

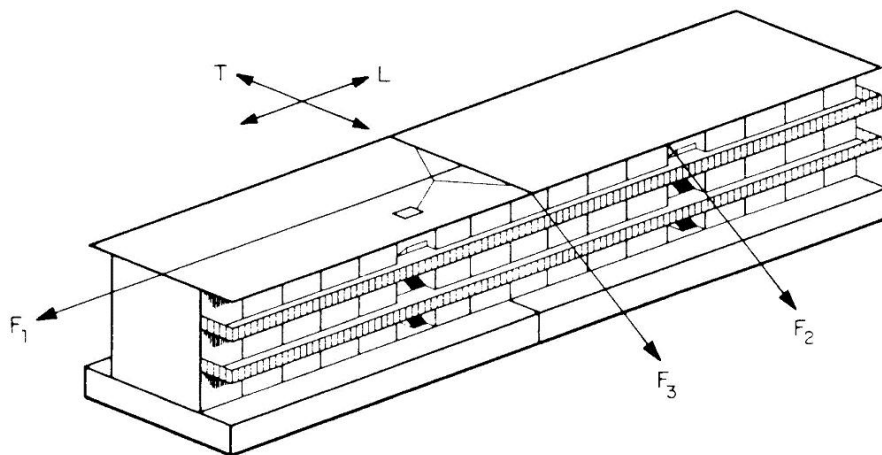


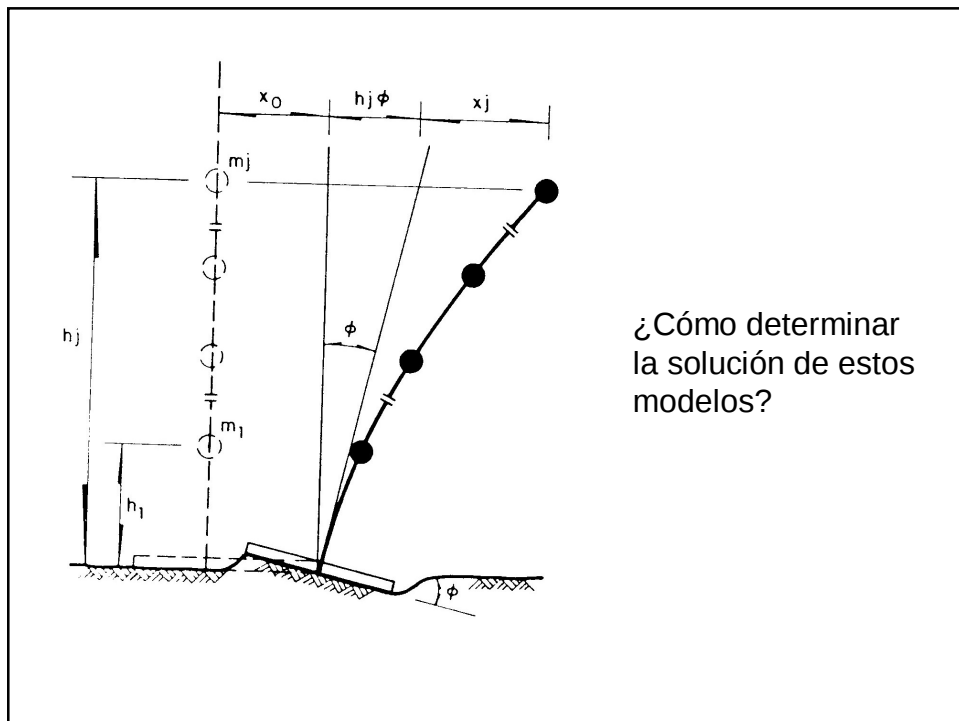
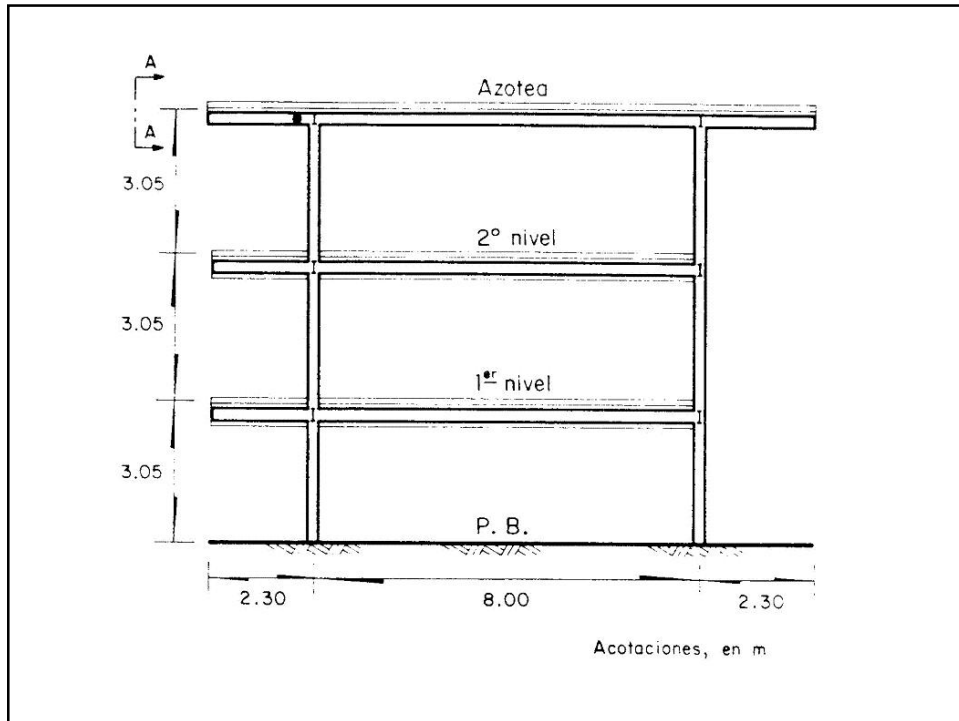
Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI1A2- Sistemas Newtonianos

Prof.:Ricardo Moffat

Comportamiento de una obra de Ingeniería



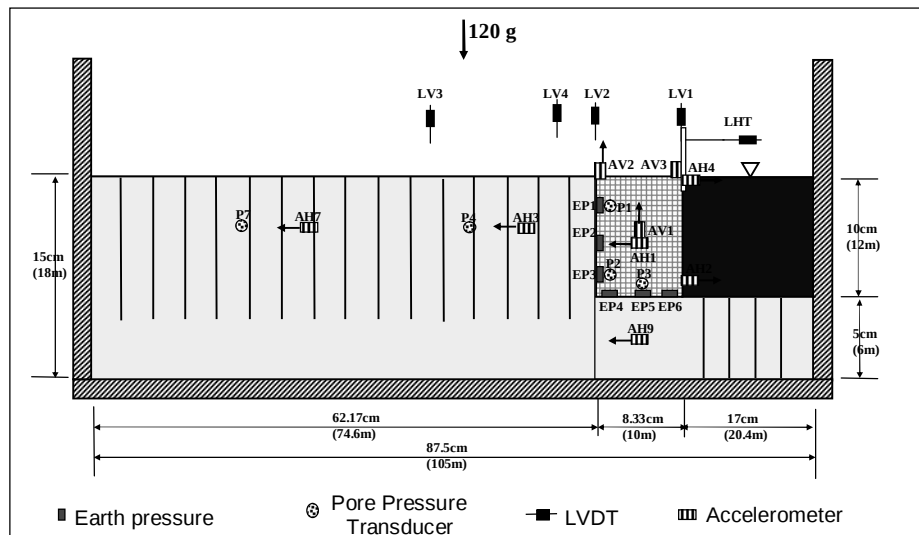


Kobe, 1995



5

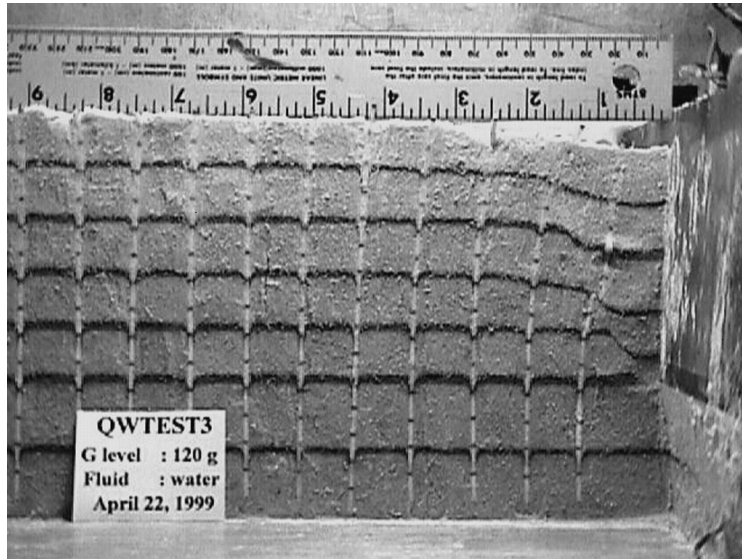
Modelo "Quay Wall"



Lee et al. (2000)

6

Corte del Modelo; Después del Ensayo

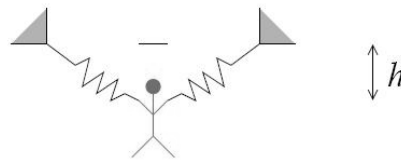


Lee et al. (2000)

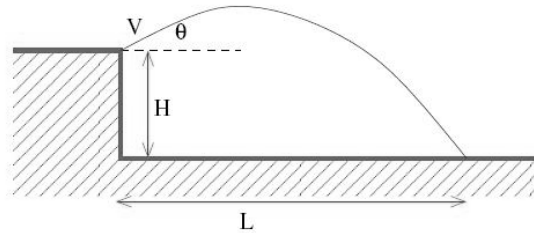
Uso de Matlab para resolver problemas complejos

En la guía se discutió el problema

- Una persona parada sobre una tarima.
- La persona está sujeta a dos resortes de largo natural L , no elongados.
- Se suelta y cae debido a la fuerza de gravedad.
- Hasta qué profundidad cae?

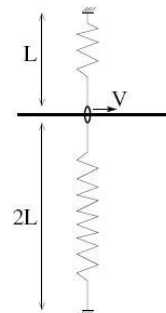


Alcance máximo



Práctica 1

- Una partícula de masa m puede deslizar sin roce por un riel horizontal.
- La partícula está unida a dos resortes idénticos de constante elástica k y largo natural L .
- Los extremos de los resortes están fijos a una distancia L y $2L$ del riel.
- Inicialmente se le da a la partícula una velocidad V hacia la derecha.



Se pide determinar el alcance de la partícula si $L = 0,1\text{m}$, $m = 0,1\text{kg}$, $k = 2\text{N/m}$, para los siguientes valores de V : 3 m/s , 5 m/s , 10 m/s .

Análisis de las leyes de Newton

Las leyes de Newton tienen típicamente la forma

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

donde F es la fuerza. Puede depender de la posición y la velocidad.

Cómo encontrar $x(t)$?

1.2.1 Motion and Equilibrium

In its simplest form, the equation of motion relates the acceleration, $d\dot{u}/dt$, of a mass, m , to the applied force, F , which may vary with time. Figure 1.2 illustrates a force acting on a mass, causing motion described in terms of acceleration, velocity and displacement.

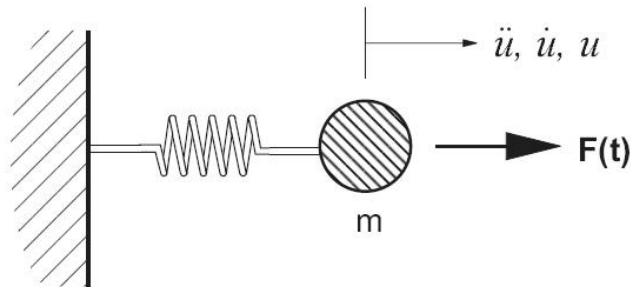


Figure 1.2 Application of a time-varying force to a mass, resulting in acceleration, $\ddot{u}$, velocity, $\dot{u}$, and displacement, u

Newton's law of motion for the mass-spring system is

$$m \frac{d\dot{u}}{dt} = F \quad (1.1)$$

Discretización temporal

Si $x(t)$ es una función continua:

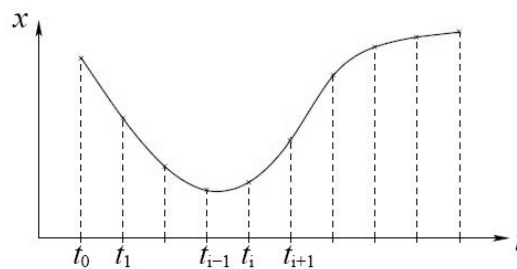
$$\text{Si } t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Para representar $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$. Se *discretiza* el tiempo con espaciado pequeño Δt

$$t_i = T_A + i \times \Delta t \quad ; \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots$$

La función $x(t)$ se representa

$$x_i = x(t_i)$$



Derivadas discretas

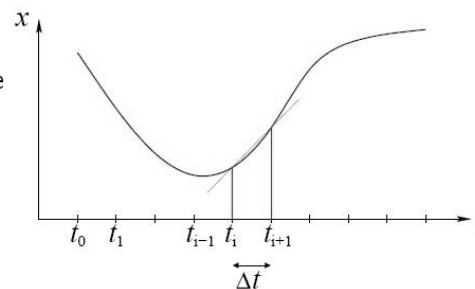
La primera derivada de $x(t)$ es $\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$

Si Δt es chico, se puede aproximar como

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Evaluando en uno de los puntos de la discretización da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \end{aligned}$$

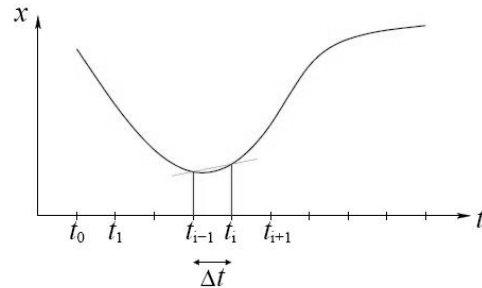


Se llama derivada hacia adelante.

Derivadas discretas

También, si se usa $h = -\Delta t$ se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i - \Delta t) - x(t_i)}{-\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i) - x(t_i - \Delta t)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\end{aligned}$$



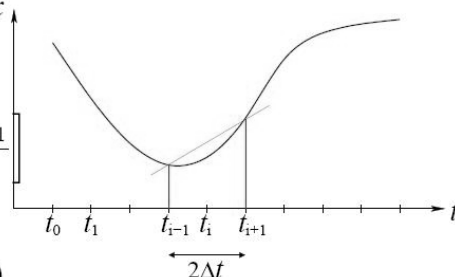
que se llama derivada hacia atrás.

Derivadas discretas

Promediando las expresiones de la derivada hacia adelante y hacia atrás, se obtiene la llamada derivada centrada

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_i) &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} + \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right] \\ &\approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i - \Delta t)}{2\Delta t}\end{aligned}$$

Es la más precisa



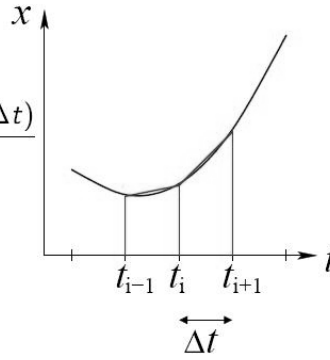
Segunda derivada

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{\dot{x}(t + \Delta t/2) - \dot{x}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} - \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} \\ &= \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

Evaluando en un punto de la discretización

$$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}$$

que se llama derivada centrada de segundo orden.



Solución de la Ecuación de Newton: método de Verlet

Una partícula unida a un resorte:

$$m\ddot{x} = -kx$$

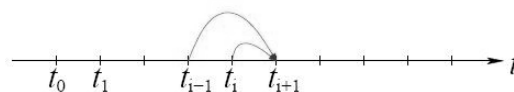
Evaluando la ecuación en t_i y usando la expresión discreta para la segunda derivada

$$m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i$$

Despejando x_{i+1}

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2$$

Iteración: dado x_i e x_{i-1} se calcula x_{i+1} .



Algoritmo

En Newton se da la posición y velocidad inicial: x_0 y v_0 . Pero

$$v_0 = \dot{x}(0) = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}$$

Luego

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

Algoritmo de Verlet (L. Verlet, Physical Review 1967)

- Datos: x_0, v_0
- Se calcula: $x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$
- Se itera desde $i = 1$ hasta el tiempo final:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i \Delta t^2$$

que va entregando sucesivamente los valores de $x_2, x_3, \dots$

En Matlab

```
>> m=1.0 %Se dan los valores de m y k
>> k=0.5
>> Tfin = 20.0 %Se resuelve hasta 20 segundos
>> dt = 0.1 %Se da el paso de tiempo Deltat
>> %Se dan las condiciones iniciales
>> x0=5.0
>> v0=2.0
>>
>> %Se define el arreglo de tiempos
>> t=0:dt:Tfin;
>> %Se define el arreglo de posiciones
>> x=zeros(1,length(t));
>> %Se ponen las condiciones iniciales
>> x(1) = x0;
>> x(2) = x0+v0*dt;
>> %Se itera usando el algoritmo de Verlet
>> for i=2:length(x)-1
>>     x(i+1) = 2*x(i)-x(i-1) - k*x(i)*dt^2/m;
>> end
>> plot(t,x)
```

Caso general

Para una fuerza cualquiera $F(x)$ el paso de iteración es

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F(x_i)\Delta t^2/m$$

Si las fuerzas dependen de la velocidad (fuerzas de roce viscosas o turbulentas) $F(x, \dot{x})$ se hace

$$F(x, \dot{x}) \approx F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)$$

La iteración es

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right) \Delta t^2/m$$

Práctica 2

El movimiento de un péndulo simple se obtiene de la ecuación de torque. Las fuerzas son

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + \vec{T} \\ &= mg(-\sin\phi\hat{\phi} + \cos\phi\hat{r}) - T\hat{r}\end{aligned}$$

y el torque con respecto al punto fijo es

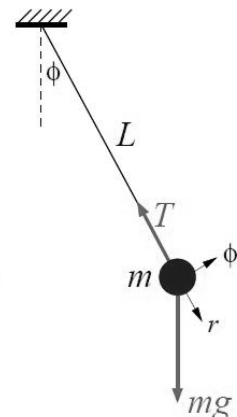
$$\vec{\tau} = -mgL\sin\phi\hat{z}$$

La velocidad es $\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi}$, y el momento angular

$$\vec{L} = mL^2\dot{\phi}\hat{z}$$

Luego, la ecuación de torque ($\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$) es

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL\sin\phi$$



Práctica 2

La ecuación de movimiento del péndulo simple es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

Considere que el péndulo se suelta desde el reposo en un ángulo inicial $\phi_0 = \pi/4$.

Use $g=9.8 \text{ m/s}^2$, $L=0.5 \text{ m.}$, $\Delta t=0.01\text{s}$, 0.05s , 0.5s

Integre la ecuación hasta $T=10\text{s}$.

Se pide graficar la solución para los diferentes valores de Δt y estudiar la confiabilidad de la solución.

Intersección con algún valor

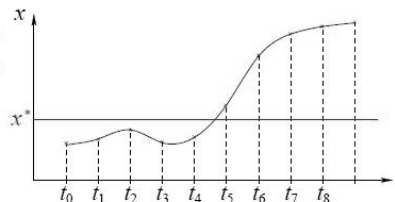
Por ejemplo, cuándo $x(t) = 0$?

Como la solución es discreta, en ninguno de los valores discretos coincide.

Pero $x_4 - x^* < 0$ y $x_5 - x^* > 0$.

El cambio de signo es genérico.

Criterio que se usa para determinar una intersección:



Hay intersección en el intervalo i si: $(x_i - x^*) \times (x_{i+1} - x^*) < 0$

Dado el intervalo:

$$t^* \approx t_i \approx t_{i+1} \approx (t_i + t_{i+1})/2$$

Práctica 3

Usando el programa anterior programe la detección del primer cruce en $\phi = 0$, Con este programa calcule el periodo del péndulo usando $g=9.8 \text{ m/s}^2$, $L=0.5 \text{ m.}$, $dt=0.01\text{s}$ y los ángulos iniciales $\phi_0 = \pi/10, \pi/4, \pi/2$.