contraste, la fuerza de roce entre una partícula y una superficie no es conservativa

Para una fuerza conservativa, $\mathbf{F}_c$, el trabajo efectuado es solo función de las coordenadas, y se puede definir una función de **energía potencial**, u , tal que el trabajo realizado es igual a la disminución en la energía potencial:

$$W_c = \int \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{x} = -\Delta u = u_i - u_f$$

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 2.5 Fuerzas conservativas

Para **F_c** = Peso del cuerpo = $m \cdot \mathbf{g}$ $\rightarrow u_g \equiv m \cdot g \cdot y$

Para **F_c** = Fuerza gravitacional = $-G \cdot M \cdot m / r^2$ $\rightarrow u_G \equiv -G \cdot M \cdot m / r$

Para **F_c** = Fuerza elástica = $-k \cdot \delta$ $\rightarrow u_e \equiv \frac{1}{2} \cdot k \cdot \delta^2$

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 3. Energía Mecánica

Si sobre una partícula solo actúa una **F_c**: $\Delta(k + u) = 0$

Podemos definir la **energía mecánica total** como $e \equiv k + u$.

En este caso, $E = \text{constante}$.

Si sobre el sistema actúa más de una fuerza conservativa y otras fuerzas no-conservativas (**F_{nc}**, como el roce), obtenemos una ecuación más general:

$$\sum W(\mathbf{F}_{nc}) = \Delta(k + \sum u)$$

Este principio es de gran aplicación para resolver problemas de mecánica en los cuales solo interesa la condición inicial y final (*comentar ejemplos...*).

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 4. Energía Mecánica de un sistema de partículas / Cuerpo rígido.

Consideremos el caso simple en que solo actúa una fuerza conservativa (como el peso) sobre un sistema de N partículas. También existen **fuerzas internas**, actuando entre las partículas.

Sin embargo, si las partículas conforman un **cuerpo rígido** (sin deformación), el trabajo de las fuerzas internas es nulo. En consecuencia, se puede escribir $\Delta(k_i + u_i) = 0$ para cada una de las N partículas. Sumando sobre todas ellas se obtiene:

$$\Delta(\sum K_i + \sum U_i) = 0$$

$$\Delta(K + U) = 0$$

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 4.5. Energía Mecánica de un Cuerpo rígido.

Si el cuerpo rota respecto a un eje fijo con rapidez angular ω :

$$K \equiv \sum k_i = \sum \left(\frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum (m_i \cdot \rho_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

donde ρ_i es el radio de la órbita que describe la partícula entorno al eje de rotación. I es el momento de inercia del cuerpo.

También se demostró en la Unidad 3 que:

$$U_g = \sum u_i = \sum (m_i \cdot g \cdot y_i) = M \cdot g \cdot Y_{CM}$$

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 5. El centro de Masa.

Previamente definimos la posición del centro de masa de un sistema de partículas como: $\mathbf{R} = (1/M)\sum m_i \cdot \mathbf{r}_i$

Cuando tenemos un sistema compuesto por cuerpos y partículas, cada cuerpo es tratado como una partícula con la masa concentrada en su propio CM y luego empleamos la ecuación anterior. *Ejemplo...*

Cuando la barra esta horizontal

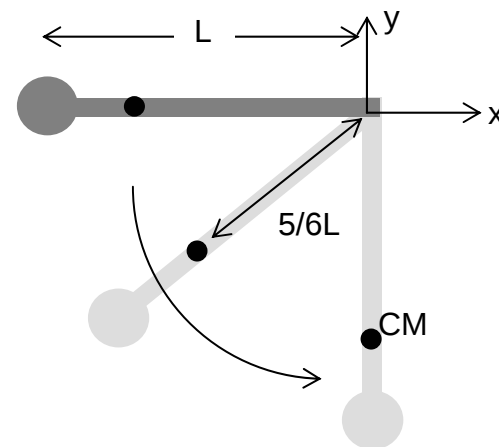
$$\mathbf{R} = [2M \cdot \mathbf{R}(\text{esfera}) + M \cdot \mathbf{R}(\text{barra})] / (3 \cdot M)$$

$$\mathbf{R} = -[(2M \cdot L + M \cdot L/2)/(3 \cdot M)] \mathbf{i}$$

$$\mathbf{R} = -5/6 \cdot L \mathbf{i}$$

Cuando la barra esta vertical

$$\mathbf{R} = -5/6 \cdot L \mathbf{j}$$

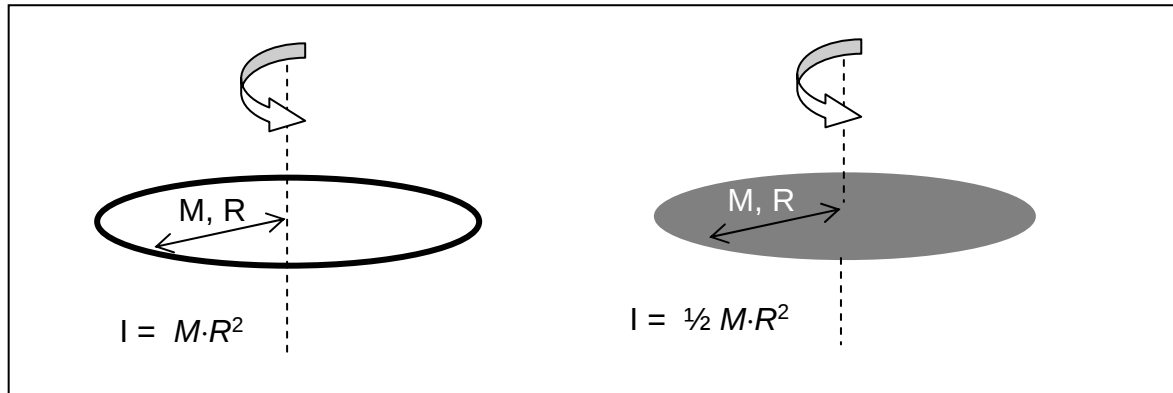


Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 6a. El Momento de Inercia

$$I \equiv \sum (m_i \cdot r_i^2)$$

Para un cuerpo $I = \gamma \cdot M \cdot L^2$, donde M es la masa total del cuerpo, L es una dimensión característica (radio de un disco, largo de una barra) y γ un valor numérico que depende de cada caso. *Masa y forma...*

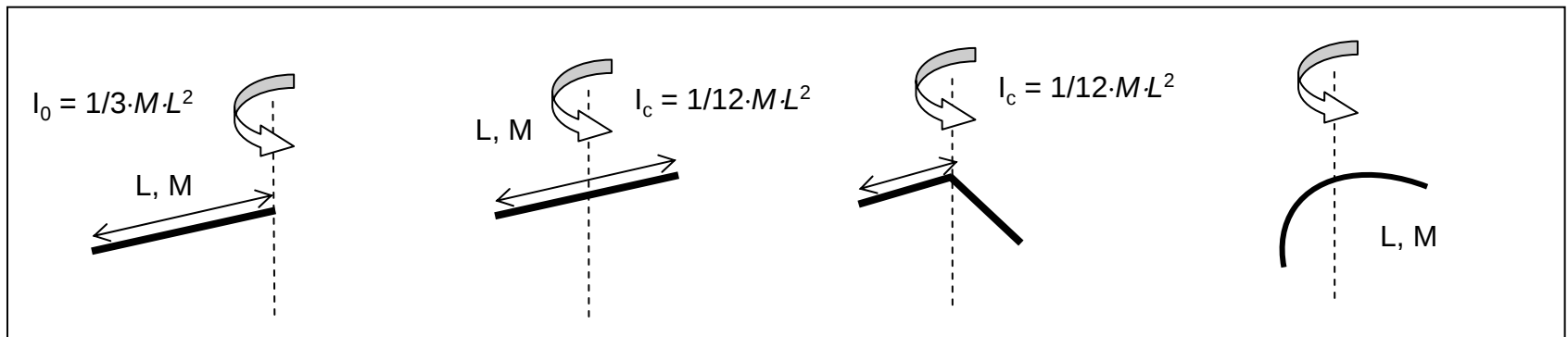


Como se obtiene el I de un aro? Porque $I(\text{disco}) < I(\text{aro})$ a igual masa?

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 6b. El Momento de Inercia

$$I \equiv \sum (m_i \cdot r_i^2)$$



Como se obtiene el I de una barra c/r a su extremo?

Como se obtiene el I de una barra c/r a su extremo?

Por que $I(\text{barra_extremo}) > I(\text{barra_centro})$?

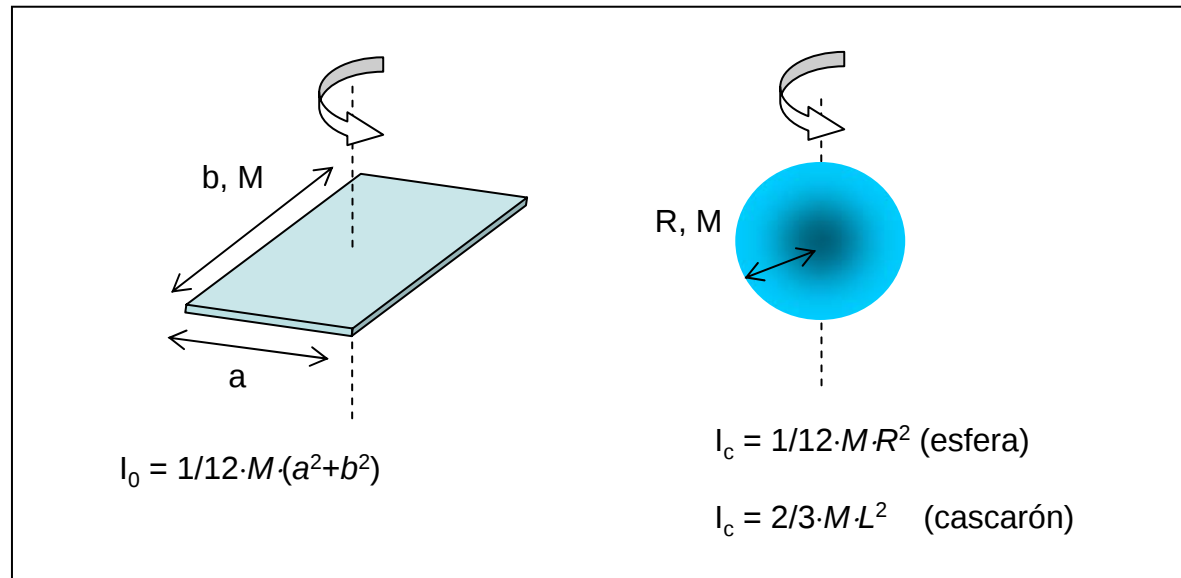
Que pasa si doblamos la barra en un angulo?

Que pasa si curvamos la barra?

Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 6c. El Momento de Inercia

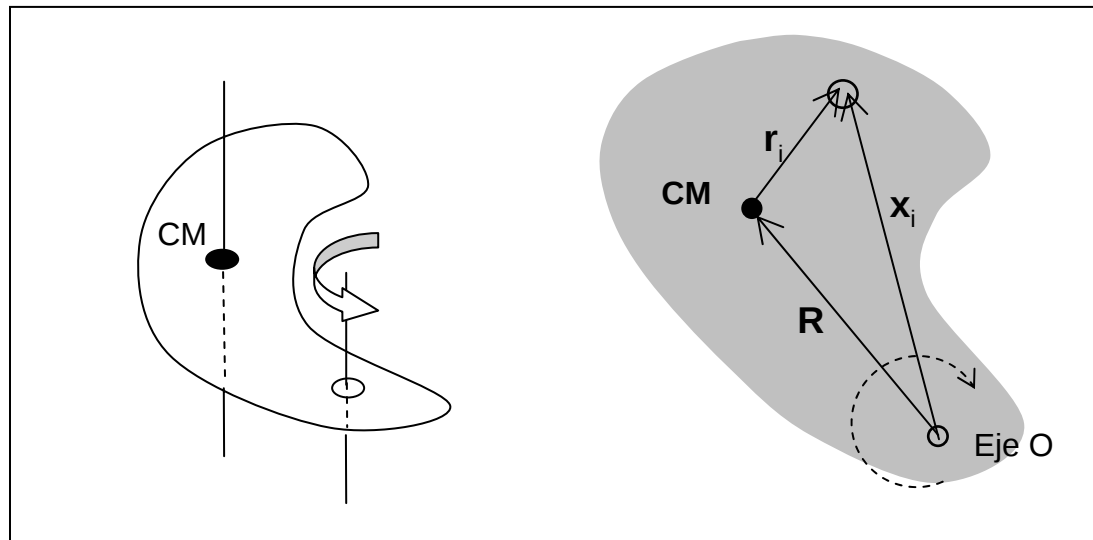
$$I \equiv \sum (m_i \cdot r_i^2)$$



Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 6d. El Momento de Inercia – Teorema de Steiner

Muchas veces conocemos el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro de masa (I_{CM}) pero el cuerpo gira en torno a otro eje, paralelo al anterior pero desplazado una distancia R . Para determinar I_0 empleamos el teorema de Steiner



Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

$$I_0 = \sum (m_i \cdot x_i^2)$$

(por definición)

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i$$

(simple suma de vectores)

$$(\mathbf{x}_i)^2 = (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i)^2 = \mathbf{R}^2 + 2 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^2$$

(álgebra vectorial)

$$I_0 = \sum m_i \cdot [\mathbf{R}^2 + 2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^2]$$

(entonces...)

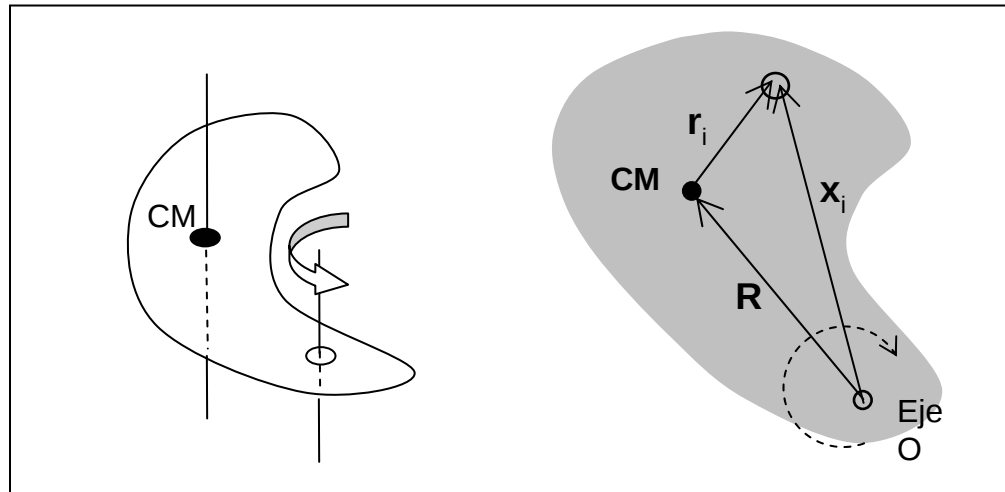
$$\sum m_i \cdot \mathbf{r}_i = 0$$

(por definición de CM)

$$I_0 = \sum m_i \cdot [\mathbf{R}^2 + \mathbf{r}_i^2]$$

(finalmente....)

$$I_0 = M \cdot \mathbf{R}^2 + I_{CM}$$



Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 6d. El Momento de Inercia - Steiner

Ejemplo: Calcular el momento de inercia de una L respecto su extremo B. Recuerde que $I_{cm} = 1/12 m \cdot l^2$

Sol.: Aunque se trata de un solo cuerpo sólido, haremos el calculo descomponiendo la L en sus dos partes $I_0 = I_H + I_V$. En cada caso aplicamos Steiner:

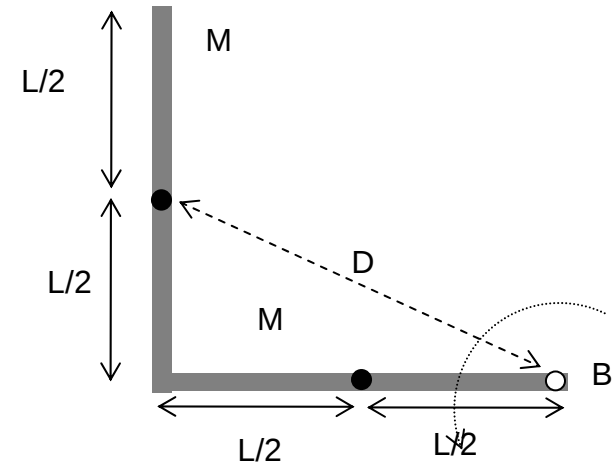
$$I_H = I_{CM} + M \cdot (L/2)^2 = 1/12 \cdot M \cdot L^2 + 1/4 \cdot M \cdot L^2 = 1/3 \cdot M \cdot L^2 \quad (\text{ok})$$

$$I_V = I_{CM} + M \cdot D^2 = 1/12 \cdot M \cdot L^2 + 5/4 \cdot M \cdot L^2 = 4/3 \cdot M \cdot L^2$$

Entonces : $I_0 = 5/3 \cdot M \cdot L^2$

Propuesto: Como cambia I si se agrega una masa puntual 5M en el extremo opuesto a B?

Como cambia I si se agrega una masa puntual 5M en B?



Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 7. Ejemplo conservación E

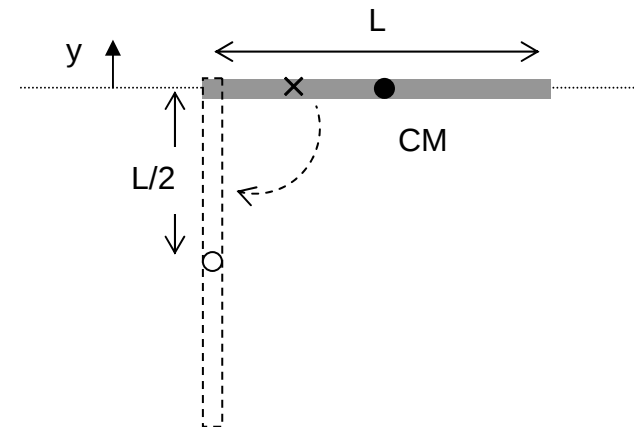
Ejemplo: Una barra uniforme de largo L y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta de la posición horizontal. ¿Cual es la velocidad angular de la barra cuando esta pasa por la vertical? ¿Cuál es la velocidad del CM en ese instante?

Como no hay fricción $E = \text{constante}$. Como la rotación ocurre en torno a un extremo, $I_0 = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2$. Barra uniforme, CM esta en su centro geométrico.

$$E_i = K_i + U_{gi} = 0 + 0 \text{ (barra en reposo, } Y_{CM} = 0 \text{)}$$

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega_f^2 + M \cdot g \cdot Y_f = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \right) \cdot \omega_f^2 + M \cdot g \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot L \right)$$

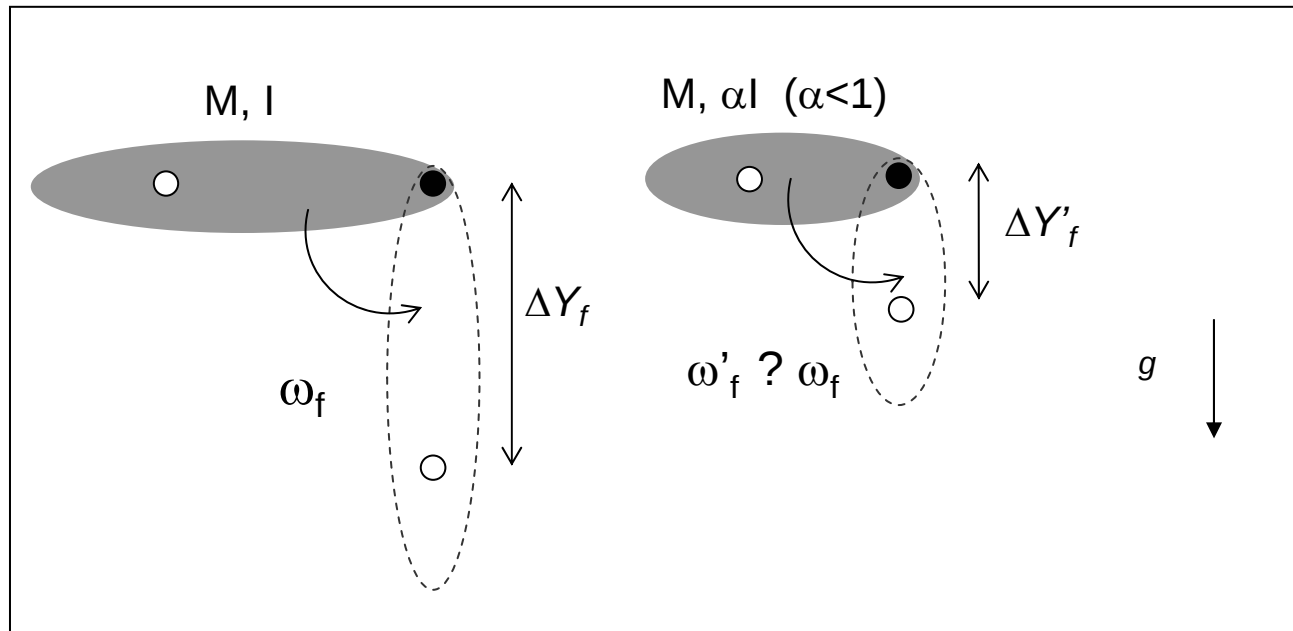
$$\omega_f = (3 \cdot g / L)^{1/2} \quad y \quad v_{CM-f} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega_f = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot g \cdot L)^{1/2}$$



Unidad 4B. Dinámica Plana I: Energía de Sólidos Rígidos

Teoría 7. Ejemplo conservación E

$$\omega_f = (2 \cdot M \cdot g \cdot \Delta Y_f / I)^{1/2}$$



Dos cuerpos de igual masa pero distinta forma ...cual “cae” mas rápido?