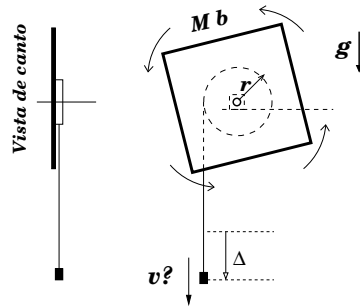


PROBLEMA 2: Un marco cuadrado de masa $\underline{M}$ está formada por cuatro barras masivas idénticas de longitud $\underline{b}$. El marco lleva centrada una ranura circular de radio $\underline{r}$ la cual se mantiene firme a éste mediante un material rígido extremadamente liviano. El sistema puede rotar sin fricción en torno a un eje horizontal que pasa por su centro. Una carga de masa $\underline{m}$ cuelga del marco mediante un cordel enrollado en la ranura.

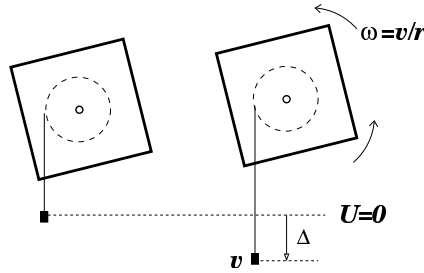
A) [5Pt] Determine la rapidez de caída de la carga luego que ésta a bajado una distancia $\underline{\Delta}$ partiendo del reposo.

B) [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso $M \ll m$.



PROBLEMA 2

Resolución por energía



- Considerando que las fuerzas externas no trabajan podemos decir:

$$E_f = E_i + W_{i \rightarrow f} \Rightarrow E_f = E_i$$

Para la energía en general escribimos:

$$E = K(\text{marco}) + K(\text{carga}) + U_g(\text{marco}) + U_g(\text{carga})$$

INICIAL (considerando nivel cero de U_g la ubicación inicial de la carga):

$$E_i = 0 + 0 + U_g(\text{marco}) + 0$$

FINAL:

$$E_f = \frac{1}{2}I_o\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + U_g(\text{marco}) - mg\Delta$$

- Igualando e imponiendo $v = \omega r$ obtenemos:

$$0 = \frac{1}{2}I_o\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v^2 = \frac{2mg\Delta}{I_o/r^2 + m}}}$$

- Necesitamos I_o . Se trata de cuatro barras, cada una de masa $M/4$ y longitud b . El momento de inercia se necesita con respecto a un eje por el centro del marco. Usamos Steiner considerando que cada barra dista $b/2$ del eje central. Además el momento de inercia de una barra de masa m y longitud L con respecto a un eje por su centro de masas es $mL^2/12$. Entonces:

$$I_o = 4 \times \left(\frac{1}{12} \left[\frac{M}{4} \right] b^2 + \frac{M}{4} (b/2)^2 \right) = 4 \times \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{16} \right) Mb^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) Mb^2 = Mb^2/3$$

- Con esto,

$$\underline{\underline{v^2 = \frac{2mg\Delta}{Mb^2/3r^2 + m} = \frac{2g\Delta}{Mb^2/3mr^2 + 1}}}$$

- En el límite $M \ll m$, o bien $M/m \rightarrow 0$,

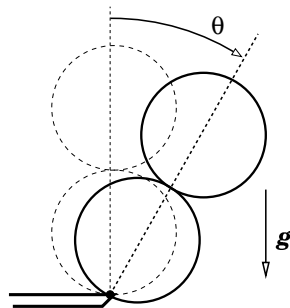
$$v^2 \rightarrow 2g\Delta$$

que corresponde a caída libre. Esto es de esperar pues en tal caso el marco, de masa casi nula, no ofrece resistencia a la caída de la carga.

3 Dos esferas macizas idénticas, cada una de masa $\underline{M}$ y radio $\underline{R}$, son adheridas firmemente entre sí. El conjunto puede rotar libremente en torno a un eje fijo tangente a uno de los polos del cuerpo, pivoteado en el canto horizontal de una mesa. Las esferas se disponen con su eje polar vertical y se les deja caer desde el reposo por efecto de la gravedad $\underline{g}$.

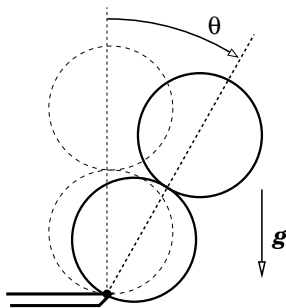
- Determine la velocidad angular del cuerpo como función del ángulo de caída $\underline{\theta}$.

Nota: el momento de inercia con respecto a eje central de una esfera maciza es $2mr^2/5$.



SOLUCION DEL CONTROL EN <http://www.dfi.uchile.cl/hfa>

PROBLEMA 3



- Las fuerzas sobre el sólido son su peso y la reacción en el soporte. Esta última no trabaja puesto que el soporte no se mueve. Podemos conservar energía mecánica: $E_i = E$, con $E = K + U_g$. El centro de masas del cuerpo se ubica en el contacto entre las dos esferas. Inicialmente, éste se ubica a una altura $2R$ del pivote.
- Inicialmente

$$E_i \rightarrow \begin{cases} K = 0 \\ U = (2M)g(2R) \end{cases} \quad (3)$$

- Luego de rotar un ángulo θ , el CM se ubica a una altura $2R \cos \theta$ del pivote. Tenemos:

$$E \rightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{2} I_s \omega^2 \\ U = (2M)g(2R) \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

- Falta calcular el momento de inercia de las dos esferas con respecto al eje que pasa por el pivote. Usando Steiner para cada esfera:

$$I_s = \left\{ \frac{2}{5} M R^2 + M R^2 \right\} + \left\{ \frac{2}{5} M R^2 + M (3R)^2 \right\} = \frac{4}{5} M R^2 + 10 M R^2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{I_s = \frac{54}{5} M R^2}}$$

- Sustituyendo todos los términos en $(K + U_g)_i = (K + U_g)$ tenemos:

$$0 + (2M)g(2R) = \frac{1}{2} I_s \omega^2 + (2M)g(2R) \cos \theta \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \cos \theta)(2M)g(2R) = \frac{1}{2} \left(\frac{54}{5} \right) M R^2 \omega^2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\omega^2 = \frac{20g}{27R} (1 - \cos \theta)}}$$

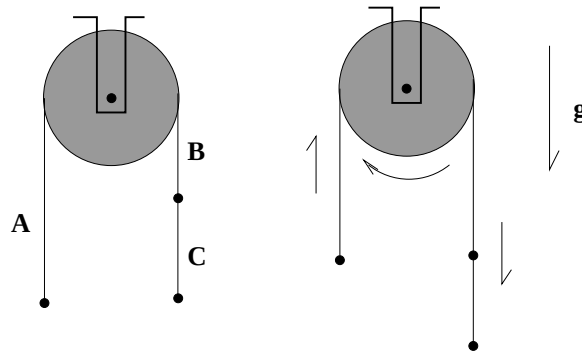
PUNTUACION: 2Pt momento de inercia correcto + 2Pt conservación de energía + 2Pt obtención del resultado.
DESCUENTOS: -1Pt por error independiente; -1Pt por error dimensional.

PROBLEMA 3

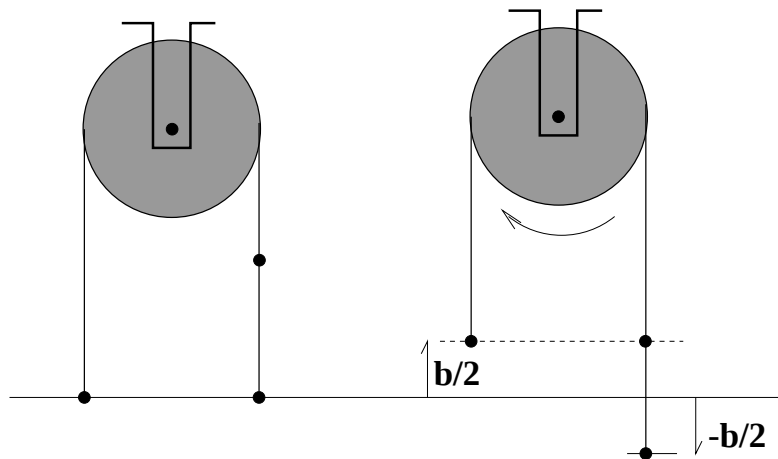
En la figura se muestra una rueda cilíndrica de masa M y radio R que puede girar sin fricción en torno a su eje fijo. Una cuerda ideal descansa sobre la superficie (rugosa) de la rueda. En el extremo derecho de la cuerda se adhiere una perla de masa m ; en el otro lado se adhieren dos perlas de igual masa (m) separadas por una distancia b . El sistema se suelta del reposo con las perlas extremas al mismo nivel con respecto a la horizontal. A consecuencia de la asimetría de las cargas, la rueda rota en sentido de los punteros del reloj; la cuerda no resbala con respecto a la rueda.

A) Calcule las tensiones de la cuerda en A , B y C , y ordénelas de menor a mayor.

B) Determine la velocidad angular de la rueda al instante en que las perlas que penden de A y B pasan por en el mismo nivel.



PARTE B:



Conservación de la energía { partícula1 + partícula2 + partícula3 + cilindro}:

$$0 + mgb + 0 + U_g(cil) = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{mgb}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{mgb}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgb}{2}\right) + \frac{1}{2}I\omega^2 + U_g(cil)$$

- Sin resbalar: $v = \omega R \rightarrow$

$$mgb = 3mv^2 + I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{mgb}{3mR^2 + MR^2/2}$$

PUNTUACION: 1Pto energías cinéticas correctas + 1Pto energías potenciales correctas + 1Pto despeje correcto.