

# Unidad 3: Sistemas Extendidos

Rodrigo Soto

En base a guía de H. Arellano 2007-2

FI1A2 - Sistemas Newtonianos  
Departamento de Física - FCFM  
Universidad de Chile

2008-2

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- Reconocer y calcular momentos de inercia
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volumen.

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- Reconocer y calcular momentos de inercia
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volúmenes.

# En esta unidad

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- **Reconocer y calcular momentos de inercia**
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volúmenes.

# En esta unidad

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- Reconocer y calcular momentos de inercia
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volúmenes.

# En esta unidad

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- Reconocer y calcular momentos de inercia
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volúmenes.

# En esta unidad

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- Reconocer y calcular momentos de inercia
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volúmenes.

# En esta unidad

- Reconocer y calcular centros de masas (analítico y numérico)
- Ser capaz de definir un sistema, reconocer su momentum total, velocidad del centro de masas y ubicación del centro de masas
- Reconocer y calcular momentos de inercia
- Representar la energía cinética de rotación de sólidos
- Reconocer y calcular la energía potencial gravitacional de un sistema extendido
- Distinguir rol de las fuerzas externas e internas
- Calcular con MATLAB masas, areas, centros de masa, momentos de inercia y volúmenes.



# En las próximas unidades

- Calcular productos cruces; visualizar espacialmente su resultado
- Calcular torques con respecto a un origen dado
- Aplicar leyes de estática
- Resolver la aceleración angular de sólidos
- Resolver el movimiento de rotación de sólidos

# En las próximas unidades

- Calcular productos cruces; visualizar espacialmente su resultado
- Calcular torques con respecto a un origen dado
- Aplicar leyes de estática
- Resolver la aceleración angular de sólidos
- Resolver el movimiento de rotación de sólidos

# En las próximas unidades

- Calcular productos cruces; visualizar espacialmente su resultado
- Calcular torques con respecto a un origen dado
- **Aplicar leyes de estática**
- Resolver la aceleración angular de sólidos
- Resolver el movimiento de rotación de sólidos

# En las próximas unidades

- Calcular productos cruces; visualizar espacialmente su resultado
- Calcular torques con respecto a un origen dado
- Aplicar leyes de estática
- Resolver la aceleración angular de sólidos
- Resolver el movimiento de rotación de sólidos

# En las próximas unidades

- Calcular productos cruces; visualizar espacialmente su resultado
- Calcular torques con respecto a un origen dado
- Aplicar leyes de estática
- Resolver la aceleración angular de sólidos
- Resolver el movimiento de rotación de sólidos

# Sistemas extendidos $1, 2, \dots, \infty$

Para estudiar la evolución de un sistema formado por muchas componentes nos valemos de las Leyes de Newton postuladas para **objetos puntuales**.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

# Sistemas extendidos $1, 2, \dots, \infty$

Sistemas:

- Una partícula
- Pocas partículas ( $1, 2, 3, \dots$ )
- Muchas partículas ( $N \rightarrow \infty$ )



# Sistemas extendidos $1, 2, \dots, \infty$

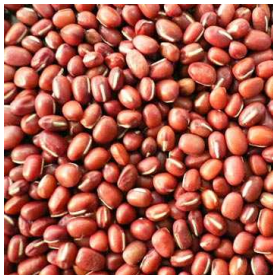
Al aplicar las leyes de Newton siempre es necesario definir **el sistema** a estudiar, vale decir, el conjunto de partículas (distinguibles y enumerables) que lo constituyen.

- Las componentes del sistema pueden interactuar entre sí  
**Fuerzas internas**
- Las componentes pueden interactuar con el exterior  
**Fuerzas externas**



# Tipos de sistemas compuestos

Los sistemas pueden ser disgregados, tales como galaxias de estrellas, las arenas, gases, etc.



# Tipos de sistemas compuestos

En los líquidos las moléculas mantienen cohesión, pero luego de algún tiempo están muy distantes entre sí.



# Tipos de sistemas compuestos

En los medios elásticos las moléculas se mantienen vecinas, pero su separación puede variar.



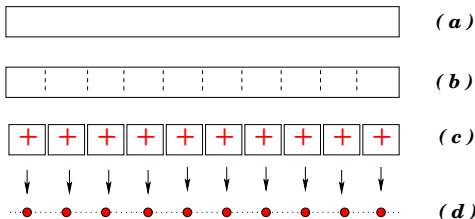
# Tipos de sistemas compuestos

En los sólidos indeformables las distancias entre moléculas vecinas no cambia.



# Partición de un sistema

Un sólido lo visualizamos como un continuo de materia, como se ilustra en la figura para el caso de una barra.



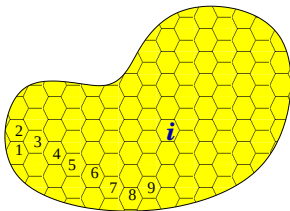
# Masa del sistema

En los sistemas newtonianos la masa es una cantidad **aditiva**.

Supongamos el sistema formado por  $N$  partículas o celdas infinitamente pequeñas.

Si la celda  $i$ -ésima tiene una masa total  $m_i$ , con  $i : 1 \rightarrow N$ , entonces la masa del sistema viene dada por

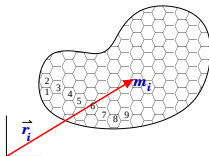
$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$



# El centro de masas

Se define la posición del centro de masas  $\vec{R}$  del sistema por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i .$$



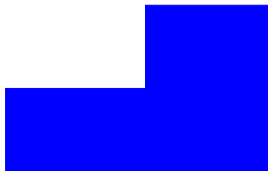
En coordenadas cartesianas, denotando

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}, \quad \vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k},$$

entonces,

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad R_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad R_z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i .$$

¿Cuál es el centro de masas de una “L” formada por dos barras, unidas perpendicularmente en uno de sus extremos?

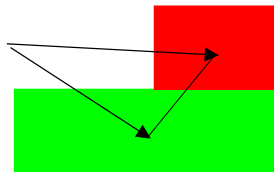




## Teorema

Si  $\vec{R}_A$  localiza el centro de masas de un sistema A de masa  $M_A$  y  $\vec{R}_B$  el de un sistema B de masa  $M_B$ , entonces el centro de masas del conjunto está dado por

$$\vec{R} = \frac{M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B}{M_A + M_B}$$



# Energía potencial gravitacional de un cuerpo

- La energía potencial gravitacional del sistema es la suma de la contribución de cada una.
- Si la celda  $i$ -ésima es de masa  $m_i$  y su coordenada con respecto al nivel cero de energía potencial es  $y_i$ , entonces la energía potencial total  $U_g$  es

$$U_g = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = Mg \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} = Mg Y_{CM} ,$$

# El momentum de un sistema

- Supongamos que los constituyentes del sistema se mueven, donde la celda  $i$ -ésima tiene velocidad  $\vec{v}_i$

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

- El *momentum total del sistema*, o *momentum del sistema*, se define como

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

# El momentum de un sistema

*El momentum  $\vec{P}$  es igual al producto de su masa total  $M$  por la velocidad de su centro de masas  $\vec{V}$ .*

Demostración

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} = \frac{1}{M} \vec{P}$$

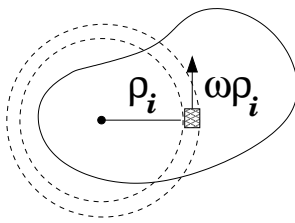
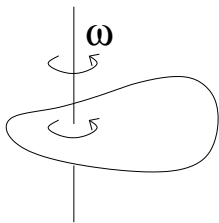
Entonces

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

# Energía cinética de rotación en torno a un eje fijo

- Consideremos un sólido rotando con velocidad angular  $\omega$  en torno a un eje fijo.
- La energía cinética es una cantidad aditiva, entonces la energía cinética total del sistema está dado por

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$



# Energía cinética de rotación en torno a un eje fijo

La celda  $i$ -ésima describe un trayecto de radio  $\rho_i$  con velocidad angular  $\omega$ .  
La rapidez es  $\omega\rho_i$ .

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \right]}_I \omega^2$$

Se define el **momento de inercia** del sólido *en torno al eje de rotación*:  $I$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 ,$$

con  $\rho_i$  la distancia al eje de la celda  $i$ -ésima, de masa  $m_i$ .  
Vamos a irlo interpretando en las próximas unidades.

# Energía cinética de rotación en torno a un eje fijo

La celda  $i$ -ésima describe un trayecto de radio  $\rho_i$  con velocidad angular  $\omega$ .  
La rapidez es  $\omega\rho_i$ .

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \right]}_I \omega^2$$

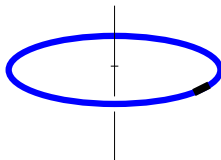
Se define el **momento de inercia** del sólido *en torno al eje de rotación*:  $I$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 ,$$

con  $\rho_i$  la distancia al eje de la celda  $i$ -ésima, de masa  $m_i$ .  
Vamos a irlo interpretando en las próximas unidades.

# Momento de inercia de un aro

Consideremos un aro de masa  $M$  y radio  $R$ . Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de este.



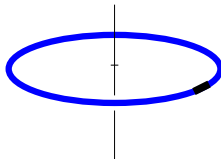
Si discretizamos el aro en  $N$  segmentos, con  $N$  muy grande.  $\rho_i = R$ , para todo  $i$ .

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = MR^2 .$$



# Momento de inercia de un aro

Consideremos un aro de masa  $M$  y radio  $R$ . Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de este.

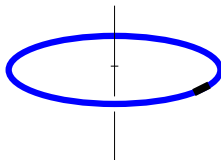


Si discretizamos el aro en  $N$  segmentos, con  $N$  muy grande.  $\rho_i = R$ , para todo  $i$ .

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = MR^2 .$$

# Momento de inercia de un aro

Consideremos un aro de masa  $M$  y radio  $R$ . Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de este.



Si discretizamos el aro en  $N$  segmentos, con  $N$  muy grande.  $\rho_i = R$ , para todo  $i$ .

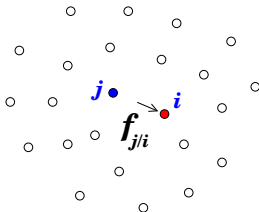
$$I = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = MR^2 .$$

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

Consideremos un sistema formado por  $N$  partículas interactuando entre sí.  
El sistema no necesariamente es un sólido; puede tener cualquier constitución.

Al analizar la  $i$ -ésima partícula, observamos que sobre ella puede actuar

- una fuerza externa que denotamos  $\vec{F}_i$ .
- las restantes  $N - 1$  partículas (via fuerzas internas).



Denotamos  $\vec{f}_{j/i}$  la fuerza de  $j$  sobre  $i$

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

La fuerza neta de todas las componentes sobre la  $i$ -ésima es

$$\sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}$$

La ecuación de movimiento de Newton para la partícula  $i$  es:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i} .$$

Sumando todas estas ecuaciones ( $\sum_i \dots$ )

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}_{\vec{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}}_{\vec{0}} .$$

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

La fuerza neta de todas las componentes sobre la  $i$ -ésima es

$$\sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}$$

La ecuación de movimiento de Newton para la partícula  $i$  es:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i} .$$

Sumando todas estas ecuaciones ( $\sum_i \dots$ )

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}_{\vec{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}}_{\vec{0}} .$$

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

Con lo anterior

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\dot{\vec{V}} = M\vec{a}.$$

donde se definió la aceleración del centro de masa

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

- 1 El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las  $N$  componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema.
- 2 Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas
- 3 El sistema **no necesariamente es rígido**, de modo que sus deformaciones ni fuerzas internas afectan el movimiento de su centro de masas.
- 4 Las fuerzas externas determinarán el movimiento del centro de masas.
- 5 Las fuerzas internas, es decir las interacciones entre las partículas, mantienen al cuerpo unido como un conjunto, lo mantienen *cohesionado*.

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

- 1 El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las  $N$  componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema.
- 2 Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas
- 3 El sistema **no necesariamente es rígido**, de modo que sus deformaciones ni fuerzas internas afectan el movimiento de su centro de masas.
- 4 Las fuerzas externas determinarán el movimiento del centro de masas.
- 5 Las fuerzas internas, es decir las interacciones entre las partículas, mantienen al cuerpo unido como un conjunto, lo mantienen *cohesionado*.



# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

- 1 El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las  $N$  componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema.
- 2 Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas
- 3 El sistema **no necesariamente es rígido**, de modo que sus deformaciones ni fuerzas internas afectan el movimiento de su centro de masas.
- 4 Las fuerzas externas determinarán el movimiento del centro de masas.
- 5 Las fuerzas internas, es decir las interacciones entre las partículas, mantienen al cuerpo unido como un conjunto, lo mantienen *cohesionado*.

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

- 1 El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las  $N$  componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema.
- 2 Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas
- 3 El sistema **no necesariamente es rígido**, de modo que sus deformaciones ni fuerzas internas afectan el movimiento de su centro de masas.
- 4 Las fuerzas externas determinarán el movimiento del centro de masas.
- 5 Las fuerzas internas, es decir las interacciones entre las partículas, mantienen al cuerpo unido como un conjunto, lo mantienen *cohesionado*.

# La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

- 1 El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las  $N$  componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema.
- 2 Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas
- 3 El sistema **no necesariamente es rígido**, de modo que sus deformaciones ni fuerzas internas afectan el movimiento de su centro de masas.
- 4 Las fuerzas externas determinarán el movimiento del centro de masas.
- 5 Las fuerzas internas, es decir las interacciones entre las partículas, mantienen al cuerpo unido como un conjunto, lo mantienen *cohesionado*.

# Movimiento parabólico

En el caso de una persona libre en el aire, las fuerzas internas que cohesionan las partes del cuerpo no son consideradas ni alteran el movimiento del CM.

La única fuerza que cuenta es el peso:  $\vec{W} = \sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g}$ .

Al aplicar  $\vec{F} = M \vec{a}_{CM}$  tenemos  $M \vec{g} = M \vec{a}_{CM}$ , o sea,

$$\vec{a}_{CM} = \vec{g}$$

EL CENTRO DE MASAS DESCRIBE UN MOVIMIENTO PARABOLICO

# Movimiento parabólico

