

Pauta Ejercicio 6

Prof. Leonardo Massone

Parte a Primero hay que hacer el DCL de los cuerpos, notando que acelera hacia abajo, tomaremos los signos positivos en el sentido del movimiento:

DCL M

$$\begin{aligned}\hat{x}) \quad T_2 + Mg \operatorname{sen} \alpha &= Ma_M \\ \hat{y}) \quad N &= Mg \cos \alpha\end{aligned}\tag{1}$$

DCL m

$$\hat{y}) \quad mg - T_1 = ma_m\tag{2}$$

Ahora falta hacer torque sobre la polea. Llamemos $\ddot{\theta}$ a la aceleración angular de la polea. (Dado que ya existe un α ; aunque por usar α de nuevo no se descontó puntaje ya que uno entiende a que se refiere con eso, sin embargo para no confundir con esta pauta la llamaremos de otra forma).

Torque sobre la polea c/r al CM

Tomando torque positivo hacia adentro de la hoja,

$$\hat{y}) \quad T_1 R - T_2 R = I \ddot{\theta}\tag{3}$$

Ahora bien, la cuerda no se estira, luego el sistema se mueve con la misma aceleración:

$$\Rightarrow a_m = a_M = a\tag{4}$$

y además como no resbala por la polea:

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{R}\tag{5}$$

Luego tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incognitas (T_1, T_2, a).

Si hacemos: (1) + (3)/R

$$\Rightarrow Mg \operatorname{sen} \alpha + T_1 = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)a$$

$$(2) \Rightarrow a = g - \frac{T_1}{m}\tag{6}$$

$$\Rightarrow Mg \sin \alpha + T_1 = (M + \frac{I}{R^2})(g - \frac{T_1}{m})$$

$$T_1 \left[1 + \frac{M + \frac{I}{R^2}}{m} \right] = (M + \frac{I}{R^2} - M \sin \alpha)g$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \left[\frac{M + \frac{I}{R^2} - M \sin \alpha}{M + \frac{I}{R^2} + m} \right] mg}$$

Parte b Reemplazando el valor de T_1 en (6):

$$\Rightarrow \boxed{a = g \left[\frac{m + M \sin \alpha}{M + \frac{I}{R^2} + m} \right]}$$

Luego se sabe que para un movimiento acelerado lo que demora en caer un cuerpo desde el reposo a una aceleración a es $t = \sqrt{\frac{2H}{a}}$. Finalmente:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2H(M + \frac{I}{R^2} + m)}{g(m + M \sin \alpha)}}$$

Parte c Los valores de a y T_1 no presentan problemas ya que ambos son siempre positivos ($\forall \alpha \in [0, \pi/2)$). Falta ver si se cumple siempre que $T_2 \geq 0$. Para eso, usando (1), despejando T_2 y reemplazando a , se tiene:

$$T_2 = M(a - g \sin \alpha) = Mg \left[\frac{m + M \sin \alpha - (M + \frac{I}{R^2} + m) \sin \alpha}{M + \frac{I}{R^2} + m} \right] = Mg \left[\frac{m(1 - \sin \alpha) - \frac{I}{R^2} \sin \alpha}{M + \frac{I}{R^2} + m} \right]$$

Luego

$$\boxed{T_2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{I \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)R^2}}$$