Problemas corregidos auxiliar 3

2 de septiembre de 2008

Problema 1

Parte a

Inicialmente, el centro de masas está en reposo. Como $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{R}_{CM} = 0$.

Consideraremos sólo el eje $\hat{x}$, pues el pingüino se mueve solamente en ese eje.

En la situación inicial se tiene que:

$$X_{CMi} = \frac{Mx_b + mx_p}{M + m}$$

En la situación final,

$$X_{CMf} = \frac{M(x_b - d) + m(x_p + L - d)}{M + m}$$

Como el centro de masa no cambia su posición, se tiene que $\Delta X_{CM} = X_{CMf} - X_{CMi} = 0$. Entonces:

$$0 = M(x_b - d) + m(x_p + L - d) - Mx_b - mx_p$$

$$\Rightarrow \; -Md + mL - md = 0$$

$$\Rightarrow \; d = \frac{mL}{M + m}$$

Parte b

En este caso, el bote se encuentra amarrado al muelle. Es decir, la tensión de la cuerda actúa como fuerza externa, impidiéndo que el bote se mueva debido al movimiento del pingüino. Luego, este último efectivamente se desplaza una distancia L con respecto a un sistema inercial externo, por lo que el desplazamiento del CM calculado en clases es correcto.

Problema 2

Sean $\vec{a}_c$ la aceleración de la cuña, $\vec{a}_b$ la aceleración de la bola, y $\vec{a}_{CM}$ la aceleración del CM. Sabemos que:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{M\vec{a}_c + m\vec{a}_b}{M+m}$$

$$\Rightarrow \ \vec{a}_c = \frac{(m+M)\vec{a}_{CM} - m\vec{a}_b}{M}$$

Calculemos $\vec{a}_{CM}$. Sabemos que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = (M+m)\vec{a}_{CM}$$

De la figura del DCL del sistema, se cumple que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = -(M+m)g\hat{y} + N\hat{y}$$

Notar que no se incluyeron las fuerzas $\vec{N}_i$ ni $-\vec{N}_i$ en la ecuación anterior. Esto se debe a que son fuerzas INTERNAS del sistema, pues son el resultado de la interacción entre los componentes de éste.

Las fuerzas externas van sólo en la dirección del eje $\hat{y}$. Luego, la aceleración del centro de masas en el eje $\hat{x}$ es 0 (a_{CMx}).

Luego, reemplazando en la ecuación para $\vec{a}_c$, tenemos que:

$$a_{cx} = -\frac{m a_{bx}}{M}$$

Nos falta calcular la aceleración de la bolita en el eje $\hat{x}$.

De la figura del DCL para la bolita, tenemos que, para el eje $\hat{y'}$,

$$N_i - mg\cos(\alpha) = 0$$

pues la bolita no se mueve en el eje $\hat{y'}$.

Para el eje $\hat{x'}$, se cumple que:

$$mg\,\mathrm{sen}(\alpha) = ma_{bx'}$$

$$\Rightarrow\ a_{bx'} = g\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

Luego, como toda la aceleración de lo bolita está contenida en el eje $\hat{x'}$, se tiene que

$$\vec{a}_b = g\,\mathrm{sen}(\alpha)\hat{x'}$$

Ahora debemos escribir $\hat{x'}$ en funcion de $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Para eso, proyectamos los vectores como en la figura, obteniendo que

$$\hat{x'} = \cos(\alpha)\hat{x} - \mathrm{sen}(\alpha)\hat{y}$$

Luego,

$$a_{bx} = g\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\hat{x}$$

Ahora podemos obtener el valor de a_{cx}:

$$a_{cx} = -\frac{mg\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{M}\hat{x}$$

Sea t^* el tiempo en que la bolita llega al final de la cuña. En este tiempo, la cuña alcanza su máximo desplazamiento d (no asumiremos ningún signo para d, dejaremos que la ecuación nos lo diga). Luego, por la ecuación de posición

$$d = x_0 + v_{0x}t^* + \frac{1}{2}a_{cx}t^{*2} = -\frac{mg\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{2M}t^{*2}\hat{x}$$

Como se dijo, t^* corresponde la instante en que la bolita deja la cuña. Luego, el desplazamiento de la bolita en el eje $\hat{x}$ despues del tiempo t^* es:

$$d_b = L\cos(\alpha) + d$$

Se sumó d (y no se restó) porque no estamos asumiendo ningún signo.

Luego, por la ecuación de posición de la bolita en el eje $\hat{x}$, se tiene que:

$$d_b = L\cos(\alpha) + d = \frac{1}{2}g\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)t^{*2}$$

$$\Rightarrow\ t^{*2} = \frac{2(L\cos(\alpha) + d)}{g\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}$$

Ahora podemos calcular d:

$$d = -\frac{mL\cos(\alpha)}{M+m}$$