FI1A2: SISTEMAS NEWTONIANOS - Otoño 2008 | EXAMEN
Departamento de Física – FCFM – U de Chile | Miércoles 9 de julio
Profs. H. Arellano, D. Mardones y N. Mujica | Pauta de corrección

Solución Problemas de selección múltiple

Observación: Poner como P4 en la planilla de notas.

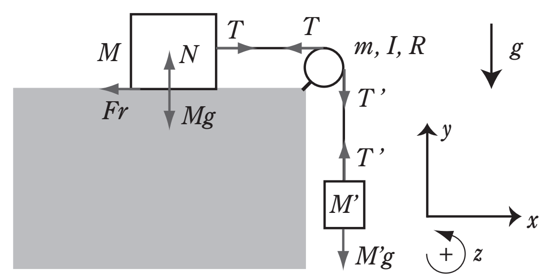
Prob.	1	2	3*	4	5	6	7	8	9	10
Resp.	c	a	-	a	c	b	d	c	d	c

* Se reconoce que el enunciado está mal redactado. Se elimina este problema.

Solución Problema 1

a) Todo en reposo. Ecuación de movimiento de masa M según x:

$$0 = T - F_r.$$



Ecuación de movimiento de masa M según y:

$$0 = N - Mg.$$

Ecuación de torque de la polea de masa m según z:

$$0 = RT - RT'.$$

Ecuación de movimiento de masa M' según y:

$$0 = T' - M'g.$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene $T = T' = M'g = F_r$. Para que el bloque no se mueva, $F_r \leqslant \mu_e N = \mu_e Mg$. Luego, el valor máximo de M' está dado por la igualdad en esta última relación, por lo tanto $\max(M') = \mu_e M$.

Puntaje sugerido:

- Ecuaciones de tres cuerpos en reposo: 1 pt.
- Condición $F_r = \mu_e N$ y $\max(M') = \mu_e M$: 1 pt.

b) En esta parte $M' = 2\mu_e M$, por lo que el bloque acelera hacia la derecha ($x > 0$), la polea gira en el sentido horario ($z < 0$), y la masa suspendida desciende ($y < 0$) y acelera aumentando su rapidez, pero con velocidad negativa (aceleración negativa). La ecuación de movimiento de masa M según x:

$$Ma_x = T - \mu_d N.$$

Ecuación de movimiento de masa M según y es igual que antes:

$$0 = N - Mg.$$

Ecuación de torque de la polea de masa m según z:

$$I\alpha = RT - RT',$$

con $I = mR^2/2$. Finalmente, la ecuación de movimiento de masa M' según y:

$$Ma_y = T' - M'g.$$

Según el balance de fuerzas y nuestro sistema de referencia, $a_x > 0$, $\alpha < 0$ y $a_y < 0$. Debido a que la cuerda no resbala sobre la polea, se tiene

$$a_x = -R\alpha = -a_y$$

Se tienen entonces 3 ecuaciones y 3 incógnitas (a_x, T y T'). Haciendo el álgebra correspondiente se obtiene:

$$\frac{T'}{T} = \frac{M'(m + 2M + 2M\mu_d)}{M(2M' + (m + 2M')\mu_d)}$$

Vale la pena notar que en el límite $m \to 0$, se obtiene $T'/T \to 1$. Reemplazando $M' = 2\mu_e M$ el resultado es

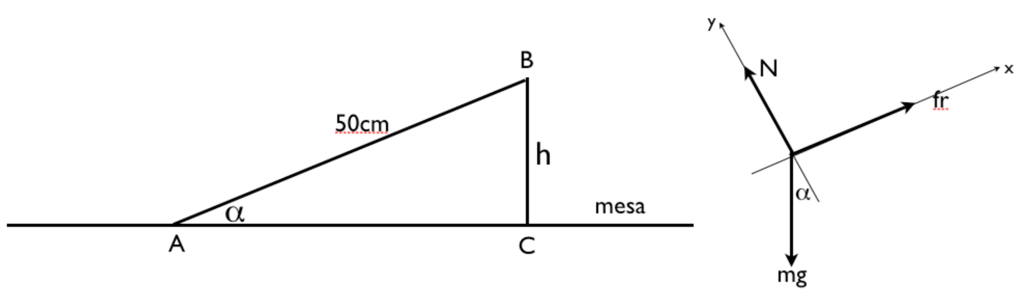
$$\frac{T'}{T} = \frac{2(m + 2M + 2M\mu_d)\mu_e}{4M\mu_e + \mu_d(m + 4M\mu_e)}.$$

Puntaje sugerido:

- Ecuaciones de tres cuerpos en movimiento: 2 pt.
- Condiciones $a_x = -R\alpha = -a_y$: 1pt.
- Expresion final T'/T: 1 pt

Solución Problema 2

a) La figura indica la geometría del problema (izquierda) y el DCL junto al sistema de referencia utilizado. Notamos que la mesa se supone horizontal, es decir perpendicular a la aceleración de gravedad.



A partir del DCL con aceleración nula obtenemos $N = mg\cos\alpha$ y $f_r = mg\sin\alpha$.

Para el ángulo α límite en que comienza a resbalar el cuerpo se cumple la igualdad $f_r = \mu_e N$, luego despejamos

$$\mu_e = \tan\alpha = \frac{h}{x},$$

donde $x = \sqrt{50^2 - h^2}$ es el largo del cateto horizontal.

b) De la figura anterior obtenemos $\sin\alpha = \frac{h}{50\text{ cm}}$. Completamos entonces la tabla con valores de $\alpha[i]$ y $\mu_e[i]$ (o bien de $x[i]$ y $\mu_e[i]$). De la tabla obtenemos

$$\langle\alpha\rangle = 12{,}2^\circ, \sigma_\alpha = 0{,}6^\circ$$

$$\langle\mu_e\rangle_0 = 0{,}22, \sigma_\mu = 0{,}01$$

c) El ángulo de inclinación correcto para el DCL de la figura debiera ser $\beta = \alpha + \delta\alpha$, donde $\delta\alpha = 1{,}2^\circ \pm 0{,}5^\circ$ del enunciado del problema. Notamos que se cumple $\delta\alpha = 0{,}021$ rad $<< 1$. Luego el valor correcto del coeficiente de roce debiera ser $\mu_e = \tan\beta = \tan(\alpha + \delta\alpha)$. Usando la expresión para $\tan(a + b)$ con $b << 1$ indicada en el enunciado obtenemos

$$\mu_e(\text{real}) = \tan\alpha + \sec^2\alpha\delta\alpha = \langle\mu_e\rangle_0 + \sec^2\alpha\delta\alpha = 0{,}22 + 0{,}022,$$

luego concluímos que que coeficiente de roce real es un 10 % superior al coeficiente de roce determinado experimentalmente.

Podemos estimar también el error del valor real de μ_e. Para ello estimamos primero el error en el ángulo β: $\delta\beta = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}5^2} = 0{,}78^\circ = 0{,}014$ rad. Luego $\mu_e = \tan(\beta \pm \delta\beta) \sim \tan\beta \pm \sec^2\beta\delta\beta$ de donde el error $\sigma_\mu = \sec^2\beta\delta\beta \approx 0{,}015$.

$$\mu_e(\text{real}) = 0{,}24 \pm 0{,}02.$$

Atención que dependiendo si se hacen aproximaciones en el camino o al final, el resultado de σ_μ puede dar $\approx 0{,}014 \approx 0{,}01$ lo que también se puede considerar como válido.

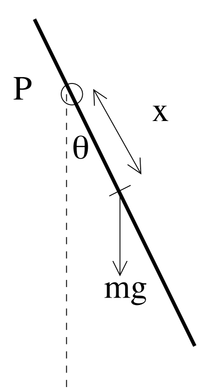
Puntaje sugerido:

- Cada parte tiene 2 pt.

Solución Problema 3

- Para el movimiento de barra aplicamos torques c/r a P: $\tau = I\ddot{\theta} \quad \rightarrow -\frac{Mgx}{I}\sin\theta = I\ddot{\theta}$, donde x representa distancia entre P y c.m. de la barra.
- El momento de inercia (usando Steiner): $I = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$
- Pequeãs oscilaciones y simplificando términos

$$\ddot{\theta} + \frac{gx}{L^2/12 + x^2}\theta = 0$$



- El período (g=10; x=1/4; L=1, en unidades S.I.):

$$\omega^2 = \frac{gx}{L^2/12 + x^2} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{L}{12x} + \frac{x}{L}\right) \rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{12/4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7\pi}{6\sqrt{10}} \approx 1{,}16s$$

- Dado un nuevo período $T' = 1{,}02T$ (incremento en 2 %), buscamos x asociado. Planteamos (y buscamos $z = x'/L$)

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{L}{12x'} + \frac{x'}{L}\right) \rightarrow 1{,}02\,\frac{7\pi}{6\sqrt{10}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{12z} + z\right)$$

- Resolvemos (b=7.14):

$$7{\cdot}1{,}02 = \frac{1}{z}{+}12z \quad \rightarrow \qquad 12\,z^2{-}bz{+}z = 0 \quad \rightarrow \quad z = (7{,}14{\pm}\sqrt{7{,}14^2 - 4\cdot 12})/24 = (7{,}14{\pm}1{,}73)/24$$

- La suma: $z = 0{,}37 = x'/L$, vale decir a 13 cm del extremo superior. La resta: $z = 0{,}23 = x'/L$, es decir, a 27 cm del extremo superior.

<u>Ponderación estimativa:</u>

- 1 Pto Ec. de torques (o energía)
- 1 Pto. Steiner
- 1 Pto. pequeñas oscilaciones
- 1 Pto. cálculo de perí odo
- 2 Ptos. las dos nuevas posiciones (1 pto por cada una).