Sistemas Newtonianos
Métodos Numéricos

Rodrigo Soto

Departamento de Física, Universidad de Chile

Semestre Primavera 2008

$\partial f \iota$

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Problemas complejos

Dado un problema de la física (e ingeniería) típicamente se hace:

- Se construye un modelo teórico (haciendo aproximaciones)
- Se miden los parámetros necesarios para el modelo
- Se resuelve el modelo
- Se mejora eliminando algunas aproximaciones

Pero, en algún momento el modelo no se puede resolver analíticamente.

Se usa el computador.

Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2

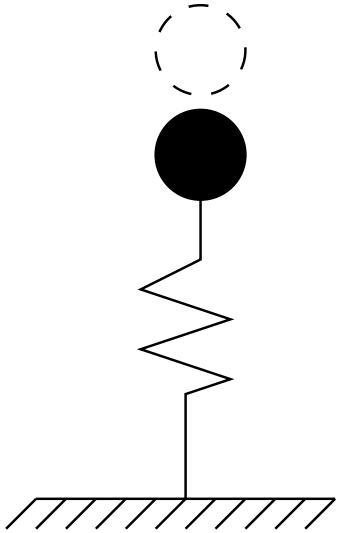
Modelo 3

Modelo 4

Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1



Soluble analíticamente (FI100).

Modelo 2

Modelo 3

Modelo 4

Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2

Modelo 3

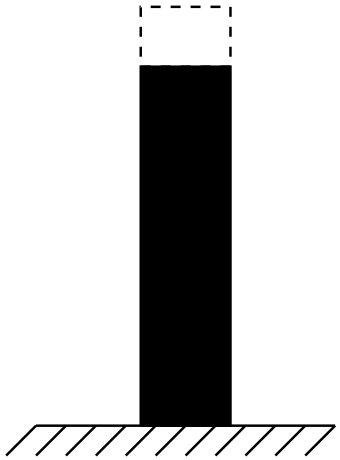
Modelo 4

Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2



Soluble analíticamente (FI31A-CI32C).

Modelo 3

Modelo 4

Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2

Modelo 3

Modelo 4

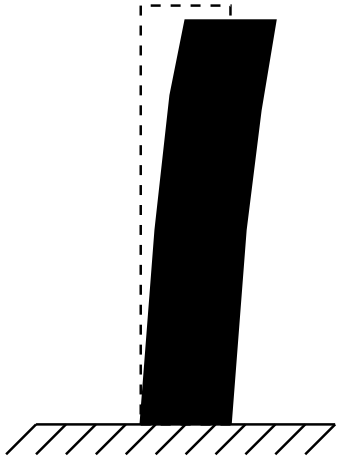
Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2

Modelo 3



Soluble analíticamente. (Euler)

Modelo 4

Ejemplo

Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2

Modelo 3

Modelo 4

Ejemplo

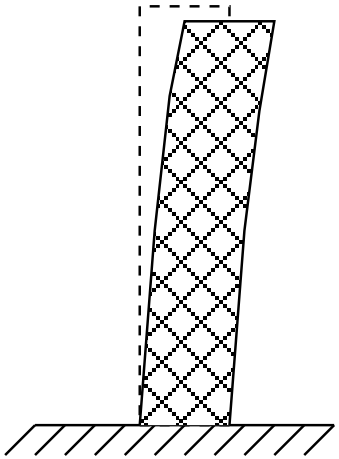
Deformación gravitacional de un edificio.:

Modelo 1

Modelo 2

Modelo 3

Modelo 4



Medio heterogéneo (vigas y concreto). Sin solución analítica (CI42A).

Otro ejemplo

Movimiento de una pelota de fútbol

- Movimiento parabólico sin roce
- Incluyendo el roce
- Incluyendo el roce y la rotación de la pelota
- Incluyendo toda la hidrodinámica

Otro ejemplo

Movimiento de una pelota de fútbol

- Movimiento parabólico sin roce
- Incluyendo el roce
- Incluyendo el roce y la rotación de la pelota
- Incluyendo toda la hidrodinámica

Otro ejemplo

Movimiento de una pelota de fútbol

- Movimiento parabólico sin roce
- Incluyendo el roce
- Incluyendo el roce y la rotación de la pelota
- Incluyendo toda la hidrodinámica

Otro ejemplo

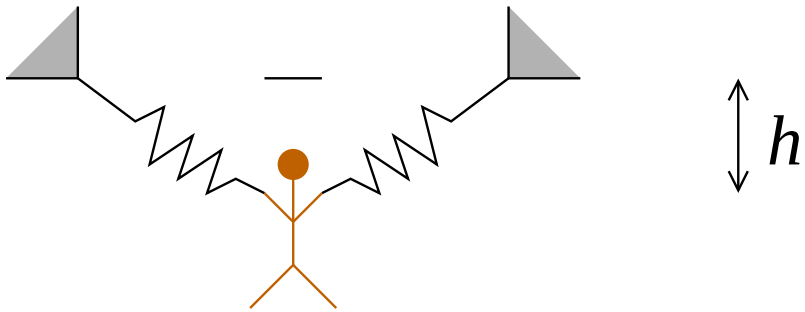
Movimiento de una pelota de fútbol

- Movimiento parabólico sin roce
- Incluyendo el roce
- Incluyendo el roce y la rotación de la pelota
- Incluyendo toda la hidrodinámica

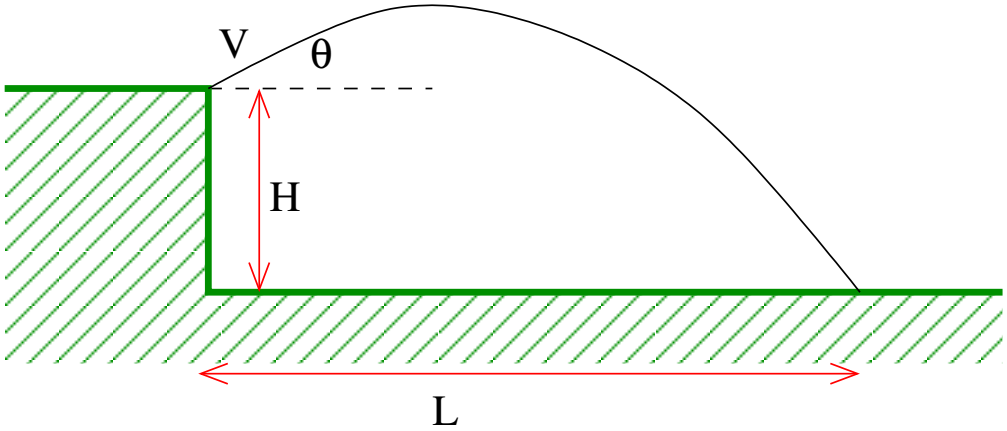
Uso de Matlab para resolver problemas complejos

En la guía se discutió el problema

- Una persona parada sobre una tarima.
- La persona está sujeta a dos resortes de largo natural L, no elongados.
- Se suelta y cae debido a la fuerza de gravedad.
- Hasta qué profundidad cae?

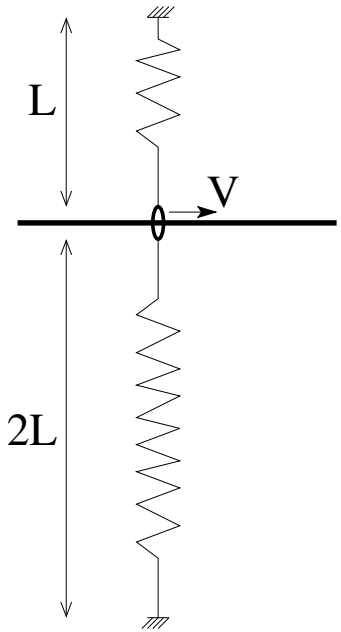


Alcance máximo



Práctica 1

- Una partícula de masa m puede deslizar sin roce por un riel horizontal.
- La partícula está unida a dos resortes idénticos de constante elástica k y largo natural L.
- Los extremos de los resortes están fijos a una distancia L y $2L$ del riel.
- Inicialmente se le da a la partícula una velocidad V hacia la derecha.



Se pide determinar el alcance de la partícula si $L = 0{,}1\mathrm{m}$, $m = 0{,}1\mathrm{kg}$, $k = 2\mathrm{N/m}$, para los siguientes valores de V : 0.3 m/s, 0.5 m/s, 1 m/s.

Análisis de las leyes de Newton

Las leyes de Newton tienen típicamente la forma

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

donde F es la fuerza. Puede depender de la posición y la velocidad.

Cómo encontrar $x(t)$?

Análisis de las leyes de Newton

Las leyes de Newton tienen típicamente la forma

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

donde F es la fuerza. Puede depender de la posición y la velocidad.

Cómo encontrar $x(t)$?

Discretización temporal

Si $x(t)$ es una función continua:

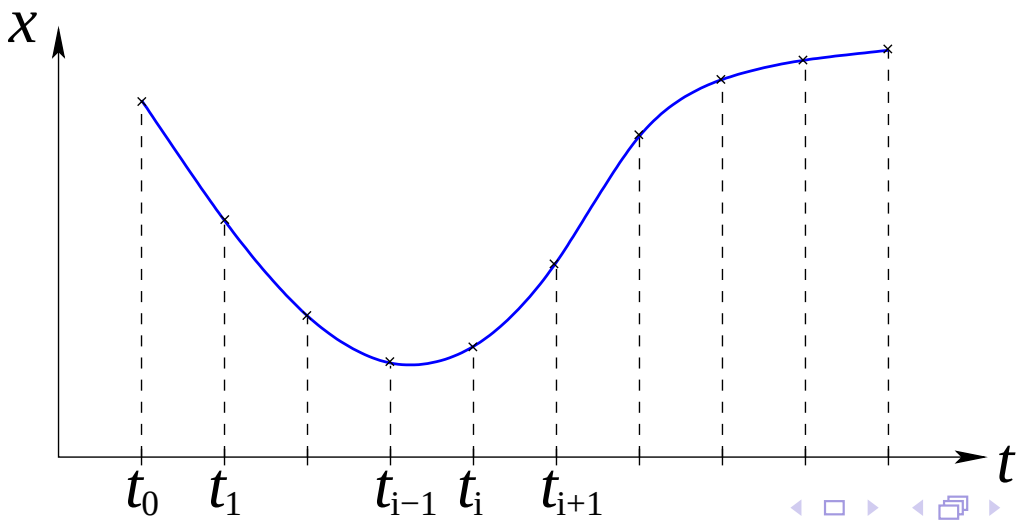
$$\text{Si} \quad t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Para representar $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$. Se *discretiza* el tiempo con espaciado pequeño Δt

$$t_i = T_A + i \times \Delta t \quad ; \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots$$

La función $x(t)$ se representa

$$x_i = x(t_i)$$



Discretización temporal

Si $x(t)$ es una función continua:

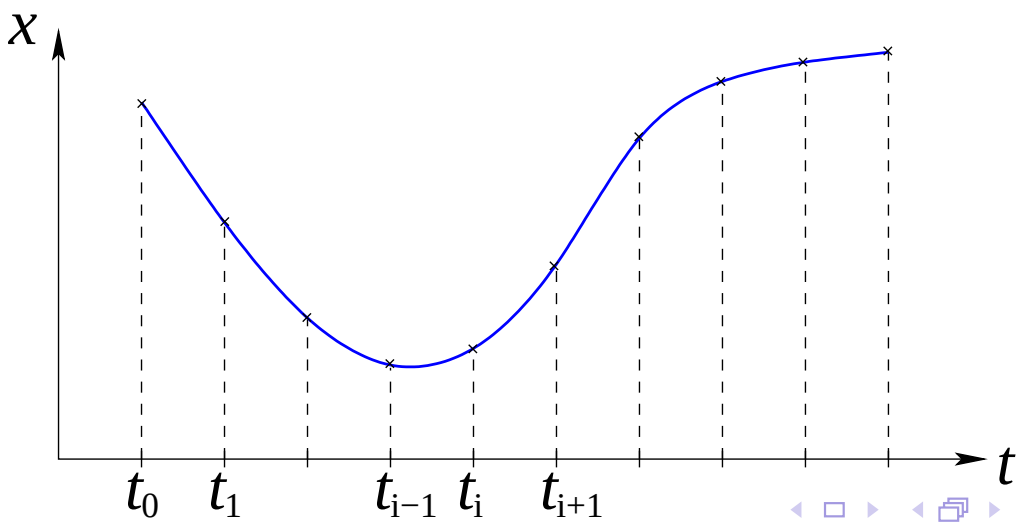
$$\text{Si} \quad t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Para representar $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$. Se *discretiza* el tiempo con espaciado pequeño Δt

$$t_i = T_A + i \times \Delta t \quad ; \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots$$

La función $x(t)$ se representa

$$x_i = x(t_i)$$



Discretización temporal

Si $x(t)$ es una función continua:

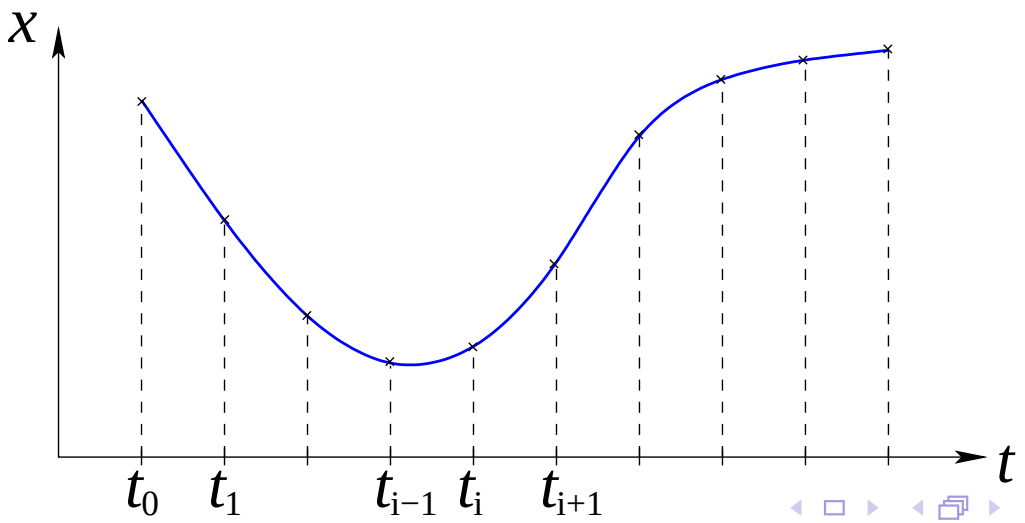
$$\text{Si} \quad t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Para representar $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$. Se *discretiza* el tiempo con espaciado pequeño Δt

$$t_i = T_A + i \times \Delta t \quad ; \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots$$

La función $x(t)$ se representa

$$x_i = x(t_i)$$



Discretización temporal

Si $x(t)$ es una función continua:

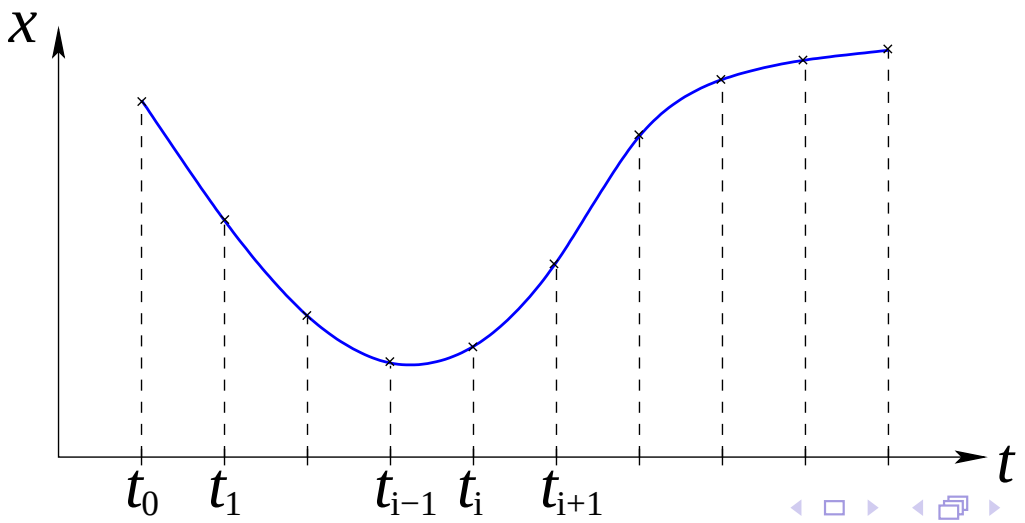
$$\text{Si} \quad t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Para representar $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$. Se *discretiza* el tiempo con espaciado pequeño Δt

$$t_i = T_A + i \times \Delta t \quad ; \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots$$

La función $x(t)$ se representa

$$x_i = x(t_i)$$



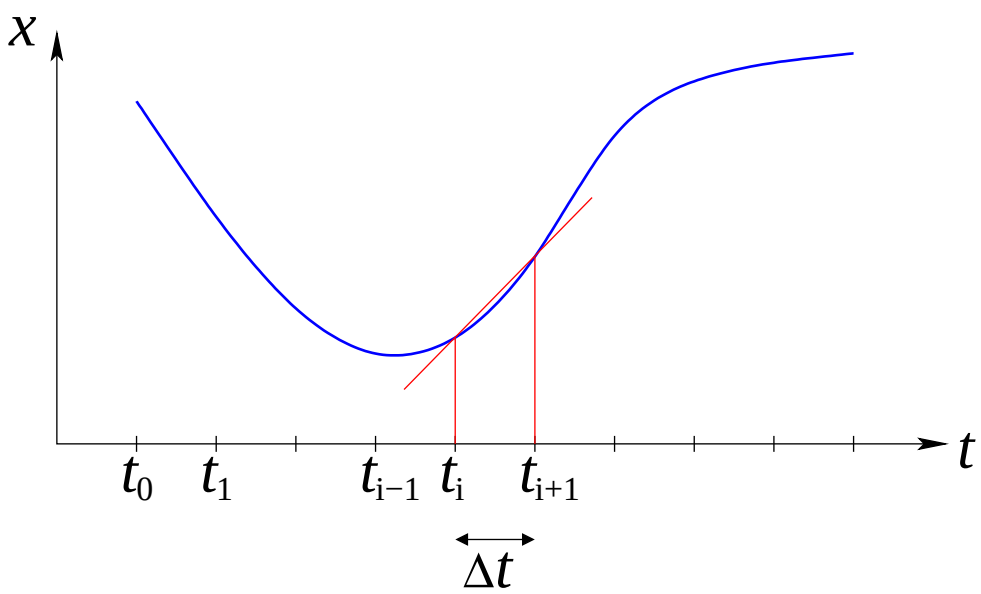
Derivadas discretas

La primera derivada de $x(t)$ es $\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$
Si Δt es chico, se puede aproximar como

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Evaluando en uno de los puntos de la discretización da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i+\Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \end{aligned}$$

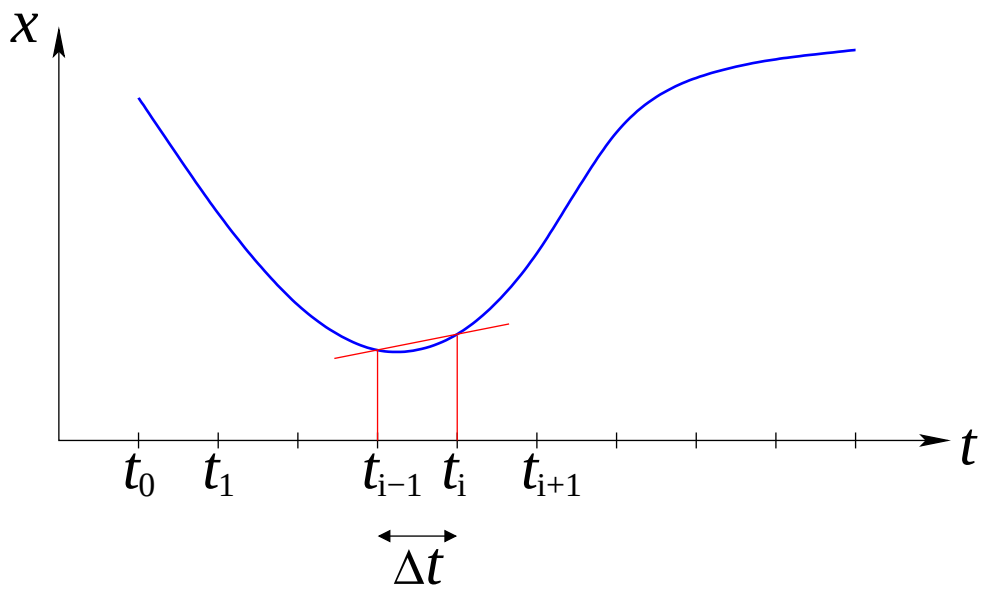


Se llama derivada hacia adelante.

Derivadas discretas

También, si se usa $h = -\Delta t$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i - \Delta t) - x(t_i)}{-\Delta t} \\
&\approx \frac{x(t_i) - x(t_i - \Delta t)}{\Delta t} \\
&\approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} \\
&\approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}
\end{aligned}$$

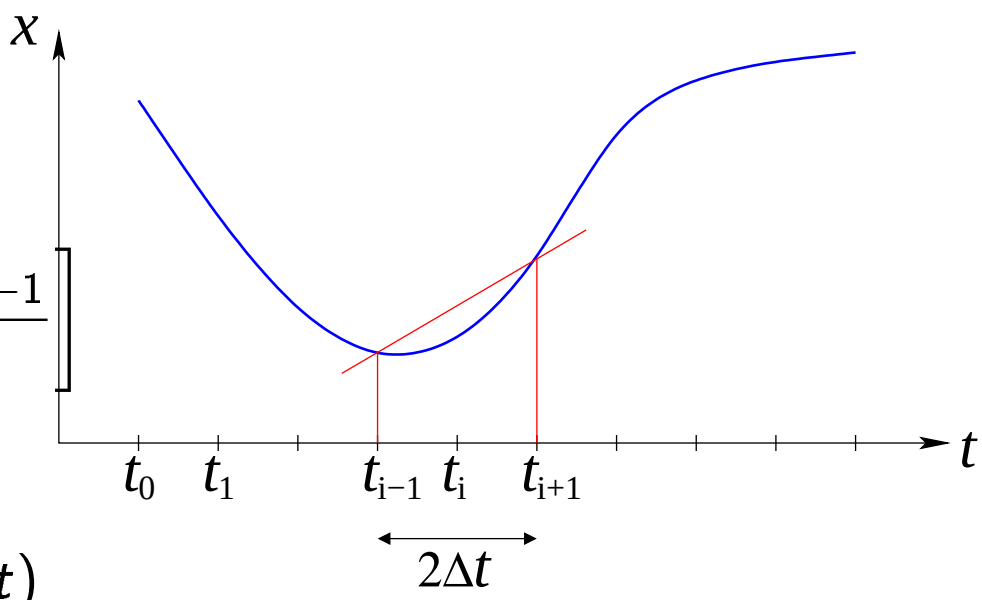


que se llama derivada hacia atrás.

Derivadas discretas

Promediando las expresiones de la derivada hacia adelante y hacia atrás, se obtiene la llamada derivada centrada

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_i) &\approx \frac{1}{2}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}+\frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta t}\right] \\ &\approx \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t}\end{aligned}$$



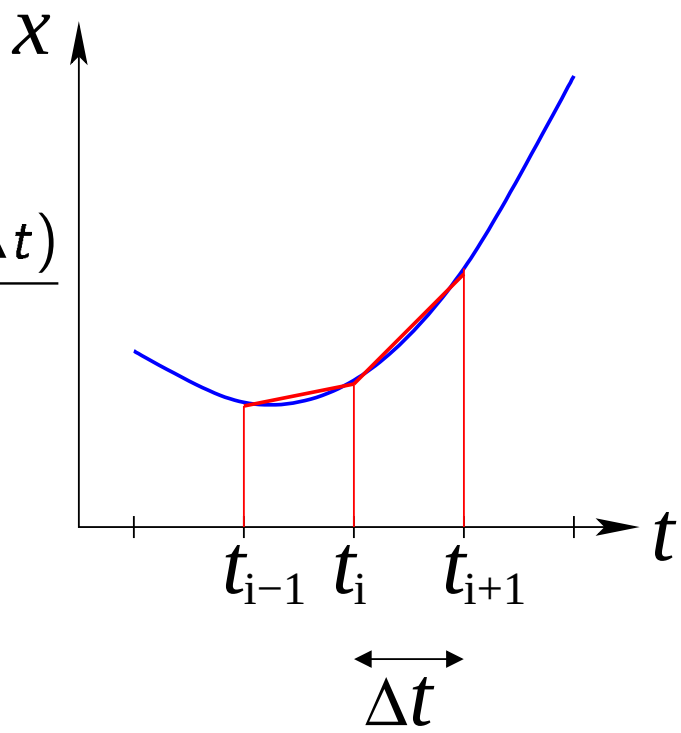
Es la más precisa

Segunda derivada

$$\ddot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t+\Delta t/2) - \dot{x}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} - \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$



Evaluando en un punto de la discretización

$$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}$$

que se llama derivada centrada de segundo orden.

Solución de la Ecuación de Newton: método de Verlet

Una partícula unida a un resorte:

$$m\ddot{x} = -kx$$

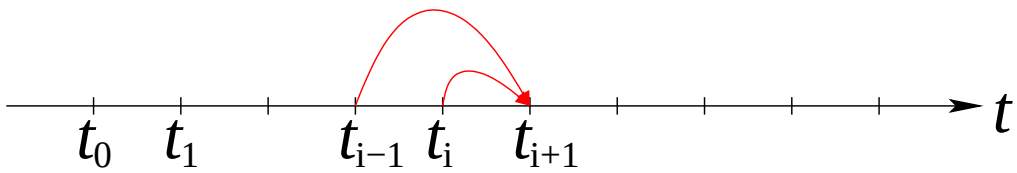
Evaluando la ecuación en t_i y usando la expresión discreta para la segunda derivada

$$m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i$$

Despejando x_{i+1}

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2$$

Iteración: dado x_i e x_{i-1} se calcula x_{i+1}.



Solución de la Ecuación de Newton: método de Verlet

Una partícula unida a un resorte:

$$m\ddot{x} = -kx$$

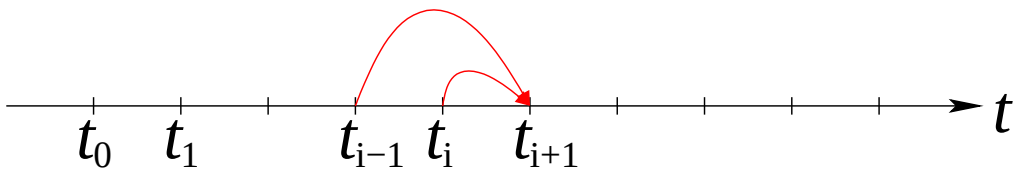
Evaluando la ecuación en t_i y usando la expresión discreta para la segunda derivada

$$m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i$$

Despejando x_{i+1}

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2$$

Iteración: dado x_i e x_{i-1} se calcula x_{i+1}.



Solución de la Ecuación de Newton: método de Verlet

Una partícula unida a un resorte:

$$m\ddot{x} = -kx$$

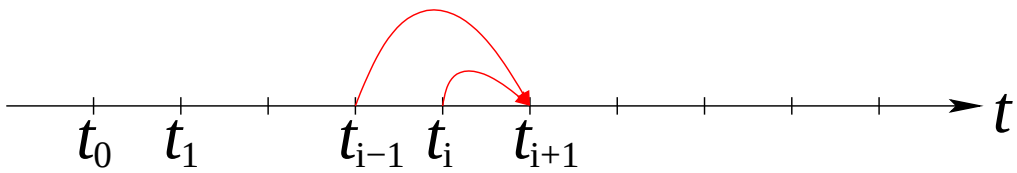
Evaluando la ecuación en t_i y usando la expresión discreta para la segunda derivada

$$m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i$$

Despejando x_{i+1}

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2$$

Iteración: dado x_i e x_{i-1} se calcula x_{i+1}.



Algoritmo

En Newton se da la posición y velocidad inicial: x_0 y v_0. Pero

$$v_0 = \dot{x}(0) = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}$$

Luego

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

Algoritmo de Verlet (L. Verlet, Physical Review 1967)

- Dados: x_0, v_0
- Se calcula: $x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$
- Se itera desde $i = 1$ hasta el tiempo final:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m} x_i \Delta t^2$$

que va entregando sucesivamente los valores de x_2, x_3, ...

Algoritmo

En Newton se da la posición y velocidad inicial: x_0 y v_0. Pero

$$v_0 = \dot{x}(0) = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}$$

Luego

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

Algoritmo de Verlet (L. Verlet, Physical Review 1967)

- Dados: x_0, v_0
- Se calcula: $x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$
- Se itera desde $i = 1$ hasta el tiempo final:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m} x_i \Delta t^2$$

que va entregando sucesivamente los valores de x_2, x_3, ...

Algoritmo

En Newton se da la posición y velocidad inicial: x_0 y v_0. Pero

$$v_0 = \dot{x}(0) = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}$$

Luego

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

Algoritmo de Verlet (L. Verlet, Physical Review 1967)

- Dados: x_0, v_0
- Se calcula: $x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$
- Se itera desde $i = 1$ hasta el tiempo final:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m} x_i \Delta t^2$$

que va entregando sucesivamente los valores de x_2, x_3, ...

En Matlab

```
>> m=1.0 %Se dan los valores de m y k
>> k=0.5
>> Tfin = 20.0 %Se resuelve hasta 20 segundos
>> dt = 0.1  %Se da el paso de tiempo Deltat
>> %Se dan las condiciones iniciales
>> x0=5.0
>> v0=2.0
>>
>> %Se define el arreglo de tiempos
>> t=0:dt:Tfin;
>> %Se define el arreglo de posiciones
>> x=zeros(1,length(t));
>> %Se ponen las condiciones iniciales
>> x(1) = x0;
>> x(2) = x0+v0*dt;
>> %Se itera usando el algoritmo de Verlet
>> for i=2:length(x)-1
>>   x(i+1) = 2*x(i)-x(i-1) - k*x(i)*dt^2/m;
>> end
>> plot(t,x)
```

Caso general

Para una fuerza cualquiera $F(x)$ el paso de iteración es

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F(x_i)\Delta t^2/m$$

Si las fuerzas dependen de la velocidad (fuerzas de roce viscosas o turbulentas) $F(x, \dot{x})$ se hace

$$F(x, \dot{x}) \approx F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)$$

La iteración es

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\Delta t^2/m$$

Caso general

Para una fuerza cualquiera $F(x)$ el paso de iteración es

$$\boxed{x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F(x_i)\Delta t^2/m}$$

Si las fuerzas dependen de la velocidad (fuerzas de roce viscosas o turbulentas) $F(x, \dot{x})$ se hace

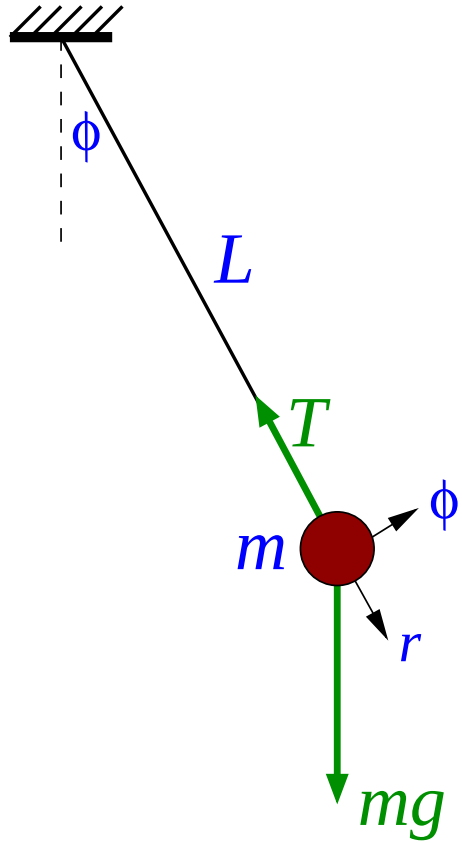
$$F(x, \dot{x}) \approx F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)$$

La iteración es

$$\boxed{x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\Delta t^2/m}$$

El movimiento de un péndulo simple se obtiene de la ecuación de torque. Las fuerzas son

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + \vec{T} \\ &= mg(-\sin\phi\hat{\phi} + \cos\phi\hat{r}) - T\hat{r}\end{aligned}$$



y el torque con respecto al punto fijo es

$$\vec{\tau} = -mgL\sin\phi\hat{z}$$

La velocidad es $\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi}$, y el momento angular

$$\vec{L} = mL^2\dot{\phi}\hat{z}$$

Luego, la ecuación de torque ($\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$) es

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL\sin\phi$$

Práctica 2

La ecuación de movimiento del péndulo simple es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin\phi$$

Considere que el péndulo se suelta desde el reposo en un ángulo inicial $\phi_0 = \pi/4$.
Use g=9.8 m/s^2, L=0.5 m., Δt=0.01s, 0.05s, 0.5s
Integre la ecuación hasta T=10s.

Se pide graficar la solución para los diferentes valores de Δt y estudiar la confiabilidad de la solución.

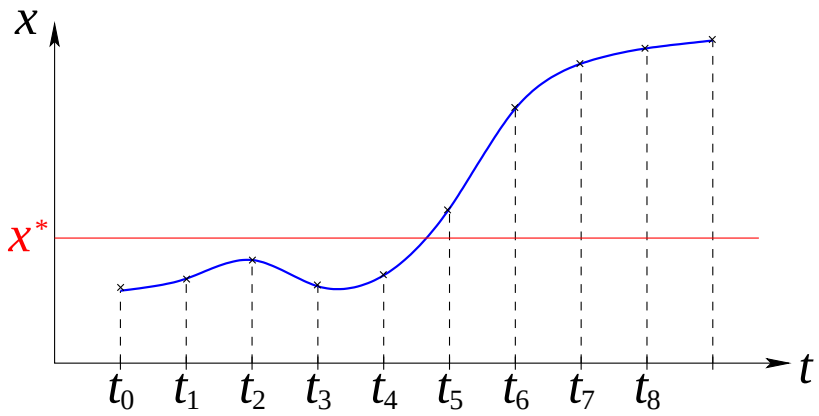
Intersección con algún valor

Por ejemplo, cuándo $x(t) = 0$?

Como la solución es discreta, en ninguno de los valores discretos coincide.

Pero $x_4 - x^* < 0$ y $x_5 - x^* > 0$.

El cambio de signo es genérico.



Criterio que se usa para determinar una intersección:

Hay intersección en el intervalo i si: $(x_i - x^*) \times (x_{i+1} - x^*) < 0$

Dado el intervalo:

$$t^* \approx t_i \approx t_{i+1} \approx (t_i + t_{i+1})/2$$

Práctica 3

Usando el programa anterior programe la detección del primer cruce en $\phi = 0$, Con este programa calcule el periodo del péndulo usando g=9.8 m/s^2, L=0.5 m., dt=0.01s y los ángulos iniciales $\phi_0 = \pi/10, \pi/4, \pi/2$.