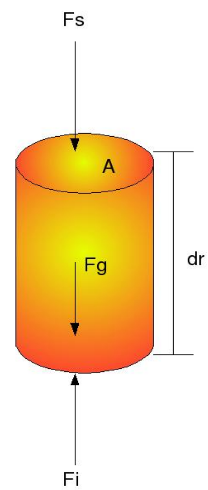
Pauta Auxiliar Unidad 7B

2 de diciembre de 2008

Problema 1

Tomemos un cilindro de volumen dV y masa dm, que se encuentra a una distancia r del centro de la estrella:



DCL sobre el cilindro (imponemos equilibrio)

$$\vec{F_i} + \vec{F_s} + \vec{F_g} = 0$$

F_i va en sentido contrario a F_s. Luego,

$$\vec{F_i} + \vec{F_s} = -dF$$

El signo menos va porque la fuerza ejercida sobre el cilindro disminuye a medida que aumenta r.

Por la definición de presión, tenemos:

$$(-dP)A = dF$$

Remplazando en la ecuación del DCL, se tiene:

$$(dP)A = F_g = -\frac{GM_r(dm)}{r^2}$$

Para cambiar el dm que sale en la ecuación, ocupamos la fórmula de densidad:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Luego,

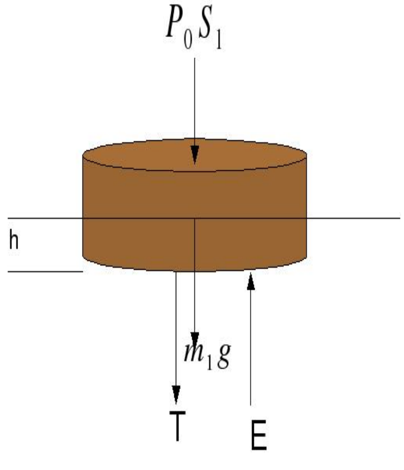
$$\frac{(dP)A}{dV} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}$$

donde $\frac{A}{dV} = dr$. Con esto, se llega a la ecuación pedida (ahora saben algo de astronomía XD).

El signo menos de la ecuación indica que la presión disminuye a medida que aumenta la distancia desde el centro (aumenta al altura). Esto es consistente con la dependencia de la presión con la altura vista en clases. Otra forma de verlo es que a medida que se aleja del centro de la estrella, un punto debe soportar menos masa sobre sí, y por ende menos presión.

Problema 2

DCL para el corcho:



Considerando el eje positivo hacia abajo, tenemos que:

$$P_oS_1 + m_1g + T - E = 0$$

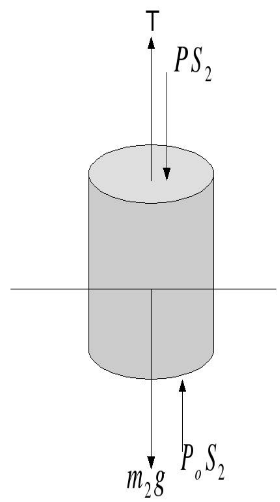
El empuje es:

$$E = \rho g h S_1$$

Luego, la ecuación para el DCL es:

$$P_o S_1 + m_1 g + T - \rho g h S_1 = 0$$

DCL para el cilindro de aluminio:



En este caso no usaremos le definición de empuje para calcular la fuerza del fluido sobre el cilindro de aluminio, sino que ocuparemos la fórmula que relacione la presión con la prfundiad $P = \rho g h$. Notemos la fuerza neta que el fluido ejerce en el cilindro de aluminio actúa en la parte superiro de éste, ya que la fuerza ejercida en las paredes del cilindro se cancelan.

Luego, la ecuación del DCL es:

$$m_2 g + \rho g (h + L) S_2 - P_o S_2 - T = 0$$

Despejando la tensión de una ecuación, remplazandola en la otra y resolviendo para h, se obtiene:

$$h = \frac{P_o(S_2 - S_1) - g(m_1 + m_2) - \rho g L S_2}{\rho g (S_2 - S_1)}$$

En la ecuación vemos que la presión atmosférica influye en el valor de h. Si las dos secciones tranversales fueran iguales, $h \to \infty$, lo que significa que el corcho se hunde y no se detiene hasta llegar al fondo del recipiente.

Problema 3

La idea es hacer que el obejto con forma de “L” quede completamente sumergido y estable, es decir, que no siga hundiéndose ($\sum F = 0$) y que no rote ($\sum \tau = 0$).

El peso total (hielos + partícula) actúa sobre el centro de masas del sistema, mientras que el empuje actúa sobre el centro de masas del VOLUMEN DESPLAZADO. Esto se debe a que el empuje sólo depende del volumen desplazado y no de la masa de los componenetes del sistema.

Calculemos la sumatoria de fuerzas. Tenemos que:

$$(3m_h + m)g = E$$

donde m es la amsa de la partícula y m_h es la masa del cubo de hielo que vale:

$$m_h = \rho_h \cdot a^3$$

con ρ_h densidad del hielo y a lado del cubo.

El volumen desplazado equivale a la suma de tres cubos de hielo. Leugo, el empuje vale:

$$E = \rho_a g \cdot 3a^3$$

con ρ_a la densidad del agua.

Luego, m vale:

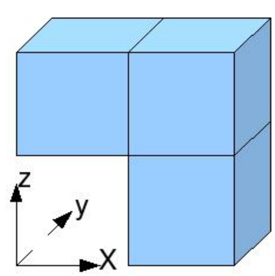
$$m = 3a^3(\rho_a - \rho_h)$$

Remplazando por los valores numéricos:

$$m = 3 \cdot (0,25)^3 \cdot (1000 - 920) = 3,75\ kg$$

Para calcular la posición que debe ubicarse la partícula, ocuparemos torque.

Lo primero que se debe hacer es calcular el centro de masas del sistema (CM_s) y el centro de masas de los hielos (CM_h). Ubicaremos el sistema de referencia como se indica en la figura:



Luego,

$$CM_h = \frac{m_h(a/2\hat{\imath} + a/2\hat{\jmath} + 3a/2\hat{k}) + 2m_h(3a/2\hat{\imath} + a/2\hat{\jmath} + a\hat{k}}{3m_h}$$

$$\Rightarrow CM_h = \frac{7a}{6}\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath} + \frac{7a}{6}\hat{k}$$

$$CM_s = \frac{m_h(a/2\hat{\imath} + a/2\hat{\jmath} + 3a/2\hat{k}) + 2m_h(3a/2\hat{\imath} + a/2\hat{\jmath} + a\hat{k} + m(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{3m_h + m}$$

$$\Rightarrow CM_s = \frac{(7am_h/2 + mx)\hat{\imath} + (3am_h/2 + my)\hat{\jmath} + (7am_h/2 + mz)\hat{k}}{3m_h + m}$$

con $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = R_p$ la posición de la partícula.

Haremos la sumatoria de torques con respecto a CM_s. Luego, la posición de la partícula con respecto a ese punto es:

$$CM_s - CM_h = \frac{m(6x - 7a)}{6(3m_h + m)}\hat{\imath} + \frac{m(2y - a)}{2(3m_h + m)}\hat{\jmath} + \frac{m(6z - 7a)}{6(3m_h + m)}\hat{k}$$

La posición de CM_h con respecto a CM_s es:

$$CM_s - R_p = \frac{m_h(7a - 6x)}{2(3m_h + m)}\hat{\imath} + \frac{m_h(3a - 6y)}{2(3m_h + m)}\hat{\jmath} + \frac{m_h(7a - 6z)}{2(3m_h + m)}\hat{k}$$

Luego, el torque con respecto a CM_s es:

$$0 = (CM_s - R_p) \times E\hat{\jmath} + (CM_s - CM_h) \times (-mg\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{3a^3\rho_a m_h g}{2(3m_h + m)}(7a - 6x)\hat{k} - \frac{3a^3\rho_a m_h g}{2(3m_h + m)}(7a - 6z)\hat{\imath} - \frac{m^2 g}{6(3m_h + m)}(6x - 7a)\hat{k} + \frac{m^2 g}{6(3m_h + m)}(6z - 7a)\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{64a^4\rho_a m_h g + 7m^2 ga - 6x(9a^3\rho_a m_h g + m^2 g)}{6(3m_h + m)}\hat{k} + \frac{64a^4\rho_a m_h g - 7m^2 ga - 6z(9a^3\rho_a m_h g - m^2 g)}{6(3m_h + m)}\hat{\imath}$$

Luego, para que el vector valga 0, todas sus componentes deben ser igual a 0. Luego, imponemos:

$$64a^4\rho_a m_h g + 7m^2 ga - 6x(9a^3\rho_a m_h g + m^2 g) = 0$$

$$64a^4\rho_a m_h g - 7m^2 ga - 6z(9a^3\rho_a m_h g - m^2 g) = 0$$

De aquí se deduce que:

$$x = \frac{64a^4\rho_a m_h g + 7m^2 ga}{6(9a^3\rho_a m_h g + m^2 g)}$$

$$z = \frac{64a^4\rho_a m_h g - 7m^2 ga}{6(9a^3\rho_a m_h g - m^2 g)}$$

$$y = \text{indeterminado, puede ser cualquiera}$$