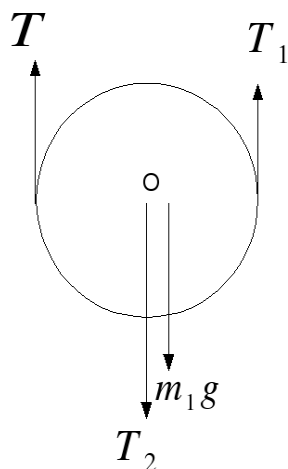


## Puata Auxiliar Unidad 4D

### Problema 1

EL sistema de referencia se ubica con el eje  $\hat{y}$  hacia arriba, el eje  $\hat{x}$  hacia la derecha y el eje  $\hat{z}$  hacia afuera de la hoja.

Análisis polea 1



$T$  y  $T_1$  son distintas porque la polea rota. De lo contrario, no habría rotación.

Para la sumatoria de fuerzas, tenemos:

$$T + T_1 - T_2 - m_1g = m_1a_1$$

Para la sumatoria de torques (con respecto al punto  $o$ , se tiene que (se define positivo el la rotación en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj):

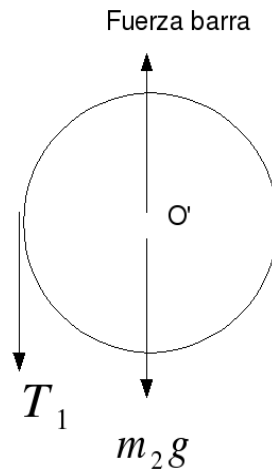
$$T_1R_1 - TR_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2\alpha_1$$

Como la masa  $M$  acelera, no podemos decir que  $T_2 = Mg$ . Luego,

$$T_2 - Mg = Ma_1$$

La aceleración de  $M$  es la misma que la aceleración de la polea 1, ya que la cuerda que las une es inextensible y, por lo tanto, bajan juntas.

### Análisis polea 2



La sumatoria de fuerzas es cero, pues la polea no se traslada.

Para el torque (con respecto al punto  $O'$ , tenemos que:

$$T_1 R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \alpha_2$$

### Condición de rotación sin resbalamiento

Sabemos que cada polea rota sin resbalar sobre la cuerda. Esto significa que cuando la polea rota un arco de circunferencia de largo  $x$ , la cuerda recorre una distancia del mismo largo. Luego, para la polea 1 se tiene que:

$$R_1 \alpha_1 = a_1$$

Para la polea 2, la situación es un poco diferente. Aquí no podemos suponer que la velocidad tangencial de las poleas son iguales, porque la polea

1 además de rotar, se traslada. Esto tendrá un efecto sobre la aceleración angular de la polea 2, ya que la cuerda se desenrollará más rápido (se suman los efectos de rotación y traslación de la polea 1). Luego, tenemos la siguiente relación.

$$R_2\alpha_2 = -a_1 - R_1\alpha_1 = -2a_1$$

Las aceleraciones  $a_1$  y  $\alpha_1$  llevan un signo menos porque según nuestro sistema de referencia éstas son negativas, mientras que  $\alpha_2$  es positiva (recuerden la regla de la mano derecha). De esta manera, los efectos de  $a_1$  y  $\alpha_1$  se suman y afectan a  $\alpha_2$

Reemplazando estas condiciones en las ecuaciones de torque, y considerando las ecuaciones de sumatorias de fuerza, se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$T + T_1 - T_2 - m_1g = m_1a_1$$

$$T_2 - Mg = Ma_1$$

$$T_1 - T = \frac{1}{2}m_1a_1$$

$$T_1 = -2\frac{1}{2}m_2a_1$$

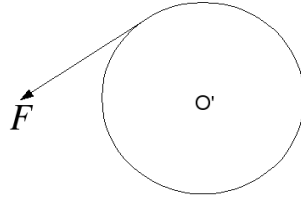
De aquí, se obtiene que:

$$a_1 = \frac{-g(M + m_1)}{\frac{3}{2}m_1 + 2m_2 + M}$$

## Problema 2

Ubicaremos el sistema de referencia con el eje  $\hat{y}$  hacia arriba, el eje  $\hat{x}$  hacia la derecha y el eje  $\hat{z}$  hacia afuera de la hoja.

### Análisis polea 2



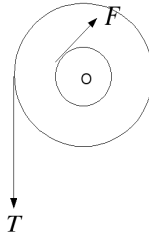
$F$  es la fuerza de tracción producida por el movimiento de la polea 1 sobre la polea 2.

La sumatoria de fuerzas es cero.

Sumatoria de torques:

$$FR = \frac{MR^2}{2}\alpha_2 \Rightarrow F = \frac{MR}{2}\alpha_2$$

### Análisis polea 1



Sumatoria de fuerzas es cero.

Sumatoria de torques:

$$TR - \frac{FR}{2} = \frac{1}{2}MR^2\alpha_1 \Rightarrow T - \frac{F}{2} = \frac{1}{2}MR\alpha_1$$

La fuerza  $F$  ejercida por la correa se opone a la rotación de la polea 1, por lo que hace un torque negativo.

Del análisis de fuerzas para  $M$ , tenemos que:

$$T - Mg = Ma$$

### Condición de rotación sin resbalamiento

Como  $a$  es negativo y  $\alpha_1$  positivo, se tiene que:

$$a = -R\alpha_1$$

Además,

$$\alpha_1 \frac{R}{2} = \alpha_2 R$$

Usando estas condiciones, se tiene que:

$$T - \frac{F}{2} = \frac{1}{2}MR\alpha_1$$

$$T = Mg - MR\alpha_1$$

$$F = \frac{1}{4}MR\alpha_1$$

De aquí se obtiene que:

$$\alpha_1 = \frac{8g}{13R}$$

$$T = \frac{5Mg}{13}$$

### Cálculo de $v$

Ocuparemos conservación de la energía:

$$E_i = U_1 + U_2$$

$$E_f = U_1 + U_2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}MR^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - Mgh$$

Sabemos que, por rotación sin resbalamiento,

$$v = R\omega_1$$

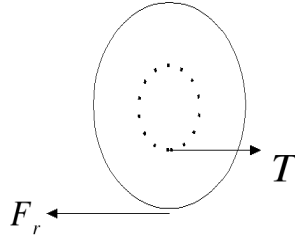
$$\frac{R}{2}\omega_1 = R\omega_2$$

Finalmente, igualando energías, se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{16}{13}gh}$$

### Problema 3

Ubicaremos el sistema de referencia con el eje  $\hat{y}$  hacia arriba, el eje  $\hat{x}$  hacia la derecha y el eje  $\hat{z}$  hacia afuera de la hoja.



Sumatoria de fuerzas sobre la carretilla:

La tensión  $T$  tiende a acelerar a la carretilla hacia la derecha, por lo que la fuerza de roce  $F_r$  apunta hacia la izquierda, oponiéndose al movimiento.

$$T - F_r = 4ma_c$$

Sumatoria de torques sobre la carretilla:

$$TR - F_r 2R = I\alpha$$

donde  $I = 2 \left( \frac{1}{2} m (2R)^2 \right) + \frac{1}{2} 2mR^2 = 5mR^2$

Luego,

$$T - 2F_r = 5mR\alpha$$

Del análisis de la sumatoria de fuerzas para la masa  $M$ , se cumple que:

$$T - Mg = Ma_M$$

Como la carretilla rueda sin resbalar, tenemos que:

$$2R\vec{\alpha} = \vec{a}_c$$

Pero debido a la condición de rodadura sin resbalamiento y dado nuestro sistema de referencia, no puede pasar que  $\alpha$  y  $a_c$  tengan el mismo signo. Luego,

$$-2R\alpha = a_c$$

Además, como la cuerda y la carretilla aceleran las dos a la vez, se tiene:

$$\vec{a}_c - \vec{a}_M = R\vec{\alpha}$$

Según nuestro sistema de referencia,  $\vec{a}_M$  va contrario al sentido del eje  $\hat{y}$ . Dejaremos que el signo de  $a_c$  lo entregue el resultado final. Luego,

$$a_c + a_M = -R\alpha$$

Luego, se deduce que:

$$a_c = \frac{2Mg}{M + 21m}$$

#### **Problema 4**

Usaremos un sistema de referencia con el eje  $\hat{y}$  hacia arriba, el eje  $\hat{x}$  hacia la derecha y el eje  $\hat{z}$  hacia afuera de la hoja.

##### Análisis polea inferior

Sumatoria de fuerzas:

$$T - mg = ma$$

Sumatoria de torques (con respecto al punto  $o$ ):

$$TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_1 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mR\alpha_1$$

##### Análisis polea superior

Sumatoria de fuerzas es cero (no se traslada).

Sumatoria de torques:

$$-TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_2 \Rightarrow -T = \frac{1}{2}mR\alpha_2$$

### Condición de rotación sin resbalamiento

Como las dos poleas son idénticas y el torque aplicado sobre ellas es el mismo (salvo un signo), se concluye que las dos tienen la misma aceleración angular  $\alpha$ .

En este caso, vemos que la cuerda se desenrolla de las dos poleas a la vez. Es decir, a medida que la polea inferior baja una distancia  $x$ , la cuerda se desenrolla la misma distancia más un largo  $x$  debido a la polea superior. Luego, se cumple que:

$$2R\alpha = a$$

Usando esta condición, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$T - mg = ma$$

$$-T = \frac{1}{4}ma$$

De aquí, se obtiene que:

$$a = -\frac{4}{5}g$$

$$T = \frac{mg}{5}$$

$$\alpha = -\frac{2g}{5R}$$