

Pauta Ejercicio 4

Prof. Leonardo Massone

Parte a Nombramos β al ángulo entre la barra y la cuerda, que es el mismo que entre la cuerda y la vertical (triángulo isóceles). Por geometría dentro del triángulo se obtiene:

$$2\beta + (\pi/2 - \alpha) = \pi$$

$$2\beta = \pi/2 + \alpha \quad (1)$$

Por trigonometría sabemos que:

$$\text{sen } \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2}} \quad (2)$$

y además por (1):

$$\cos 2\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\cos 2\beta = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \text{sen } \frac{\pi}{2} \text{sen } \alpha$$

$$\cos 2\beta = -\text{sen } \alpha \quad (3)$$

Torque con respecto al soporte y positivo hacia adentro de la hoja

$$\frac{MgL}{2} \cos \alpha - TL \text{sen } \beta = 0 \quad (4)$$

Trabajando un poco:

$$\frac{MgL}{2} \cos \alpha = TL \text{sen } \beta$$

(1), (2) y (4), y utilizando el hecho de que $T = \frac{Mg}{2}$, $\Rightarrow$:

$$\frac{MgL}{2} \cos \alpha = \frac{MgL}{2} \sqrt{\frac{1 + \text{sen } \alpha}{2}}$$

Elevando al cuadrado:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \text{sen } \alpha$$

$$2(1 - \text{sen}^2 \alpha) - (1 + \text{sen } \alpha) = 0$$

$$(2(1 - \text{sen } \alpha) - 1)(1 + \text{sen } \alpha) = 0$$

$$(1 - 2 \text{sen } \alpha)(1 + \text{sen } \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

(No puede darse que $\sin \alpha = -1$, ya que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

Parte b La ecuación (1) ya no es válida.

Torque con respecto al soporte y positivo hacia adentro de la hoja

$$-TL \sin \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \vee \beta = \pi$$

$\beta = 0$ no tiene sentido $\Rightarrow \beta = \pi \Rightarrow$ La barra está vertical $\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Parte c

Torque con respecto al soporte y positivo hacia adentro de la hoja

$$\left(\frac{MgL}{2} + \frac{MgL}{8}\right) \cos \alpha - \frac{MgL}{2} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}} = 0$$

$$\left(\frac{MgL}{2} + \frac{MgL}{8}\right) \cos \alpha = \frac{MgL}{2} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}}$$

$$\frac{5}{4} \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}}$$

Elevando al cuadrado y multiplicando por 2:

$$\frac{25}{8}(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = (1 + \sin \alpha)$$

$$\frac{25}{8}(1 - \sin \alpha) = 1$$

$$\frac{25}{8} - \frac{25}{8} \sin \alpha = \frac{8}{8}$$

$$17 = 25 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin \frac{17}{25}}$$