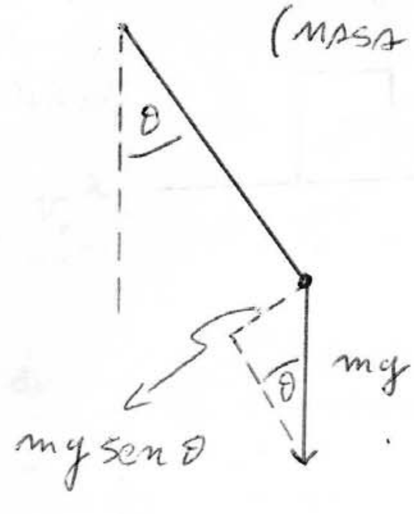
1

i)

(MASA PUNTUAL)



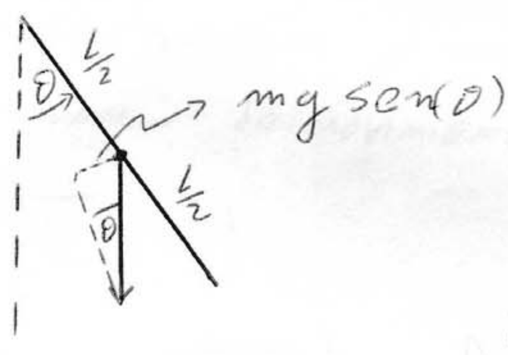
$$-mg\,sen(\theta) = m\ddot{\theta}L$$

$$\rightsquigarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{g/L}$$

ii)

(BARRA)



$$\tau = -\frac{L}{2}mg\,sen(\theta) \approx -\frac{mgL}{2}$$

$$\tau = I\ddot{\theta}, \quad I = \frac{1}{3}mL^2$$

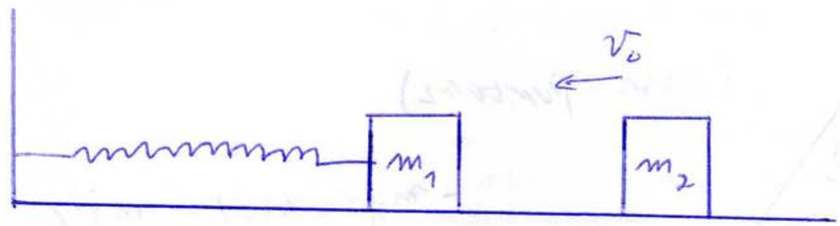
$$-\frac{mgL}{2}\theta = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} \to \ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta =$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$\omega_2 > \omega_1$$

→ AL PARARSE AUMENTA LA VELOCIDAD

P. 2



a)

Conservacion del momentum:

$$-m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{-m_2}{m_1+m_2} v_0$$

Ecuacion de movimiento:

$$F = -kx \longrightarrow -kx = (m_1+m_2)\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_1+m_2} x = 0 \longrightarrow x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\, t + \phi\right)$$

$$\dot{x}(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\, \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\, t + \phi\right)$$

C.I

$$x(0) = A\cos(\phi) = 0 \longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \frac{-m_2}{m_1+m_2} v_0 \longrightarrow A = \frac{m_2\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{k}\,(m_1+m_2)} v_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \;;\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{k}}$$

Conservacion del momentum:

$$-m_2 v_0 = m_1 v_f + m_2 v_2$$

Conservacion de energia:

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Resolviendo las ecuaciones se tiene:

$$v_2 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_0 \quad ; \quad v_f = \frac{-2 m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

Analogo al caso anterior y como solo oscila m_1 la solucion de la ecuacion de movimiento es.

$$X(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1}}\, t + \phi\right)$$

$$\dot{X}(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m_1}}\, \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m_1}}\, t + \phi\right)$$

$$X(0) = A\cos(\phi) = 0 \longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

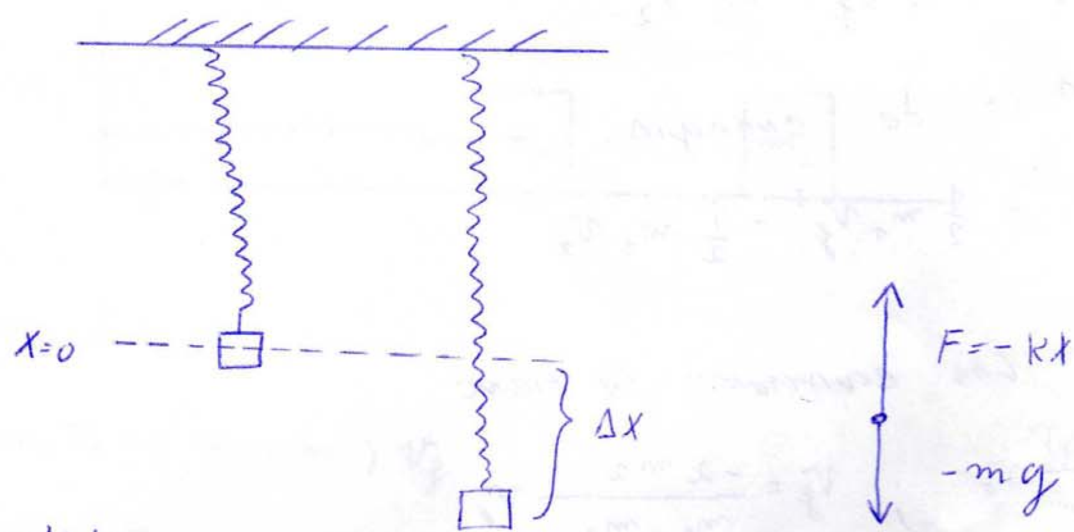
$$\dot{X}(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m_1}} = \frac{-2 m_2}{m_1 + m_2} v_0 \longrightarrow A = \frac{2 m_2 \sqrt{m_1}}{(m_1 + m_2)\sqrt{k}} v_0$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi \sqrt{m_1}}{\sqrt{k}}$$

c) $$X_a(t) = \frac{m_2 \sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{k}(m_1 + m_2)} v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$X_b(t) = \frac{2 m_2 \sqrt{m_1}}{(m_1 + m_2)\sqrt{k}} v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

3



$F = -k\Delta x - mg = 0 \rightarrow \Delta x = -\dfrac{mg}{k}$

$\sum F = m\ddot{x} \rightarrow -kx - mg = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x + g = 0$

mbio de variable: $\dfrac{k}{m}y = \dfrac{k}{m}x + g \quad \Big/ \dfrac{d^2}{dt^2}$

$\dfrac{k}{m}\ddot{y} = \dfrac{k}{m}\ddot{x} \rightarrow \ddot{y} = \ddot{x}$

$y = x + \dfrac{mg}{k}$

emplaza en la EDO y queda.

$\ddot{y} + \dfrac{k}{m}y = 0 \rightarrow y(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right)$, Volvemos con el cambio de variable $x = y - \dfrac{mg}{k}$

$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right) - \dfrac{mg}{k}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}$

$$\dot{X}(t) = -A\sqrt{\frac{K}{m}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t+\phi\right)$$

$$X(0) = A\cos(\phi) - \frac{mg}{K} = 0$$

$$\dot{X}(0) = -A\sqrt{\frac{K}{m}}\,\text{sen}(\phi) = 0 \longrightarrow \phi = 0$$

$$X(0) = A - \frac{mg}{K} = 0 \longrightarrow A = \frac{mg}{K}$$

$$X(t) = \frac{mg}{K}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) - \frac{mg}{K}$$

$$\dot{X}(t) = -\frac{mg}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m\,\dot{X}_{(t)}^2$$

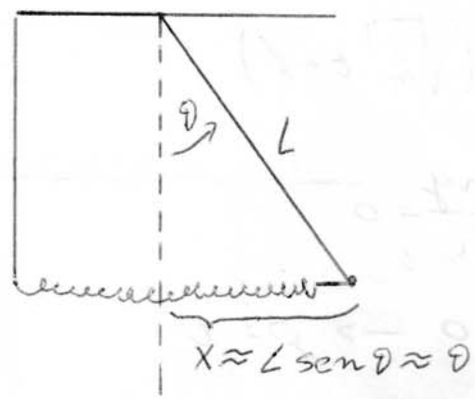
$$V(t) = \frac{1}{2}K\,X_{(t)}^2$$

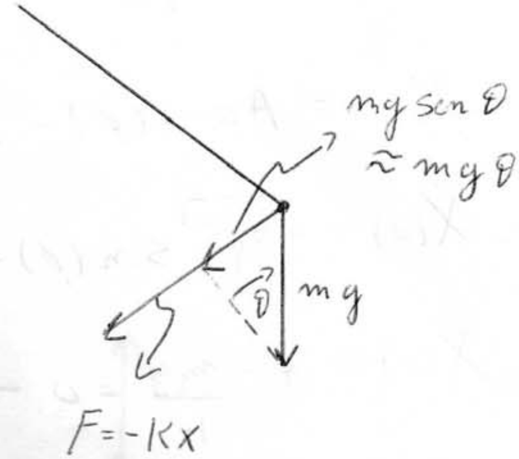
d)

La velocidad maxima corresponde a la amplitud de la funcion de la velocidad $\dot{X}_{(t)}$ es decir

$$V_{max} = \frac{mg}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

P.4





$$\Sigma F = -KL\theta - mg\,\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(KL - mg)}{mL}\,\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{KL-mg}{mL}}$$

P.5

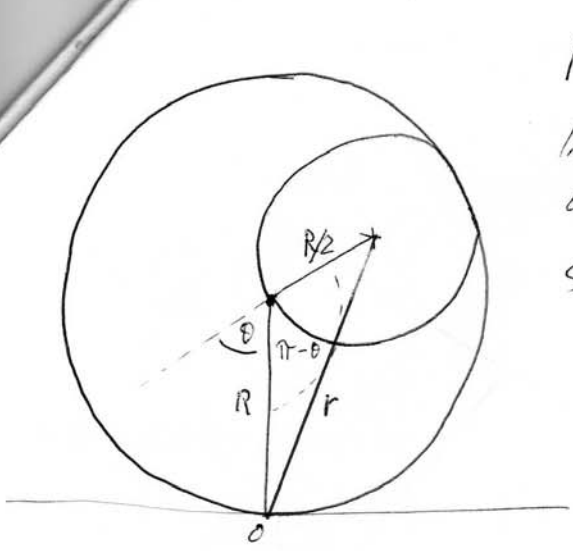
Se consideran 2 cilindros uno de masa positiva y uno de masa negativa las masas serian

$m_o = -\rho\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot D$ D: largo cilindro

$m_1 = \rho\pi R^2 D$ ρ: densidad

El centro de masa desde el centro del cilindro grande es:

$$CM = \frac{(\rho\pi R^2 D)\,0 + \left(-\rho\pi \frac{R^2}{4} D\right)\frac{R}{2}}{\rho\pi R^2 D + \left(-\rho\pi \frac{R^2}{4} D\right)} = -\frac{R}{6}$$



Primero se debe obtener el momento de inercia con respecto al pto de contacto (o) con la superficie. Para esto se usa Steiner.

Para obtener el momento de inercia se busca primero el de la perforación (masa negativa), para eso se necesita tener r, usando la ley del coseno:

$$I_o = I_{cm} + M_o r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2R\left(\frac{R}{2}\right)\cos(\pi - \theta)$$

$$= R^2 + \frac{R^2}{4} + R^2\cos(\theta) = R^2\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{2}\sqrt{5 + 4\cos\theta}$$

$$I_o = \frac{1}{2}m_o\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_o\left(\frac{R}{2}\sqrt{5+4\cos\theta}\right)^2 = \frac{m_o R^2}{4}\left(\frac{1}{2} + 5 + 4\cos\theta\right) = \frac{m_o R^2(11 + 8\cos\theta)}{8}$$

$$I_o = \left(-\frac{\rho\pi R^2 D}{16}\right)\cdot\frac{R^2}{8}\cdot(11 + 8\cos\theta) = \frac{-\rho\pi D R^4(11 + 8\cos\theta)}{128}$$

Para obtener el momento de inercia del cilindro completo es más sencillo pues su distancia de o no depende del ángulo:

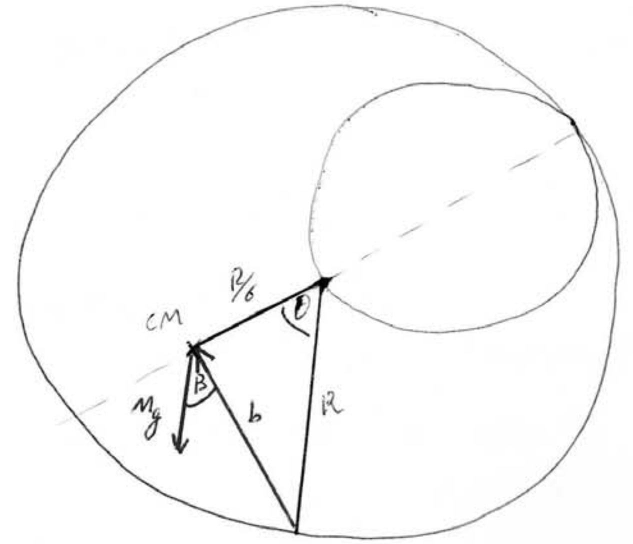
$$I_1 = \frac{1}{2}m_1 R^2 + m_1 R^2 = \frac{3}{2}m_1 R^2 = \frac{3}{2}(\rho\pi R^2 D)R^2 = \frac{3\rho\pi D R^4}{2}$$

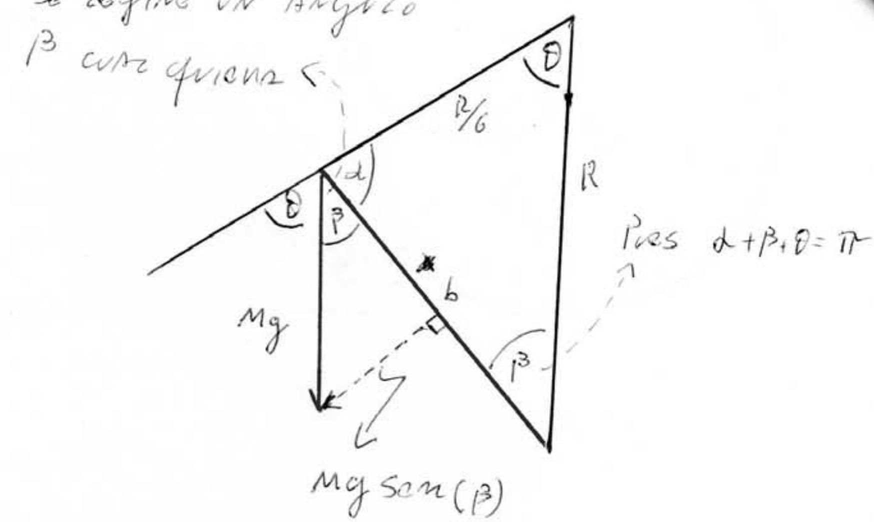
El momento total:

$$I_t = I_1 + I_o = \frac{3\rho\pi D R^4}{2} - \frac{\rho\pi D R^4(11 + 8\cos\theta)}{128} = \left(\frac{192 - 11 + 8\cos\theta}{128}\right)\rho\pi D R^4$$

$$I_T = \left(\frac{181 + 8\cos\theta}{\quad}\right)\rho\pi D R^4$$

Ahora hay que determinar el Torque que se sabe actúa sobre el centro de masa:





Primero obtengamos el brazo b: Por ley del coseno:

$$b^2=\left(\frac{R}{6}\right)^2+R^2-2\frac{R}{6}R\cos\theta=\frac{R^2}{6}(7-2\cos\theta) \Rightarrow b=\frac{\sqrt{7-2\cos\theta}}{\sqrt{6}}R$$

$b=\dfrac{\sqrt{6(7-2\cos\theta)}}{6}R$; También sabemos que la componente perpendicular al brazo es $Mg\,\text{sen}(\beta)$

Ahora debemos encontrar una relación entre θ y β, para esto usamo la ley del seno en el triángulo grande:

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{\left(\frac{R}{6}\right)^2}=\frac{\text{sen}\,\theta}{b} \Rightarrow \text{sen}\,\beta=\left(\frac{R^2}{\cancel{36}_{6}}\right)\underbrace{\left(\frac{\cancel{6}}{\sqrt{6(7-2\cos\theta)}}\right)}_{\frac{1}{b}}\text{sen}\,\theta$$

$\text{sen}\,\beta=\dfrac{R^2}{6\sqrt{6(7-2\cos\theta)}}\text{sen}\,\theta$; con esto el Torque es:

$$\tau=Mg\,\text{sen}(\beta)\,b=Mg\underbrace{\left(\frac{R^2}{36}\right)\left(\frac{\text{sen}(\theta)}{\cancel{b}}\right)}_{\text{sen}(\beta)}\cdot\cancel{b}=\frac{Mg\,R^2}{36}\text{sen}(\theta)$$

MASA TOTAL M es: $M = m_0 + m_1 = \rho \pi R^2 D - \frac{\rho \pi R^2 D}{4} = \frac{3}{4} \rho \pi$

y el Torque resulta:

$$T = -\left(\frac{3}{4} \rho \pi D R^2\right) \frac{g R^2}{36} \operatorname{sen}(\theta)$$

; usando la referencia (

de la ecuación de torques:

$$T = I \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{3}{4} \cancel{\rho} \cancel{\pi} \cancel{D} \cancel{R^2} \frac{g R^2}{36} \operatorname{sen}(\theta) = \frac{181 + 8 \cos\theta}{128} \cancel{\rho} \cancel{\pi} \cancel{D} \cancel{R^2}$$

$$\Rightarrow -g \operatorname{sen}\theta = \frac{4 \cdot 3 \cancel{6}}{\cancel{128}} (181 + 8 \cos\theta) \ddot{\theta} = \frac{3}{8} (181 + 8 \cos\theta)$$

Luego la ecuación de movimiento es:

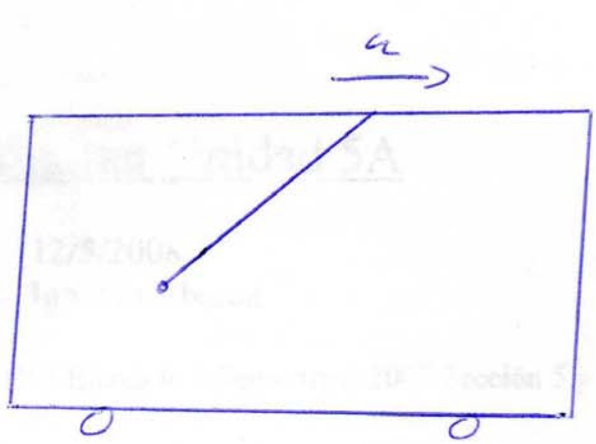
$$-g \operatorname{sen}(\theta) = \frac{3}{8} (181 + 8 \cos\theta) \ddot{\theta}$$

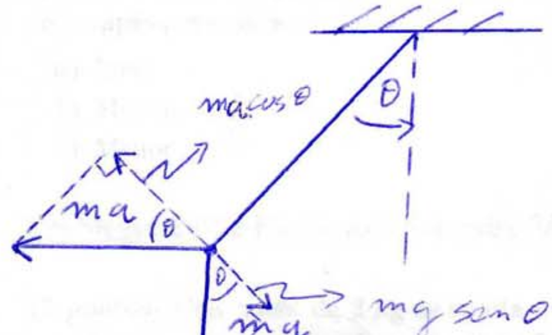
Para pequeñas oscilaciones en torno a 0 $\operatorname{sen}\theta \sim \theta$, $\cos\theta \sim 1$

$$\Rightarrow -g\theta = \frac{3}{8} (181 + 8) \ddot{\theta} = \frac{3 \cdot 189}{8} \ddot{\theta} = \frac{576}{8} \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{8g}{576} \theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{8g}{576}$$

P. 6





El movimiento acelerado puede considerarse como una fuerza constante y horizontal ma

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta \approx mg\theta$$

$$ma\cos\theta \approx ma$$

$$\sum F = -mg\theta + ma = mL\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta - \frac{a}{L} = 0$$

cambio de variable:

$$\frac{g}{L}\phi = \frac{g}{L}\theta - \frac{a}{L}$$

$$\phi = \theta - \frac{a}{g}$$

$$\ddot{\phi} = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\phi = 0$$

$$\phi(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{L}}\,t + \phi_0\right) \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{L}}$$

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{L}}\,t + \phi_0\right) + \frac{a}{g}$$

La aceleración solo influye en el punto sobre el que se oscila y no en la frecuen