Problema 4, auxiliar 3

30 de agosto de 2008

Parte a

Para calcular la trayectoria del centro de masas, ocuparemos la fórmula de momentum lineal para ese punto.

Las tres partículas se consideran como un solo sistema de tres partículas.

Sabemos que:

$$P_{CM} = \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{v}_i = mV\hat{y}$$

Además,

$$P_{CM} = M_{CM} + \vec{V}_{CM} = (2M + m)\vec{V}_{CM}$$

$$\Rightarrow \; mV\hat{y} = (2M + m)\vec{V}_{CM}$$

$$\Rightarrow \; \vec{V}_{CM} = \frac{mV}{2M + m}\hat{y}$$

Es decir, el centro de masas se mueve en la dirección $\hat{y}$ (línea recta).

Parte b

El pedazo de goma impacta a la masa M, imprimiéndole un torque. Es decir, las masas girarán en torno al CM con un movimiento circular uniforme.

Calculemos la posición de las masas con respecto al CM. Para ello, centraremos el sistema de referencia en el CM (con el eje $\hat{x}$ a lo largo de la cuerda apuntando hacia la derecha, en el cual las masas se mueven según un MCU en torno a él.

Sea $\vec{x}_1$ la posición de la masa $M + m$ (pedazo de goma y masa M fusionadas) y $\vec{x}_2$ la posición de la masa M.

Luego,

$$X_cm = 0 = \frac{-(M+m)x_1 + Mx_2}{2M+m} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{Mx_2}{M+m}$$

Además,

$$x_1 + x_2 = L \;\Rightarrow\; x_1 = L - x_2$$

$$\Rightarrow\; x_2 = \frac{(M+m)L}{2M+m} \text{ y } x_1 = \frac{LM}{2M+m}$$

Para calcular la tensión, ocuparemos la segunda ley de Newton.

Sea a_1 la aceleración centrípeta de la masa $M+m$. Usaremos sólo la información para la masa $M+m$, ya que la tensión es igual en toda la cuerda. Es decir, si usamos la masa M para hacer los cálculos, T tendría el mismo valor. Entonces,

$$a_1 = \omega^2 x_1 = \frac{x^2 LM}{2M+m}$$

Según la segunda ley de Newton,

$$(M+m)a_1 = T \Rightarrow\; T = \frac{(M+m)\omega^2 LM}{2M+m}$$

Para conocer ω, ocuparemos conservación de momentum angular l en un MCU.

Sabemos que:

$$l = \vec{r} \times m\vec{v}$$

En un MCU, la posición es perpendicular a la velocidad, entonces:

$$l = mrv$$

Consideremos el pedazo de goma en el instante justo antes de chocar. En ese momento, como aún no hay choque, todo el momentum lineal del sistema está concentrado en el pedazo de goma, mientras que la distancia al centro de masa corresponde a x_1. Luego, el momentum angular inicial es:

$$l_i = \frac{mVLM}{2M+m}$$

Después de chocar, el momentum angular final es la suma de los momentos de las masas $M + m$ y M:

$$l_f = \frac{(M+m)\omega L^2 M^2}{(2M+m)^2} + \frac{M(M+m)^2 L^2 \omega}{(2m+m)^2}$$

Por conservación de momentum angular, se cumple $l_i = l_f$. Luego, despejando ω, se tiene que:

$$\omega = \frac{mV}{L(M+m)}$$

Finalmente,

$$T = \frac{Mm^2V^2}{L(2M+m)(M+m)}$$