Capítulo 12

Fluidos

12.1. Conceptos Preliminares

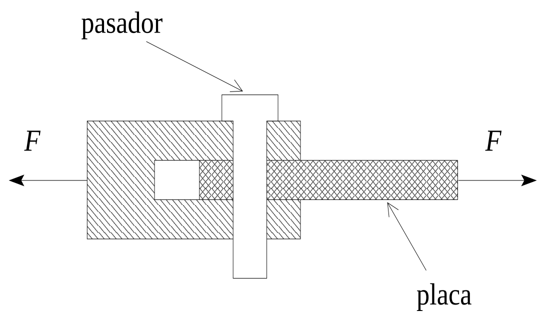

Figura 12.1

Un fluido es una substancia incapaz de soportar fuerzas de cizalla. Es ésta la propiedad que distingue a un sólido de un fluido. En la figura 12.1 se muestra una placa, la cual se intenta deslizar hacia la derecha mediante la aplicación de una fuerza F. Un pasador sólido evita que esto ocurra. Sin embargo, cuando el pasador es sustituido por un líquido o un gas, la placa comenzaría a deslizarse (aun para fuerzas F pequeñas). El fluido no es capaz de ejercer una fuerza de cizalla para mantener el equilibrio.

La densidad de una sustancia es la razón entre su masa y volumen: $\rho = m/V$. La densidad del agua, a 4°C, es 1.00 g/cm^3 (es el valor máximo de la densidad del agua).

Los fluidos se dividen en dos subclases: los líquidos y los gases. Los líquidos se caracterizan por ocupar un volumen definido independiente del volumen del recipiente que lo contiene. Un gas, por otra parte, tiende a expandirse y a ocupar todo el volumen del recipiente que lo contiene. La compresibilidad del fluido es otra propiedad marcadamente distinta en los líquidos y en los gases. Un líquido es bastante incompresible y en la gran mayoría de las aplicaciones se puede suponer que su densidad es constante. Lo opuesto es cierto para los gases. Éstos son sustancias muy compresibles y generalmente no se puede suponer que su densidad sea constante.

A pesar de que los fluidos están constituidos por moléculas, en le presente capítulo se tratan como un medio continuo. El uso de los aspectos macroscópicos de un fluido está justificado cuando el *camino libre medio* (es decir, la distancia media que alcanza a recorrer una molécula del fluido antes de colisionar con otra) es mucho menor que las distancias involucradas del sistema bajo consideración.

Sea F una fuerza que actúa en forma perpendicular sobre un área A. Se define la *presión* P por la relación

$$P \equiv \frac{F}{A}$$

Considere un fluido en reposo (por ejemplo, un vaso de agua, una piscina o una lago). Al sumergir un objeto en el fluido, éste ejercerá una fuerza sobre las superficies del objeto. La fuerza por unidad de área (o presión) que ejerce un fluido sobre los objetos (o superficies) con las que está en contacto, tiene varias propiedades importantes:

a) La fuerza que un fluido en reposo ejerce sobre una superficie es siempre perpendicular a ella. Esto está directamente relacionado con el hecho de que un fluido es incapaz de ejercer una fuerza de cizalla.

b) Un fluido, en un punto particular, ejerce la misma presión en todas las direcciones (*Principio de Pascal*). En otras palabras, la presión es una magnitud *escalar*. Si sumergimos en el fluido un cubo infinitesimal, la fuerza sobre todas las caras del cubito será la misma, siendo su magnitud $F = PA$. Aquí A es el área de una de las caras del cubito y P es la presión del fluido en el lugar donde se encuentra el cubo (estamos despreciando variaciones de la presión sobre distancias del tamaño del cubito).

c) Los lugares isobáricos (de igual presión) en un fluido en reposo (y de densidad constante) son los planos horizontales. En la figura 12.2, en los puntos A, B, C, D y E la presión es la misma. También la presión es igual en los puntos F, G, H e I. La presión es mayor en puntos ubicados a mayor profundidad. En el punto J la presión es menor que en el punto F.

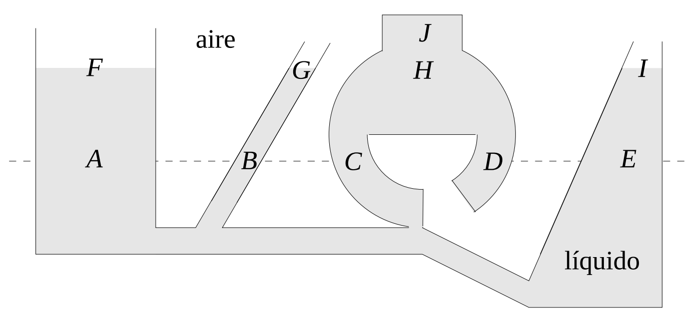

Figura 12.2

12.2. La presión atmosférica P_0

La presión en la superficie de un fluido que se encuentra en un recipiente abierto a la atmósfera no es nula, sino igual a la presión atmosférica. Esta última se debe a que estamos inmersos en un fluido (compresible) constituido por el aire. La atmósfera de la Tierra ejerce una presión sobre todos los objetos con los que está en contacto, en particular sobre otros fluidos. La presión atmosférica sobre la superficie terrestre la denotaremos por P_0, y es igual a la presión ejercida por el peso de toda la columna de aire que está por encima.

P_0 no es despreciable o insignificante como algunas personas suelen creer. Por el contrario, la presión atmosférica juega un papel importante en numerosos aparatos y máquinas de la vida diaria.

Antes de continuar digamos algo sobre las unidades de la presión:

En el sistema SI, la unidad de presión es el Pascal: 1 Pa = 1 N/m^2. A 10^5 Pa se le suele llamar *bar*, o sea 1 bar = 10^5 Pa. Observe que 1 bar es aproximadamente la presión que ejerce una masa de 1 kg si ésta está apoyada sobre un área de 1 cm^2. En efecto,

$$1 \text{ Kg/cm}^2 = \frac{9{,}81 \text{ N}}{0{,}0001 \text{ m}^2} = 0{,}981 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 0{,}981 \text{ bar}.$$

También observe que 1 kg es la masa de una columna de agua de 10 m de altura y 1 cm^2 de sección transversal.

Otra unidad frecuentemente usada para medir la presión es la *atmósfera* (atm). 1 atm corresponde a la presión promedio que ejerce la atmósfera terrestre a nivel del mar. Experimentalmente se encuentra que ésta es aproximadamente $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m^2 = 1.013 bar. Se define la *atmósfera estándar* por

$$1\text{atm} = 1{,}0135 \cdot 10^5 \text{N/m}^2 = 1{,}0135\text{bar} .$$

O sea, y esto es útil recordar, 1 atm es aproximadamente igual a un bar e igual a la presión que ejerce el peso de una masa de 1 kg sobre 1 cm^2, que a su vez es igual a la presión adicional ejercida por una columna de agua a 10 metros de altura.
La palma de una mano tiene un área de aproximadamente 100 cm^2, luego la fuerza que ejerce la atmósfera sobre la palma extendida es aproximadamente igual a la que ejercería una masa de 100 kg apoyada sobre ella. La fuerza sobre la palma es balanceada por una fuerza igual y contraria aplicada sobre el dorso de la mano.

Considere un tubo de 1 m de largo y sección transversal A, cerrado por uno de los extremos. Llenemos el tubo con mercurio y coloquemos el tubo, con el extremo abierto hacia abajo, en un recipiente con mercurio. Observaremos que el nivel de mercurio se situará a aproximadamente 760 mm del nivel del recipiente (ver figura 12.3). El extremo superior del tubo queda al vacío.
Apliquemos la segunda ley de Newton a la columna de mercurio (que sobresale de la superficie del líquido en el recipiente). ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella?

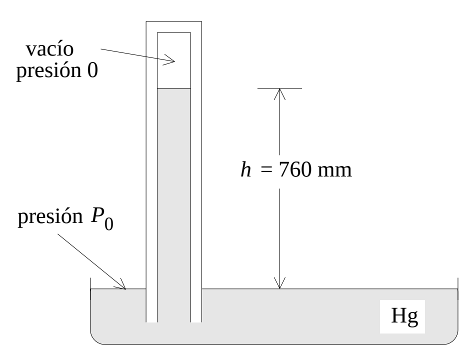

Figura 12.3

Hay sólo dos: por una parte está la presión que el fluido que está en el recipiente ejerce sobre el mercurio que está en el tubo: tal fuerza es $\vec{F}_1 = P_0 A\hat{z}$; por otra, está el peso del mercurio al interior de la columna, $\vec{F}_2 = -Ah\rho_{\rm Hg} g\hat{z}$. Como el fluido está en reposo la fuerza neta debe ser nula, o sea

$$P_0 A = Ah\rho_{\rm Hg} g \ .$$

La densidad del mercurio es $\rho_{\rm Hg} = 13{,}6$ g/cm^3. Con esto obtenemos par P_0 el valor

$$P_0 \simeq 1{,}014 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} \ .$$

¡La fuerza que eleva l mercurio al interior del tubo es la presión atmosférica! El dispositivo que acabamos de describir es un *barómetro de mercurio*. La altura de la columna de mercurio mide la presión atmosférica. La presión atmosférica promedio a nivel del mar corresponde a 760 mm de mercurio.

Al repetir el mismo experimento, pero con una columna de agua, la altura será 13.6 veces mayor (recuerde que la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3 y la del agua 1 g/cm^3). Multiplicando los 76 cm por 13.6 se obtienen 10.34 m. Este dato es muy importante, ya que interviene en varias aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, al intentar elevar agua de un pozo (cuya superficie está en contacto con el aire que nos rodea) succionando por el extremo superior de un tubo largo, sólo se tendrá éxito si el nivel de agua no está a más de 10.34 metros de profundidad (en la práctica esta altura es menor ya que el agua comienza a hervir bastante antes de llegar a los 10.34 metros).

12.3. Principio de Arquímedes

Al sumergirnos en un fluido, la presión aumenta. Evaluemos este aumento de presión para un fluido incompresible (líquido) de densidad ρ. para ello consideremos el fluido contenido en un paralelepípedo imaginario de altura h y área A. Una de las caras de área A la ubicamos de manera que coincida con la superficie del líquido mientras que la otra queda a una profundidad h (ver figura 12.4). Por lo dicho en la sección anterior, la presión $P = P(h)$ es sólo una función de la profundidad h.

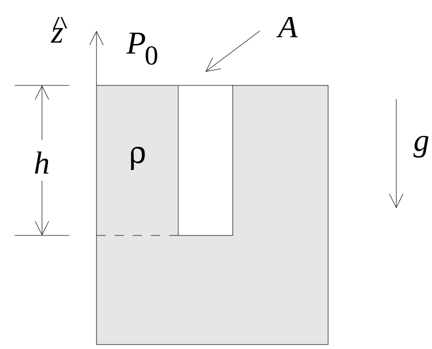

Figura 12.4

Es claro que las fuerzas netas horizontales ejercidas por el fluido externo sobre el paralelepípedo son nulas, de lo contrario el fluido del paralelepípedo aceleraría —lo que estaría en contradicción con la suposición de que el fluido se encuentra en reposo.
Las fuerzas que actúan sobre el paralelepípedo en la dirección vertical son: i) la fuerza que el aire ejerce sobre la cara superior, que es $\vec{F}_1 = -P_0 A\hat{z}$, ii) la fuerza que el fluido (exterior) ejerce sobre la cara inferior, que es $\vec{F}_2 = P(h)A\hat{z}$ y iii) la fuerza debida al peso del paralelepípedo con su fluido. Esta fuerza de gravedad es $\vec{F}_3 = -(\rho Ah)g\hat{z}$. Como el

paralelepípedo está en equilibrio, la fuerza total debe ser nula, es decir,

$$0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-P_0 A + P(h)A - \rho A h g)\hat{z} \ .$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$P(h) = P_0 + \rho g h \ ,$$

donde P_0 es la presión atmosférica que actúa sobre la superficie del fluido. Observe que el aumento de la presión con la profundidad es igual a la presión ejercida por el peso de la columna del fluido que se encuentra por encima.

Estamos en condiciones de demostrar el *Principio de Arquímedes*:

> *Al sumergir un cuerpo parcial o totalmente en un fluido aparece una fuerza llamada* empuje *que actúa sobre el cuerpo y apunta en la dirección opuesta a la gravedad. La magnitud del empuje es $F_e = \rho g V$, donde ρ es la densidad del fluido y V es el volumen del fluido que fue desplazado por el cuerpo.*

Para demostrar este principio observe primeramente que la fuerza que el líquido ejerce sobre cada parte de la superficie del cuerpo sumergido o parcialmente sumergido es independiente del material de que está hecho. Por lo tanto, en lo que a empuje respecta, podemos reemplazar la parte sumergida del cuerpo A por un líquido igual al líquido que lo rodea (ver figura 12.5). Si ρ es la densidad del líquido y V_s el volumen de la parte sumergida del cuerpo A, entonces el peso del cuerpo B es $\vec{W} = -\rho V_s g \hat{z}$. Por supuesto que el cuerpo B estará en equilibrio, por consiguiente la fuerza de empuje que el líquido exterior ejerce sobre B debe exactamente contrarrestar el peso. Luego la fuerza de empuje es $\vec{F}_e = \rho V_s g \hat{z}$.

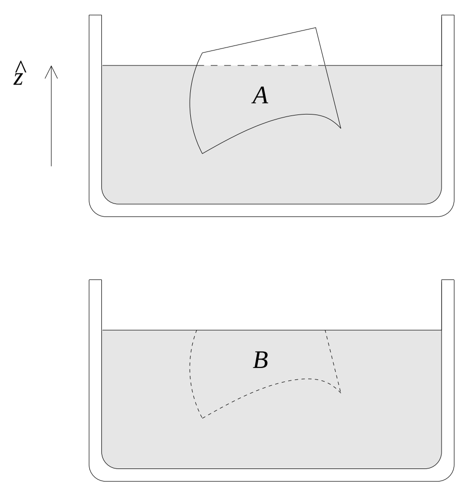

Figura 12.5

Más aún, el cuerpo B está en equilibrio neutro (es decir, dentro del líquido lo podemos trasladar a cualquier punto y orientarlo en cualquier dirección, quedando en reposo), luego la fuerza de empuje debe estar actuando como si estuviera aplicada en el centro de gravedad de B. Esto es un dato de importancia para analizar el equilibrio de objetos flotantes o sumergidos.

Ejemplo: Considere tres cubos del mismo tamaño, adheridos tal como se muestra en la figura 12.6. El material del cual están hechos los dos cubos A y B es $\rho_1 = 0{,}5$ g/cm^3, mientras que el cubo C está hecho de un material de densidad $\rho_2 = 2$ g/cm^3. Observe que la densidad media de los tres cubos es igual a la del agua ($\rho = 1$ g/cm^3) y, por lo tanto, al sumergirlo en agua, la fuerza de empuje exactamente cancela el peso. ¿Cuál será la orientación de equilibrio estable que el objeto adquirirá cuando está "flotando" rodeado de agua?

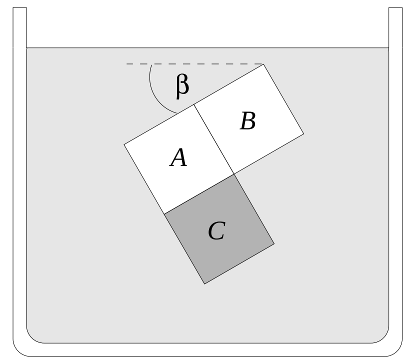

Figura 12.6

Las únicas fuerzas que están actuando sobre el objeto son el peso $\vec{W}$ y el empuje $\vec{F}_e$. Ya sabemos que ambas fuerzas tienen la misma magnitud y apuntan en direcciones opuestas y, por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto es nula. Pero para que se encuentre en equilibrio también el torque neto debe ser nulo. Esto se logra sólo si ambas fuerzas son colineales (actúan a lo largo de la misma recta). Encontremos los puntos en que actúan las dos fuerzas.

La gravedad actúa en el centro de masas. El centro de masas de los cubos A y B se encuentra en a y el centro de masas de C se encuentra en b. El centro de masas del objeto completo se encontrará sobre la recta que une a con b. Como el cubo C tiene el doble de masa de los dos cubos $A+B$ juntos, el centro de masas del objeto completo se ubicará más cerca de b que de a. En la figura 12.7 hemos designado el centro de masas del objeto completo con el número 1. Se tiene que $\overline{b,1} = \overline{a,b}/3$.
La fuerza de empuje, por otra parte, actúa en el centro de masas que se obtiene al sustituir los tres cubos por agua (en la figura lo hemos designado con el número 2).

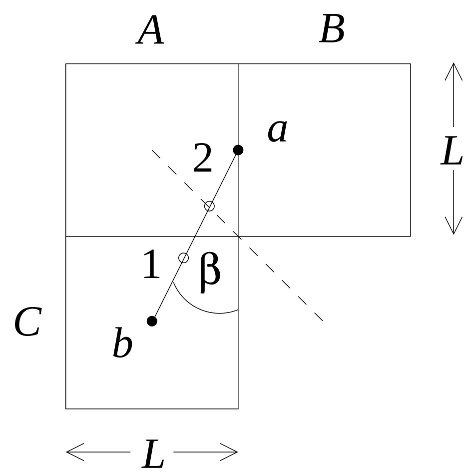

Figura 12.7

Nuevamente el centro de masas de los cubos $A+B$ se encuentra en a, mientras que el de C se encuentra en b. El centro de masas de los centros de masas nuevamente se encontrará sobre la recta $\overline{a,b}$. Pero ahora los cubos $A+B$ pesan el doble de lo que pesa C, luego el centro de masas ahora estará más cerca de a que de b. De hecho, el centro de masas cuando los tres cubos están hechos de agua debe estar sobre el plano de simetría indicado en la figura con una línea punteada.

En resumen, la fuerza de gravedad actúa en 1 y el empuje actúa en 2. Para que no haya torque sobre el sistema la recta $\overline{a,b}$ debe orientarse a lo largo de la vertical. Concluimos que el ángulo β de la figura 12.6 debe coincidir con el de la figura 12.7. Se deduce inmediatamente que $\tan\beta = 1/2$. Convénzase de que el equilibrio es estable cuando el punto 2 está sobre el punto 1 e inestable cuando 1 está sobre 2.

12.4. La fórmula barométrica

Considere N moléculas de un gas confinadas en un volumen V y a una temperatura T. Si la ecuación de los *gases ideales* es aplicable se tiene que

$$PV = Nk_BT \ .$$

Aquí P es la presión del gas y $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/K es la *constante de Boltzmann*. Sea m la masa de cada molécula, entonces

$$P = \frac{Nm}{V}\frac{k_BT}{m} = \rho\frac{k_BT}{m} \ ,$$

donde ρ es la densidad de masa del gas. De esta relación se deduce que, mientras la temperatura se mantenga constante, la presión de un gas es proporcional a su densidad. En particular, si ρ_0 y P_0 son la densidad y presión de la atmósfera al nivel del mar ($z = 0$) y $\rho(z)$y $P(z)$ son las mismas magnitudes, pero a una altura z (por sobre el nivel del mar), entonces

$$\frac{P_0}{P(z)} = \frac{\rho_0}{\rho(z)} \ .$$

Por otra parte (ver figura 12.8), la presión a una altura z es la misma que la que hay a una altura z es la misma que la que hay a una altura $z + dz$ más la presión ejercida por el peso del gas que hay entre las alturas z y $z + dz$, o sea,

$$P(z) = P(z + dz) + \rho(z)g\, dz \ .$$

Esta ecuación se puede reescribir de la forma

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{g\rho_0}{P_0}P(z) \ . \qquad (12.1)$$

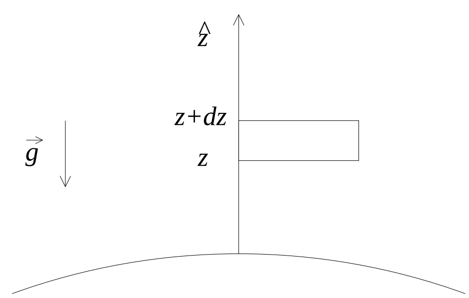

Figura 12.8

Ésta es la *ecuación diferencial* que gobierna el comportamiento de la presión atmosférica (a temperatura constante). Para resolver esta ecuación debemos antes discutir la *función exponencial*.

La función exponencial

La ecuación diferencial del tipo

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \Gamma f(t) \ , \qquad (12.2)$$

donde Γ es una constante (real o compleja), aparece frecuentemente en las ciencias naturales (y también en las ciencias económicas). Es muy importante discutir y analizar sus soluciones. Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función y sus derivadas (primera, segunda, etc.). La derivada de más alto orden que aparece en la ecuación define el *orden* de la ecuación diferencial. La ecuación diferencial (12.2) es de primer orden.
Nos interesa encontrar la solución más general de (12.2). Un resultado importante de la teoría de ecuaciones diferencial (y que no demostraremos aquí) es que la solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes arbitrarias. En otras palabras, sabremos que tenemos la solución general de la ecuación (12.2) si ésta tiene una constante que se puede elegir arbitrariamente. Una vez que se ha encontrado la solución general, la constante arbitraria se elige de manera que la solución corresponda a la solución del problema planteado (o sea, cumpla con las condiciones iniciales).

Ejemplo: Consideremos la ecuación diferencial $\ddot{z} = a_0$. Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden. La solución general es $z(t) = z_0 + v_0 t + a_0 t^2/2$. La solución general tiene dos constantes arbitrarias z_0 y v_0, las que deben elegirse de manera que la solución corresponda a la situación física concreta que se está considerando.

Definamos la función $\exp(t)$ mediante la serie

$$\exp(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \ . \tag{12.3}$$

Es evidente que su derivada es igual a la función, es decir,

$$\frac{d}{dt}\exp(t) = \exp(t) \ .$$

Ejercicio: Demuestre que la función $f(t) = A\exp(\Gamma t)$, donde A es una constante arbitraria, es la solución general de la ecuación

$$\dot{f}(t) = \Gamma f(t) \ .$$

Como consecuencia del ejercicio anterior concluimos que la solución general de la ecuación (12.1) es

$$P(z) = A\exp\left(-\frac{g\rho_0}{P_0}z\right) \ ,$$

donde la constante arbitraria A se determina exigiendo que la presión en $z = 0$ sea P_0. Esto nos da la condición $A = P_0$. De esta manera obtenemos la *fórmula barométrica*

$$P(z) = P_0\exp\left(-\frac{g\rho_0}{P_0}z\right) \ .$$

Reiteramos que este resultado, que nos da la presión barométrica en función de la altura, es sólo aproximadamente correcto ya que, contrariamente a nuestra suposición, la temperatura de la atmósfera normalmente disminuye a medida que uno se eleva.

Ejercicio: Demuestre que la función $f(t) = \exp(\Gamma_1 t)\exp(\Gamma_2 t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{f}(t) = (\Gamma_1 + \Gamma_2) f(t) \ .$$

Por consiguiente, $f(t) = \exp(\Gamma_1 t)\exp(\Gamma_2 t)$ debe poder escribirse de la forma $f(t) = A\exp((\Gamma_1 + \Gamma_2)t)$. Demuestre que en ese caso $A = 1$, o sea

$$\exp(\Gamma_1 t)\exp(\Gamma_2 t) = \exp((\Gamma_1 + \Gamma_2)t) \ . \tag{12.4}$$

Observe que esta relación justifica la introducción de la notación

$$\exp(\Gamma t) = e^{\Gamma t} \ .$$

La función $e^t = \exp(t)$ se llama *función exponencial*.

Ejercicio: Evaluando la serie (12.3) para $t = 1$, demuestre que $e = 2{,}718\ldots$

Problemas (relacionados con la función exponencial)

1. Suponiendo que la atmósfera tiene una temperatura constante, determine la presión atmosférica a 10 km de altura. (La densidad del aire, en la vecindad de la superficie terrestre, a 20°C, es aproximadamente $\rho_0 = 1{,}29$ kg/m^3.)

2. Considere un cilindro de radio R sobre el cual se apoya una cuerda. Sea μ_e el coeficiente de roce estático entre la cuerda y el cilindro. Suponga que en uno de los extremos de la cuerda está colgando una masa M. ¿Cuál es la mínima masa que debe colgarse en el otro extremo para que la cuerda no resbale?

   Respuesta: $m = Me^{-\mu_e \pi}$.

3. La cantidad de núcleos de un elemento radiactivo que decae en un intervalo $[t, t']$ es proporcional al número de núcleos no decaídos que se tenía inicialmente (en el instante t). Demuestre que la afirmación anterior implica que

   $$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \ ,$$

   donde $N(t)$ es el número de núcleos en el instante t que no ha decaído, N_0 la misma magnitud pero en el instante $t = 0$ y λ es una constante positiva (la así llamada *constante de desintegración*).

   Para el caso en que $\lambda = 0{,}01$ s^{-1}, determine el tiempo que debe transcurrir para que decaiga la mitad de los núcleos.

4. Suponga que cierto banco (en el país de las maravillas) para intereses a una tasa de 100 % anual sobre los depósitos, y más aún, los paga en forma continua, sumando los intereses al capital depositado. Si una persona deposita \$1000, ¿cuánto le devolverá el banco al cabo de un año?

   Respuesta: \$ 2 718.28. . . $= e \cdot 1000$.

12.5. Tensión superficial

Entre dos moléculas de un fluido actúan fuerzas. Estas fuerzas, llamadas *fuerzas de van der Waals* o *fuerzas cohesivas* son de origen eléctrico. Una de las características de estas fuerzas es que su alcance es muy pequeño (rápidamente se desvanecen cuando la distancia entre las moléculas es dos o tres veces su tamaño); otra característica es que mientras las moléculas no se traslapan, la fuerza es atractiva.

El efecto neto de las fuerzas de cohesión sobre una molécula que está en el interior del líquido es nulo, pero no así para una molécula que se encuentra en la superficie (ver figura 12.9). Para poner una molécula en la superficie hay que realizar un trabajo. O sea, la existencia de una superficie en un fluido introduce una energía potencial. Esta energía es proporcional a la superficie y se tiene que

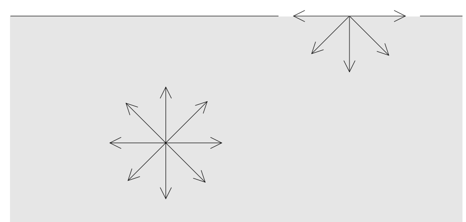

Figura 12.9

$$dW = \sigma \, dA \ .$$

Aquí σ es una constante que depende del fluido y se llama *tensión superficial* y dA es un elemento (infinitesimal) de superficie. En realidad la tensión superficial depende de las dos substancia que están en contacto. La siguiente tabla da valores de la tensión superficial para algunos casos.

Substancia	En contacto con	Temp. °C	σ [N/m]
Agua	aire	0	0.0756
Agua	aire	20	0.07275
Agua	aire	80	0.0626
Hg	vacío	20	0.475
Hg	aire	20	0.436
Alcohol metílico	aire	20	0.0227
Glicerol $C_3H_8O_3$	aire	20	0.0634
Solución jabonosa	aire	20	$\simeq 0{,}025$

Para medir la tensión superficial se puede usar el dispositivo mostrado en la figura 12.10. Un alambre movible, inicialmente sumergido, se tira lentamente, extrayéndolo del líquido (con una película del líquido adosada). Midiendo la fuerza F se puede deducir σ. En efecto, al mover el alambre movible a una altura h a $h+dh$, el trabajo que se realiza es $dW = F \, dh$.

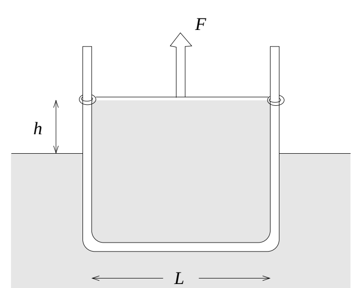

Figura 12.10

Por otra parte, la superficie de la película aumenta en $dA = 2L\,dh$ (el factor 2 se debe a que la película tiene una superficie a cada lado). Se tiene

$$\sigma = \frac{dW}{dA} = \frac{F\,dh}{2L\,dh} = \frac{F}{2L}\ .$$

Problema: Deseamos encontrar la diferencia de presión entre el interior y exterior de una pompa de jabón de radio $R = 1$ cm.

Si, soplando con una pajita, aumentamos el radio de la pompa de R a $R + dR$, entonces la superficie aumenta en

$$dA = 2\cdot(4\pi(R+dr)^2 - 4\pi R^2) = 16\pi R\,dR\ .$$

El factor 2 nuevamente se debe a que hay que considerar tanto la superficie interior como exterior de la pompa. El cambio de energía debido al aumento de la superficie es por lo tanto

$$dW = \sigma\,dA = 16\sigma\pi R\,dR\ .$$

Por otra parte, podemos evaluar el trabajo directamente, multiplicando el desplazamiento dR por la fuerza $\Delta P\cdot 4\pi R^2$, es decir,

$$dW = \Delta P\cdot 4\pi R^2\,dR\ .$$

Igualando las dos últimas expresiones se encuentra la diferencia de presión

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{R}\ .$$

Con $\sigma = 0{,}025$ N/m y $R = 0{,}01$ m se obtiene $\Delta P = 10$ N/m^2. Si se deja de soplar por la pajita, la pompa se desinfla.

Observe que la presión al interior de una pompa de jabón es mayor tanto más pequeño es su radio. De esta observación se deduce que al juntarse una pompa de jabón grande con una pequeña, la pequeña inflará a la más grande. De esta manera la pompa grande aumentará su tamaño mientras que la pequeña disminuirá: en otras palabras, la más grande absorberá a la más pequeña.

12.6. Capilaridad

La fuerza entre moléculas de dos substancias distintas se llama *fuerza de adhesión*. Consideremos una pequeña cantidad de líquido (medio #2) en contacto con una superficie sólida plana(medio #3) y ambos en contacto con un gas (medio #1) (ver figura 12.11). Sea $\{\sigma_{i,j}\}$, con $i, j = 1, 2, 3$ las tensiones superficiales para las distintas interfases de la figura 12.11.

Si la fuerza de adhesión (entre el líquido y el sólido) es mucho mayor que la fuerza de cohesión (entre las moléculas del líquido), entonces el líquido tenderá a esparcirse sobre el sólido (ver figura 12.6a). En este caso se dice que el líquido *moja* al sólido.

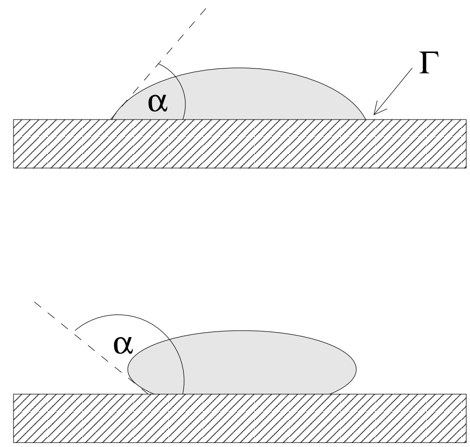

Figura 12.11

Por otra parte, si la fuerza de adhesión es mucho menor que la fuerza de cohesión, entonces el líquido tenderá a concentrarse, adquiriendo una forma compacta tipo gota (ver figura 12.11 b).

Como resultado de esta competencia entre las distintas fuerzas de adhesión y cohesión, se forma un *ángulo de contacto* α bien característico entre el líquido y el sólido. Experimentalmente se determina que este ángulo de contacto para las substancias agua–vidrio es aproximadamente 0°, mientras que para mercurio–vidrio $\alpha = 140°$.

Considere la línea Γ a lo largo de la cual conviven las tres fases. Conocemos la magnitud y la dirección de la fuerza sobre Γ proveniente de la tensión superficial del líquido. Por el principio de acción y reacción, el sólido ejercerá sobre el líquido una fuerza de la misma magnitud pero en dirección opuesta. Esta fuerza es la que hace subir un fluido por un capilar.

Consideremos un tubo fijo, de diámetro interior muy pequeño $2r$ y con un extremo inmerso verticalmente en un líquido cuya tensión superficial es σ. El largo de la línea Γ en este caso es $2\pi r$. La fuerza que el tubo ejerce sobre el líquido a través de la tensión superficial es

$$F = \sigma(2\pi r)\cos\alpha \ ,$$

donde α es el ángulo de contacto del líquido con el material del tubo. Esta fuerza debe compensarse exactamente con el peso del líquido (que está por sobre el nivel exterior).

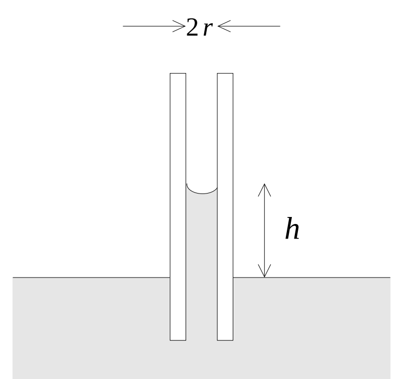

Figura 12.12

El peso del líquido que subió por el *tubo capilar* es

$$F_g = \rho_0(\pi r^2 h)g \ ,$$

donde ρ_0 es la densidad del líquido. Igualando las dos fuerzas se obtiene para la altura máxima h a la que sube el líquido la expresión

$$h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{\rho_0 g r} \ .$$

Ejemplo: Los xilemas que trasportan los nutrientes en una plante típicamente tienen un radio de 10^{-3} cm. Evaluemos la altura máxima a la que podrán llegar los nutrientes. Supondremos que el ángulo de contacto $\alpha = 0$ y para la densidad y tensión superficial del líquido usaremos la del agua.
Usando la fórmula expuesta más arriba se encuentra que $h \simeq 1{,}5$ m. La capilaridad es efectivamente uno de los mecanismos que las plantas usan para elevar la savia, sin embargo, no puede ser el mecanismo responsable para elevar el agua de las raíces hasta la punta de los árboles grandes (cuya altura puede superar los 100 metros), ya que para ello los xilemas tendrían que tener un diámetro 100 veces menor.

12.7. Fluidos en movimiento

Consideraciones preliminares

Los fluidos en movimiento se pueden clasificar con respecto a varios aspectos. Uno de ellos es la compresibilidad. La *hidrodinámica* se preocupa de estudiar el flujo de fluidos incompresibles, mientras que la *aerodinámica* analiza los flujos de fluidos compresibles. Notamos, sin embargo, que incluso los gases pueden aproximadamente como incompresibles mientras su velocidad no supere a la tercera parte de la velocidad del sonido.
Otro aspecto clasificatorio se introduce respecto al roce interno. Se tiene el flujo de un *fluido ideal* si se ignoran todos los efectos debido al roce interno (es decir, se ignora la *viscosidad* del fluido). En caso contrario se estará considerando flujos de *líquidos y gases reales*.
La trayectoria de un pequeño elemento de fluido define una *línea de corriente* o *línea de flujo*. A su vez todo un haz de líneas de flujo define un *tubo de flujo* (ver figura 12.13) también podemos clasificar los fluidos en movimiento con respecto al comportamiento de sus líneas de corriente. Si éstas no varían a medida que transcurre el tiempo se tiene un *flujo estacionario* o *flujo laminar*; en caso contrario, el flujo es *turbulento*.

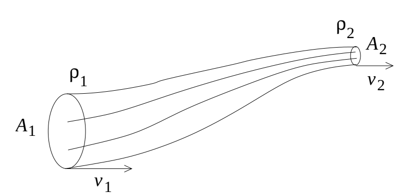

Figura 12.13

En un flujo laminar, dos líneas de corriente cercanas entre sí en cierto lugar, se mantendrán cercanas en todas partes. También dos líneas de corriente del fluido nunca se cruzan.
Cuando el flujo es turbulento entonces elementos de fluido que inicialmente están infinitesimalmente cerca pueden llegar a estar separados por distancias macroscópicas a medida

que transcurre el tiempo. El flujo del fluido en este caso es caótico y se forman remolinos erráticos (llamadas también *corrientes parásitas*).

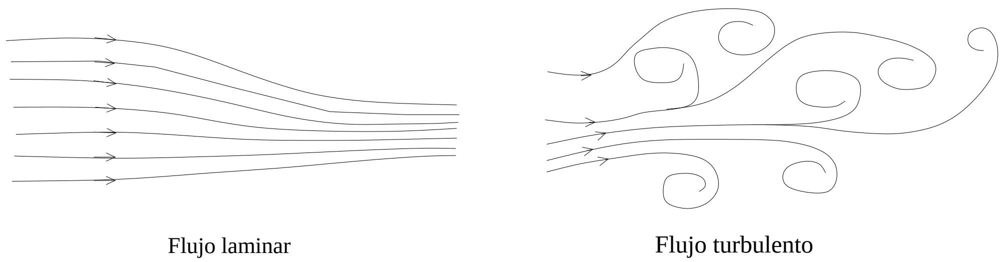

Figura 12.14

La disipación de energía es mucho mayor cuando el flujo es turbulento que cuando es laminar.

Ecuación de continuidad

Consideremos un tubo de flujo como, por ejemplo, el que se muestra en la figura 12.7. Sean A_1, ρ_1 y v_1 el área transversal del tubo, la densidad y velocidad del fluido en la entrada del tubo y A_2, ρ_2 y v_2 las mismas magnitudes pero a la salida del tubo. Para un flujo estacionario, la cantidad de fluido que ingresa por el tubo durante un intervalo de tiempo dt debe coincidir con la que emerge en ese mismo intervalo por el otro extremo, luego

$$\rho_1 A_1 v_1 \, dt = \rho_2 A_2 v_2 \, dt \ ,$$

relación a la que se denomina *ecuación de continuidad*. Cuando el flujo es incompresible, la densidad no cambia (o sea, $\rho_1 = \rho_2$), luego, para fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad es

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \ .$$

Ecuación de Bernoulli

En lo que sigue consideraremos el flujo estacionario de un fluido ideal incompresible. Sean P_1 y P_2 las presiones a la entrada y salida de un tubo de flujo, respectivamente. Evaluemos el trabajo neto en el punto de entrada realizado por la presión sobre el fluido que está al interior del tubo. En un tiempo dt la sección transversal inicial avanza una distancia $v_1 \, dt$, siendo el trabajo sobre el fluido

$$W_1 = F_1 v_1 \, dt = P_1 A_1 v_1 \, dt \ .$$

Por otra parte, el fluido que emerge del tubo realiza un trabajo igual a

$$W_2 = F_2 v_2 \, dt = P_2 A_2 v_2 \, dt \ .$$

La diferencia es el trabajo neto realizado sobre el fluido:

$$dW = W_1 - W_2 = (P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2) \, dt \ .$$

Este trabajo neto hecho sobre el fluido debe ser igual al cambio de energía (potencial y cinética) del fluido:

$$dW = dU + dK \ .$$

Si z_1 es la altura del fluido a la entrada del tubo y z_2 la altura a la salida, el cambio de energía potencial es

$$dU = (\rho A_2 v_2 \, dt) z_2 g - (\rho A_1 v_1 \, dt) z_1 g \ .$$

El cambio de energía cinética es

$$dK = \frac{1}{2}(\rho A_2 v_2 \, dt) v_2^2 - \frac{1}{2}(\rho A_1 v_1 \, dt) v_1^2 \ .$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}(P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2) \, dt = {} & [(\rho A_2 v_2 \, dt) z_2 g - (\rho A_1 v_1 \, dt) z_1 g] \\ & + \frac{1}{2}(\rho A_2 v_2 \, dt) v_2^2 - \frac{1}{2}(\rho A_1 v_1 \, dt) v_1^2 \ .\end{aligned}$$

Usando la ecuación de continuidad, se encuentra

$$P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1) - \frac{1}{2}\rho \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \ ,$$

o sea, para cualquier punto a lo largo de un tubo de flujo,

$$P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \ .$$

Esta última relación, consecuencia directa del teorema de conservación de la energía, se conoce con el nombre de *ecuación de Bernoulli*. Es importante recalcar que la ecuación de Bernoulli recién deducida es sólo válida para fluidos ideales, o sea aplicable sólo a situaciones en las cuales la viscosidad es despreciable.

12.8. Aplicaciones del principio de Bernoulli

Supondremos implícitamente que en todos los casos analizados en la presente sección que el fluido bajo consideración es ideal y que el flujo es estacionario. En la práctica los resultados obtenidos aquí serán sólo una primera aproximación al problema estudiado. Para una descripción más precisa es necesario incluir en el formalismo los efectos introducidos por la viscosidad.

Problema 1: Un tambor de altura h y área A, parado y abierto por la tapa superior (es decir, en contacto con la atmósfera), se encuentra lleno de agua. Asuma que en la parte inferior del manto se abre un tapón de sección transversal a. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el tambor?

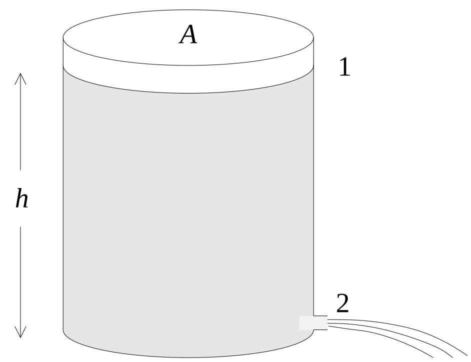

Figura 12.15

Solución: Apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2, en la parte superior del fluido en el tambor y una vez que ha emergido del tambor (figura 12.14). En ambos lugares la presión del fluido es igual a la presión atmosférica P_0.

Elijamos el origen del eje vertical en la base del tambor. De acuerdo a la ecuación de Bernoulli se tiene

$$P_0 + \rho g h + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \ ,$$

donde v es la velocidad del fluido a la salida del tambor. La velocidad, por lo tanto, es

$$v = \sqrt{2gh} \ .$$

Esta última relación se llama *teorema de Torricelli*. Observe que la velocidad del fluido es la misma que la que adquiere un objeto cuando cae una distancia h.
Supongamos ahora que en cierto instante el fluido dentro del tambor está a una altura z. El volumen de fluido que emerge en un tiempo dt es $av\,dt$, lo que hace bajar el nivel del tambor en $dz = -av\,dt/A$. Tenemos que

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{a}{A} v = \frac{a}{A}\sqrt{2gz} \ ,$$

o, escribiéndolo de otra forma,

$$-\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{a}{A}\sqrt{2g}\, dt \ .$$

Integrando la última ecuación desde que se comienza a evacuar el tambor hasta que esté vacío, se obtiene:

$$\begin{aligned} -\int_{z=h}^{z=0} \frac{dz}{\sqrt{z}} &= \frac{a}{A}\sqrt{2g}\int_{t=0}^{t=T} dt \\ -\left(2z^{1/2}\Big|_h^0 \right) &= \frac{a}{A}\sqrt{2g} t\Big|_0^T \\ 2\sqrt{h} &= \frac{a}{A}\sqrt{2g} T \ . \end{aligned}$$

El tiempo que demora en evacuarse el tambor es

$$T = \frac{2A}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}} \ .$$

Problema 2: Considere un sifón consistente de un tubo con un diámetro constante de 10 cm, con el cual se extrae agua de una represa. Con las alturas mostradas en la figura 2.15, evalúe el flujo que pasa por el tubo.

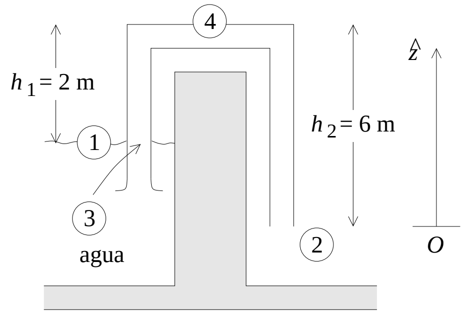

Figura 12.16

Solución: Apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2. Se tiene que

$$P_0 + \rho g(h_2 - h_1) + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \ ,$$

donde v es la velocidad del agua al interior del tubo. Como el fluido es incompresible y el diámetro del tubo no cambia, la velocidad para un fluido ideal al interior del tubo en todos los lugares es la misma. Para la velocidad v se obtiene

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \ .$$

El volumen de agua que pasa por el tubo en un tiempo dt es

$$dV = Av\,dt \ ,$$

donde A es la sección transversal del tubo. Sustituyendo los valores del enunciado se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \pi(0{,}05)^2\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4} \ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} \simeq 70 \ \text{litros/s} \ .$$

¿Cuál es la presión en el punto 3 (al interior del tubo, a la altura del nivel de agua del tranque)?
Para responder esta interrogante aplicamos la ecuación de Bernoulli en los puntos 2 y 3. Tenemos

$$P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_3 + \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho v^2 \ .$$

Acá P_3 es la presión del agua en el punto 3. Se obtiene

$$P_3 = P_0 - \rho g(h_2 - h_1) \ .$$

Una columna de agua de 10 metros corresponde a aproximadamente la presión atmosférica P_0. Por lo tanto, $\rho g(h_2 - h_1) = 0{,}4P_0$. Luego $P_3 \simeq 0{,}6P_0$.

Análogamente, para la presión en el punto 4 se obtiene

$$P_4 = P_0 - \rho g h_2 \simeq 0{,}4P_0.$$

Observe que h_2 no puede sobrepasar los 10 metros, ya que de lo contrario la columna de agua se corta.

Otras aplicaciones

i) Atomizador:

Al pasar una corriente de aire por encima de un tubo abierto, se reduce la presión al interior del tubo. Si la velocidad del aire es v, la presión P justo encima del tubo es

$$P = P_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 \ .$$

La disminución de presión provoca que el líquido suba por el tubo. Una vez que el líquido llega a estar en contacto con la corriente de aire, éste se atomiza. Este principio es usado en las botellas de perfume y en los aspersores de pintura.

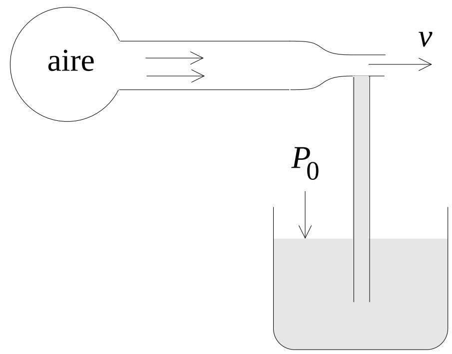

Figura 12.17

ii) Tubo de Venturi:

Al hacer pasar un líquido por una tubería estrechada, en el lugar constreñido baja la presión. La disminución de la presión permite determinar la velocidad del fluido.

Apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2 (figura 12.18).

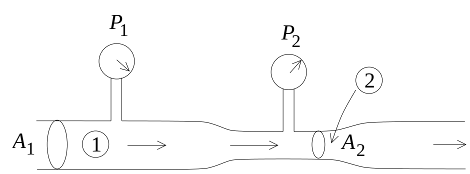

Figura 12.18

Si la tubería es horizontal (o sea, no hay cambios en la energía potencial del fluido) se tiene que

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \ .$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad nos da la relación

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \ .$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}} \ .$$

Si el flujo es suficientemente alto, el *tubo de Venturi* puede usarse para bombear. Por ejemplo, los extractores de saliva usados por los dentistas se basan en este principio.

iii) Efecto Magnus:

Consideremos un cilindro (o una esfera) en un fluido en movimiento. Si el cilindro rota en torno a un eje perpendicular a la corriente del fluido, y además hay roce viscoso entre le cilindro y el fluido, entonces el cilindro arrastrará al fluido haciendo que las velocidades del fluido a ambos lados del cilindro no sean iguales. En el caso mostrado en la figura adjunta, la velocidad es mayor arriba que abajo.

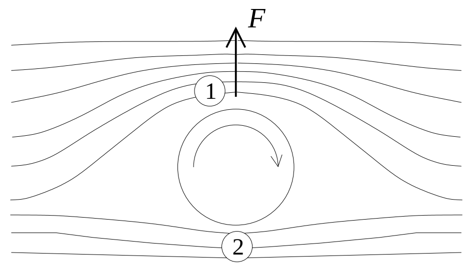

Figura 12.18

De acuerdo a la ecuación de Bernoulli, la presión en el lugar 1 serán inferior que en el lado 2 ($P_1 < P_2$). Esta diferencia de presión genera una fuerza neta sobre el cilindro hacia arriba. Es este efecto, llamado *efecto Magnus*, el responsable de los así llamados "efectos" que pueden observarse en numerosos juegos de pelota. Justamente para aumentar el "efecto" las pelotas no deben ser completamente suaves en la superficie (pelusas en la pelota de tenis).

iv) Bomba de chorro (jet) de agua:

Por una tobera inyectora P se hace ingresar agua a alta velocidad en una cámara. De esta manera se genera una disminución de la presión en la vecindad de P, lo que a su vez permite aspirar el aire de un recipiente. El límite inferior a que puede bombear este dispositivo (usando agua y a temperatura ambiente) es de aproximadamente $P \simeq 2{,}7 \cdot 10^4$ Pa (la 1/40 ava parte de la presión atmosférica)

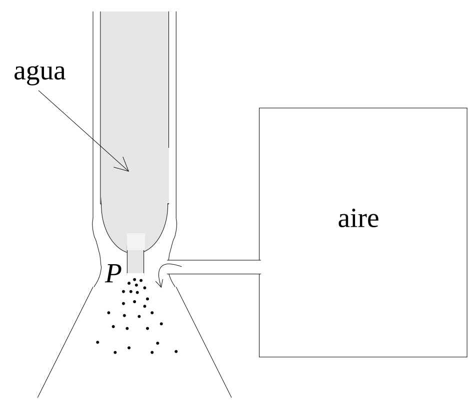

Figura 12.20

12.9. *Viscosidad

Entre las distintas moléculas de un fluido actúan fuerzas de adhesión. Por esta razón, cuando fluyen y distintas partes del fluido se mueven con velocidades relativas, aparecen *fuerzas de roce interno*, también llamada *viscosidad*. A pesar de que los fluidos no manifiestan resistencia a fuerzas de cizalla, la viscosidad hace que sí presenten cierta resistencia al deslizamiento.

Otra consecuencia de la viscosidad es que la velocidad del fluido que está en contacto con una superficie (de un sólido) es nula (con respecto a la superficie).

En esta sección sólo analizaremos casos en que el flujo es laminar.

Consideremos dos placas paralelas de área A, separadas por una distancia D y con un fluido entre ellas. Una de las placas la mantenemos fija y la otra se mueve (paralelamente) con velocidad v_0 (ver figura 12.21). El fluido en contacto con la placa superior se mueve con velocidad v_0, mientras que el que está en contacto con la placa inferior está en reposo.

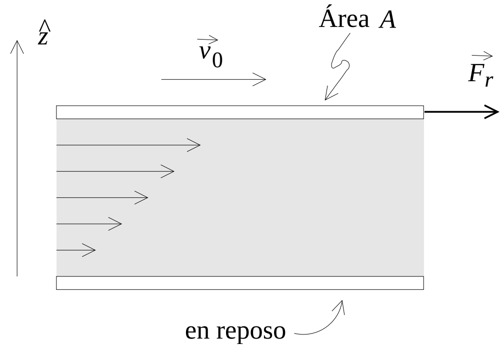

Figura 12.21

Newton experimentalmente encontró que para muchos fluidos la fuerza que se debe realizar para mantener la placa en movimiento es

$$F_r = \eta A \frac{v_0}{D} = \eta A \frac{dv}{dz} \ ,$$

o sea, es proporcional al área A y al *gradiente* (derivada) de la velocidad. La constante de proporcionalidad η es la *viscosidad dinámica*. Los fluidos que cumplen con esta relación se llaman *fluidos newtonianos*. La siguiente tabla da la viscosidad para algunas substancias:

Fluido	Temp. °C	viscosidad η [Ns/m^2]
Agua	0	$1{,}79 \cdot 10^{-3}$
Agua	20	$1{,}00 \cdot 10^{-3}$
Agua	100	$0{,}28 \cdot 10^{-3}$
Alcohol etílico	20	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	0	12.11
Glicerina	20	1.49
Aire	-31.6	$1{,}54 \cdot 10^{-5}$
Aire	20	$1{,}83 \cdot 10^{-5}$
Aire	230	$2{,}64 \cdot 10^{-5}$
Helio	20	$1{,}94 \cdot 10^{-5}$

(Otra unidad usada para medir la viscosidad es el *poise* [P]: 1 [P] = 10 [Ns/m^2].) De la tabla se observa que la viscosidad es mucho mayor para los líquidos que para los gases. También se observa una fuerte dependencia de la temperatura. Para los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, mientras que para los gases aumenta.

Flujo laminar en tubos

El efecto de la viscosidad en el flujo de fluidos por tubos de sección redonda es de gran importancia en muchas aplicaciones. Consideremos aquí un caso: el flujo estacionario de un líquido newtoniano por un tubo horizontal de largo L y radio R. Sean P_1 y P_2 las presiones del líquido en los dos extremos del tubo y determinemos el perfil de velocidad $v(r)$ del fluido al interior del tubo y el flujo por unidad de tiempo.

Sea $v(r)$ la velocidad del fluido al interior del tubo. Sabemos que $v(R) = 0$, o sea, el fluido en contacto con el tubo está en reposo. Consideremos ahora el fluido encerrado al interior de un cilindro de radio r (ver figura 12.22). Llamemos A al fluido interior y B al fluido que está ubicado a distancia mayores que r. El área de contacto del fluido A con B es $2\pi rL$.

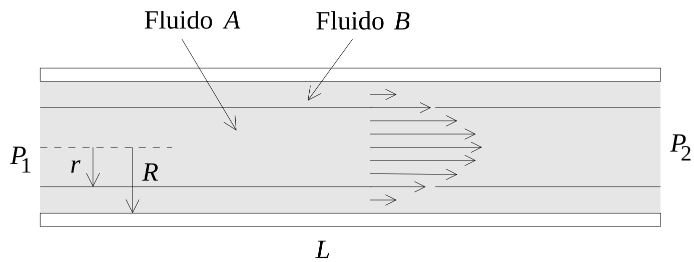

Figura 12.22

La fuerza que B ejerce sobre A es, por lo tanto,

$$\vec{F}_r = \eta(2\pi rL)\frac{dv(r)}{dr}\hat{x} \ .$$

Observe que dv/dr es negativo y, por lo tanto, la fuerza que el fluido exterior ejerce sobre A es contraria a la dirección del fluido. Como el flujo es estacionario, la fuerza total sobre el fluido A debe ser nula, o sea, la fuerza ejercida por las presiones P_1 y P_2 sobre el cilindro interno debe cancelar exactamente a la fuerza $\vec{F}_r$ debida a la viscosidad:

$$P_1\pi r^2\hat{x} - P_2\pi r^2\hat{x} + \vec{F}_r = 0 \ .$$

De esta manera se deduce que

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r \ .$$

Integrando sobre r y fijando la constante de integración de manera que $v(R) = 0$ se encuentra el perfil de velocidades al interior del tubo (*ecuación de Poiseuille*):

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \ .$$

Este perfil es de forma parabólica.

Conocido el perfil de velocidades podemos evaluar el flujo dV/dt (la cantidad de fluido que atraviesa la sección transversal del tubo por unidad de tiempo). La cantidad de fluido que pasa entre dos cilindros concéntricos de radios r y $r + dr$ en un tiempo dt es $(2\pi r\,dr)v(r)\,dt$. Sumando sobre todos los cilindros (integrando sobre r) se obtiene la cantidad de fluido dV que pasa por el tubo en un tiempo dt:

$$dV = \int_0^R (2\pi r\,dr)v(r)\,dt \ .$$

Se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi\frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\int_0^R r(R^2 - r^2)\,dr = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L}\pi R^4 \ .$$

Observe que la cantidad de agua que se puede hacer pasar por un tubo aumenta dramáticamente cuando se aumenta su diámetro. Aumentar la diferencia de presión en un factor 2 aumenta el flujo en ese mismo factor; aumentar el diámetro en un factor 2 (sin aumentar la diferencia de presión) aumenta el flujo en un factor 16.
También podemos escribir la última ecuación como sigue:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\frac{dV}{dt} \ ,$$

o sea, la pérdida de presión al pasar un flujo dV/dt por un tubo es proporcional a su largo L y a la viscosidad e inversamente proporcional a la cuarta potencia de R.

Flujo laminar alrededor de una esfera

Usando matemáticas más avanzadas se puede evaluar la fuerza de roce F_r debido a la viscosidad que actúa sobre una esfera de radio R cuando ésta se mueve respecto a un fluido con velocidad v_0. Si el flujo es laminar la fuerza es (*ley de Stokes*)

$$F_r = 6\pi\eta r v_0 \ .$$

Esta ecuación, midiendo la velocidad terminal de esferas cayendo en el fluido, permite determinar su coeficiente de viscosidad.

12.10. Problemas

1. El rey Hierón de Siracusa pidió a Arquímedes que examinara una corona maciza que había ordenado hacer de oro puro. La corona pesaba 10 kg en el aire y 9.375 kg sumergida en agua. Arquímedes concluyó que la corona no era de puro oro. Asumiendo que en su interior contenía plata, ¿cuánto oro tenía la corona de Hierón? La densidad del oro es 19.3 g/cm^3; la de la plata, 10.5 g/cm^3.

2. Considere un vaso de agua lleno hasta el borde, con un trozo de hielo flotando en él. Por supuesto que el hielo, al flotar, sobrepasará por encima del borde del vaso. A medida que el hielo se derrite. ¿Se derramará el vaso?

   Suponga ahora que en el mismo vaso flota un pequeño barco de juguete hecho de latón. Suponga además que el barquito tiene un pequeño orificio por el cual penetra agua, haciendo que el barquito lentamente se llene de agua. Durante este proceso, o sea mientras el barco se llena de agua pero aún no se hunde, el nivel del agua del vaso ¿baja, queda a igual altura o sube? Cuando finalmente el barquito se hunde, que pasa con el nivel del agua?

3. Considere un cilindro de masa M, área A y altura h, que flota "parado" en un líquido de densidad ρ_0.

a) ¿Hasta qué alguna estará sumergido el cilindro en el líquido?

b) Si el recipiente que contiene le líquido es muy grande (por ejemplo, un lago), ¿qué trabajo debe realizarse para sacar el cilindro del líquido?

c) ¿Varía la respuesta si el recipiente que contiene el líquido es un tambor cilíndrico de área A_0?

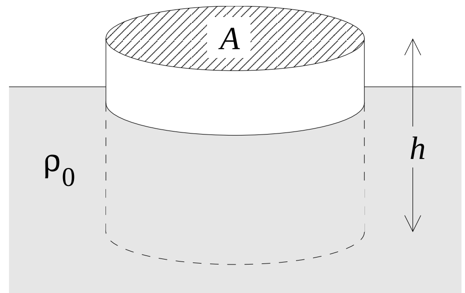

Figura 12.23

4. Considere una varilla de madera muy liviana, de largo L, sección transversal A y densidad ρ, que se hace flotar en el agua (designe la densidad del agua por ρ_0).

   a) Convénzase de que no es posible que la varilla flote "parada".

   b) Para lograr que la varilla flote parada, agreguémosle una masa puntual m en el extremo inferior. ¿Cuál es la mínima masa m que debe agregarse para lograr el objetivo?

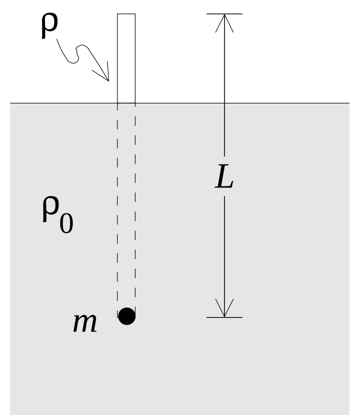

Figura 12.24

5. Considere un vaso comunicante de 2 cm^2 de sección transversal que contiene mercurio ($\rho = 13{,}6$ g/cm^3). A un lado se echan 360 gramos de glicerina ($\rho = 1{,}2$ g/cm^3) y en el otro 1/4 de litro de alcohol ($\rho = 0{,}8$ g/cm^3). Encuentre el desnivel d que existe entre los niveles superiores de la glicerina y el alcohol. Haga un gráfico cualitativo de la presión "hidrostática" en función de la profundidad para cada uno de los dos "brazos" del vaso comunicante (grafique las dos curvas en el mismo gráfico).

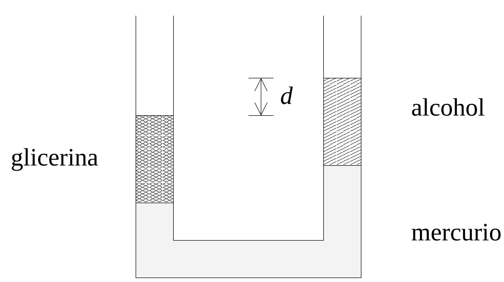

Figura 12.25

6. Considere un cilindro de sección A y altura h que se encuentra flotando en la interfase de dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2, respectivamente ($\rho_1 > \rho_2$). Encuentre la densidad ρ del cilindro si éste se encuentra sumergido en el fluido 1 en una magnitud d.

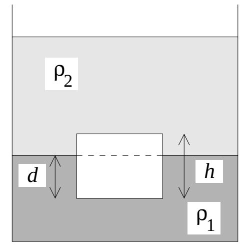

Figura 12.26

7. ¿Qué volumen de helio se requiere si debe elevarse un globo con una carga de 800 kg (incluido el peso del globo vacío)? Las densidades del aire y del helio, a la presión de una atmósfera, son $\rho_{\text{aire}} = 1{,}29$ kg/m^3 y $\rho_{\text{He}} = 0{,}18$ kg/m^3, respectivamente.

8. Una varilla de largo L y densidad ρ_1 flota en un líquido de densidad ρ_0 ($\rho_0 > \rho_1$). Un extremo de la varilla se amarra a un hilo a una profundidad h (ver figura adjunta).

   a) Encuentre el ángulo α.

   b) ¿Cuál es el mínimo valor de h para el cual la varilla se mantiene en posición vertical?

   c) Si A es la sección transversal de la varilla, encuentre la tensión del hilo.

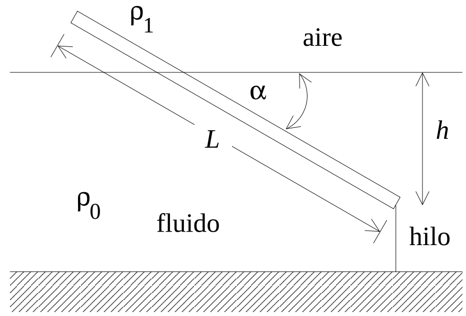

Figura 12.27

9. Considere las tres mediciones mostradas en la figura adjunta:

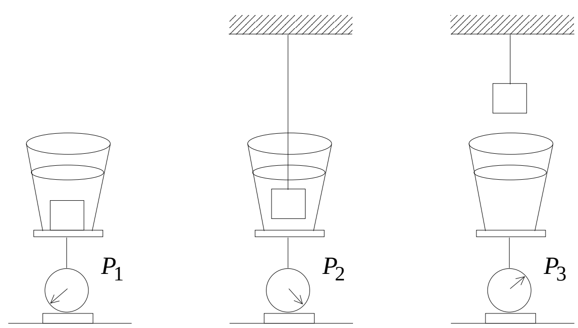

Figura 12.28

- P_1 es el peso de un recipiente con agua con un objeto sumergido en él.
- P_2 es el peso cuando el objeto está sumergido en el agua, pero colgado de una cuerda sin que toque el fondo del recipiente.
- P_3 es el peso del recipiente con agua.

Encuentre la densidad promedio del objeto.

10. En un canal horizontal, de ancho b, fluye agua con velocidad v, siendo el nivel de agua h. Asuma que en cierto lugar el canal se ensancha en una pequeña cantidad db. Demuestre que el nivel del agua cambiará en

$$dh = \frac{hv^2}{b(gh - v^2)}\, db \; .$$

Note que si $v^2 < gh$ el nivel del agua sube.

11. Un corcho cilíndrico de masa m_1 y sección transversal S_1 flota en un líquido de densidad ρ. El corcho está conectado por medio de una cuerda sin masa, de largo L, a un cilindro de aluminio de masa m_2 y sección transversal S_2. El cilindro de aluminio puede deslizarse sin roce por un orificio hermético en el fondo del tiesto. Calcular la profundidad h a la que debe hallarse la base del corcho para que el sistema de los dos cilindros esté en equilibrio. La presión atmosférica, ¿juega algún rol?

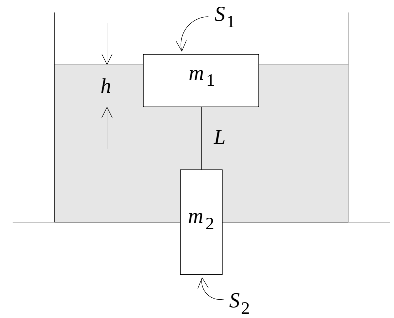

Figura 12.29

12. Un prado es regado con un regador hechizo que consiste en una botella plástica, con numerosos agujeros de 1 mm de diámetro, acostada sobre el prado y conectada aun a manguera. Asuma que una bomba de agua se encarga de generar un flujo de agua constante de 0.2 litros por segundo. ¿Cuántos agujeros debe tener la botella para que el agua llegue a mojar el prado a 8 metros de distancia de la botella? ¿Cuál es la presión al interior de la manguera si ésta tiene una sección transversal de 4 cm^2?

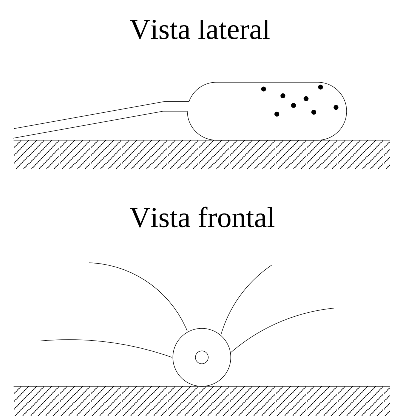

Figura 12.30

13. Un tubo de largo L, lleno de agua, gira en el plano horizontal en torno a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. En el extremo junto al eje, el tubo está abierto, coincidiendo por lo tanto la presión del fluido con la presión atmosférica. El tubo gira con velocidad angular constante ω. Si en el otro extremo, en cierto instante, se abre un pequeño orificio, ¿con qué velocidad emergerá el agua del tubo? (Especifique la rapidez y dirección de la velocidad.)

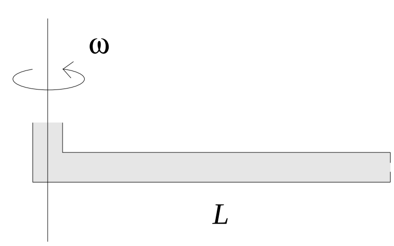

Figura 12.31

14. Para abastecer de agua a una casa de dos pisos se recurre a un "hidropack". Este sistema consiste en una depósito subterráneo, una bomba y un cilindro con agua y aire. La bomba inyecta agua a presión al cilindro, que en su parte superior queda con aire comprimido. Un medidor de presión detiene la bomba cuando la presi ón del cilindro alcanza el valor deseado (el mismo medidor vuelve a encender la bomba cuando la presión baja de cierto nivel).

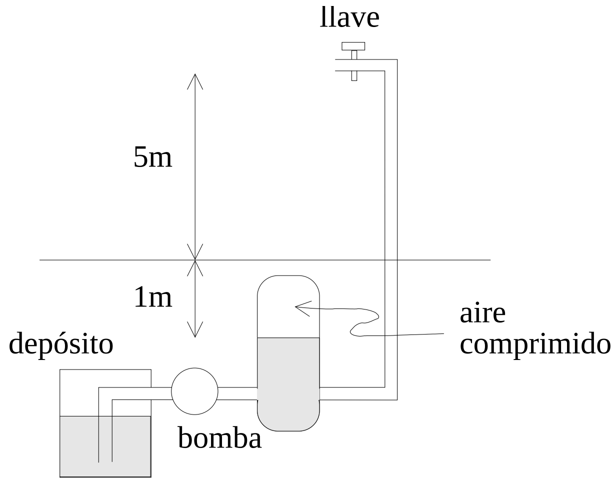

Figura 12.32

Si el nivel del agua en el cilindro se sitúa 1 metro por debajo del suelo, calcule la presión necesaria en el aire comprimido para que una llave de 1 cm^2 de sección, a una altura de 5 metros sobre el suelo, entregue un caudal de 12 litros por minuto. (La sección transversal del cilindro es grande respecto a la de la llave.) También encuentre la presión del aire al interior del cilindro.

15. La fuerza de sustentación de un avión moderno es del orden de 1000Ñ por metro cuadrado de ala. Suponiendo que el aire es un fluido ideal y que la velocidad del aire por debajo del ala es de 100 m/s, ¿cuál debe ser la velocidad requerida por sobre el ala para tener la sustentación deseada? (La densidad del aire es 1.3 kg/m^3.)

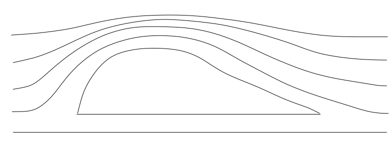

Figura 12.33

16. Un bombero lanza agua con su manguera hacia un incendio formando un ángulo de 45° con la horizontal. El agua que emerge del pistón penetra horizontalmente por una ventana del tercer piso que se encuentra a una altura $h = 10$ metros. La manguera que transporta el agua desde el carro bomba tiene un diámetro D de 6 cm y concluye en un pistón cuya abertura tiene un diámetro d de 1.5 cm.

a) ¿Cuántos litros de agua emergen del pistón por minuto?

b) ¿Cuál es la presión P que debe soportar la manguera (en atmósferas)?

17. Considere la tubería que lleva el agua de una represa hacia una turbina. Suponga que la bocatoma se encuentra a 10 metros bajo el nivel de las aguas y que la turbina se encuentra 80 metros por debajo de ese nivel. Al inicio, es decir a la salida de la represa, la tubería tiene un diámetro de 40 cm. Suponga que el fluido se comporta como un fluido ideal.

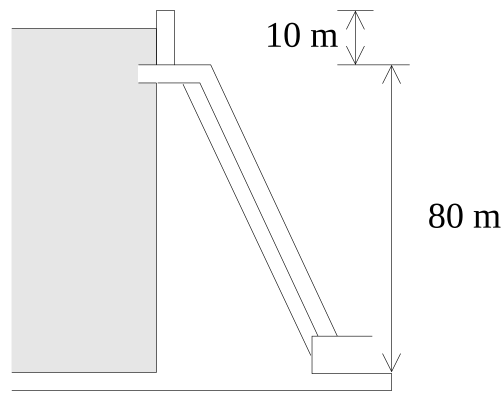

Figura 12.34

a) ¿Cuál es el diámetro máximo que puede tener la tubería en su extremo inferior para que no se produzcan cortes de la columna de agua al interior de la tubería?

b) ¿Cuál sería la cantidad de agua que pasaría en ese caso por la tubería y cuál la velocidad del agua emergente?

c) Si el proceso de generación de energía eléctrica usando la presente turbina fuese 100 % eficiente, ¿cuál sería la potencia de esta central? ¿Esto corresponde al consumo promedio de cuántas casas?

d) Haga un gráfico cualitativo de la presión al interior de la tubería en función de la altura. ¿Cómo cambia esta presión si la sección de la tubería, en el punto emergente, se disminuye a la mitad? ¿A la centésima parte?

18. Considere una tubería de una calefacción. En el sótano su diámetro es de 4.0 cm y en el segundo piso, 5 metros más arriba, la tubería tiene un diámetro de sólo 2.6 cm. Si en el sótano una bomba se encarga de bombear el agua con una velocidad de 0.5 m/s bajo una presión de 3.0 atmósferas, ¿cuál será la rapidez de flujo y la presión en el segundo piso?

19. Suponga que el nivel de un líquido (agua) en un tambor tiene una altura h. A una altura b se hace una pequeña perforación lateral que permite que el agua emerja horizontalmente. ¿A qué altura debe hacerse la perforación para que el alcance d del agua se máximo?

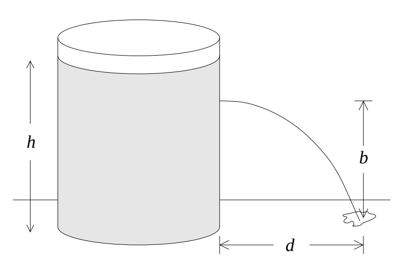

Figura 12.35

Respuesta: $b = h/2$.

20. En un torrente de agua se sumerge un tubo doblado, tal como se muestra en la figura adjunta. La velocidad de la corriente con respecto al tubo es $v = 2{,}5$ m/s. La parte superior del tubo se encuentra a $h_0 = 12$ cm sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero.

¿A qué altura h subirá el chorro de agua que sale por el agujero?

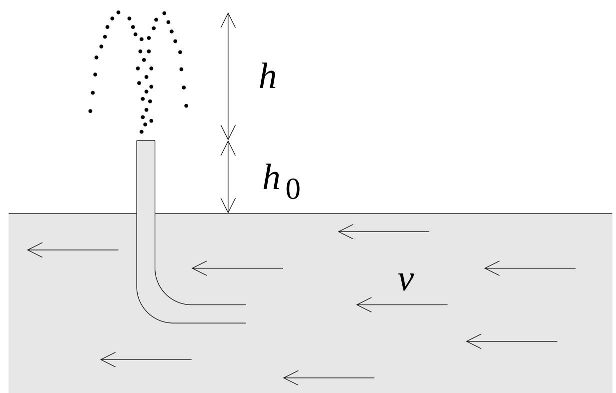

Figura 12.36

21. Considere una masa esférica homogénea en equilibrio hidrostático. Sea R_T el radio y ρ_0 la densidad de masa.

    a) Muestre que la presión a una distancia r del centro viene dada por

    $$p = \frac{2\pi}{3}\rho_0^2 G\left(R^2 - r^2\right) \ .$$

    b) Evalúe la presión al centro de la Tierra. $R_T = 6{,}3 \cdot 10^8$ cm y densidad uniforme promedio $\rho_0 = 5{,}5$ g/cm^3.

22. En un balón el gas en su interior se encuentra a una presión P. Demuestre que la velocidad con que escapa el gas, al abrir la válvula, es

    $$v = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho}} \ ,$$

    donde ρ es la densidad del gas y P_0 la presión atmosférica. (Esta ecuación se conoce por *ley de Bunsen*.)

23. Considere una prensa hidráulica (ver figura 12.37). Sean $R_1 = 25$ cm y $R_2 = 150$ cm los radios de los émbolos de bombeo y de presión, respectivamente.

    Si de la palanca que actúa sobre el émbolo de bombeo se tira con una fuerza $F_1 =$ 100 [N] (ver figura), ¿qué fuerza ejercerá el émbolo de presión sobre el objeto S?

24. Se quiere confeccionar aluminio poroso (algo así como queso suizo) que se mantenga en suspensión en agua. Determine la razón entre el volumen de los poros y el volumen del aluminio poroso. (La densidad del aluminio sólido es $\rho = 2700$ kg/m^3.)

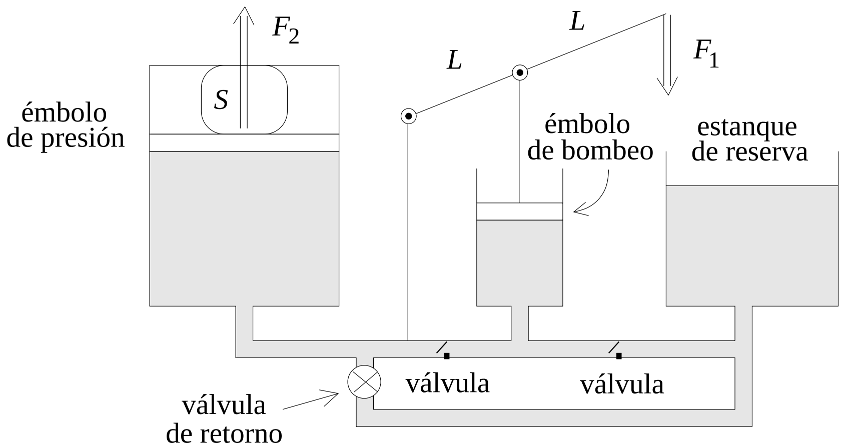

Figura 12.37

25. * Considere un cuerpo líquido de densidad uniforme ρ_0, que se mantiene unido debido a la gravedad y que gira con una velocidad angular ω_0. Si bien el cuerpo es esférico si $\omega_0 = 0$, cuando $\omega_0 \neq 0$ (pero no demasiado grande), el cuerpo adquiere la forma de un esferoide oblato. Demuestre que si la desviación de la esfericidad es pequeña, entonces

$$\frac{R_1 - R_2}{R} = \frac{3}{8\pi}\frac{\omega_0^2}{\rho_0 G} ,$$

donde $R \simeq R_1 \simeq R_2$. Evalúe $(R_1 - R_2)/R$ para la Tierra y compárelo con el valor experimental, que es $\sim 1/298{,}4$.

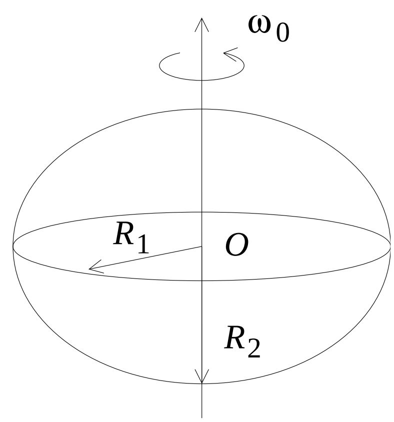

Figura 12.38

26. * Considere la situación mostrada en la figura 12.39. Un cilindro de radio R y largo L evita que el agua de cierto recipiente se rebase. El cilindro se puede mover libremente. La densidad del cilindro es tal que, cuando el agua llega a la parte superior del cilindro, la posición del cilindro es la mostrada en la figura. Encuentre la fuerza que ejerce el agua sobre el cilindro. Encuentre la densidad del material del que está hecho el cilindro.

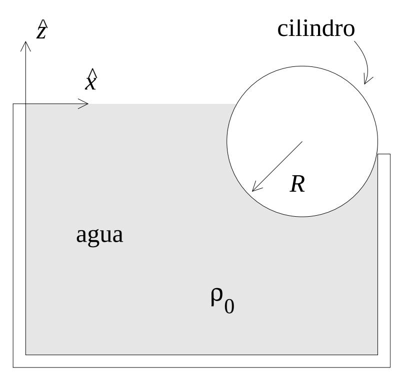

Figura 12.39

27. * Considere una caja de dimensiones a, b y h, llena de agua. Todos los lados de la caja están firmemente unidos entre sí, excepto uno de los lados laterales (de dimensión $b \cdot h$). Evalúe la magnitud de la fuerza exterior mínima con que debe presionarse ese lado contra el resto de la caja para que el agua no escurra. Si la fuerza se aplica en un solo lugar, encuentre la posición en la que debe aplicarla.

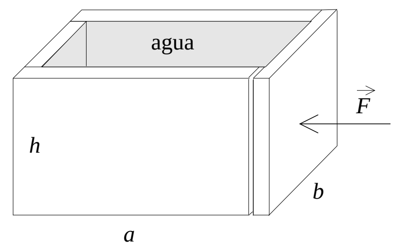

Figura 12.40

28. Un mol de aire en condiciones normales (a nivel del mar y a 20°C de temperatura) ocupa un volumen de 22.4 litros. Estime la densidad del aire si gran parte de él está constituido por nitrógeno. (Resp.: $\sim$ 1,28 kg/m^3.)

¿Cuál es el mínimo volumen que debe tener un globo de helio ($\rho = 0{,}18$ kg/m^3) para levantar un vehículo de 1200 kg?

29. Dos globos esféricos inflados con aire, ambos de radio R, se unen mediante una cuerda de longitud L. Los dos globos se mantienen bajo el agua con el punto medio de la cuerda fijo al fondo. Calcular la fuerza de contacto entre los globos.

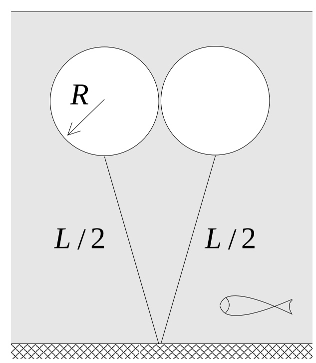

Figura 12.41

30. Una varilla yace en el fondo de un recipiente con agua formando un ángulo de 60° con la vertical. La varilla es de sección uniforme y está formada por dos pedazos iguales en longitud pero de distinta densidad. La densidad de una de las porciones de la varilla es la mitad de la del agua. Determine la densidad de la otra porción.

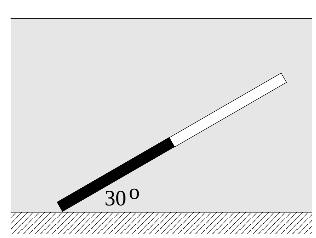

Figura 12.42

31. Considere un bloque de hielo ($\rho = 920$ kg/m^3) en forma de "L", formado de tres cubos de 25 cm por lado. Mediante un peso se desea sumergir el hielo en agua como se indica en la figura. Determine la masa del peso y la ubicación en el hielo donde debería adherirse de modo que el hielo se mantenga justo sumergido lo más estable posible.

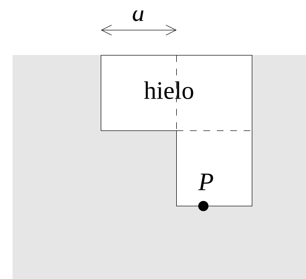

Figura 12.43

32. Considere un sistema de vasos comunicantes formado por dos tubos de sección transversal de 50 cm^2 que están unidos por un tubito corto de sección transversal muy pequeña (o sea, para efectos de este problema podemos despreciar la cantidad de fluido que se encontrará en el tubito). Inicialmente en este sistema de vasos comunicantes se encuentran dos litros de agua.

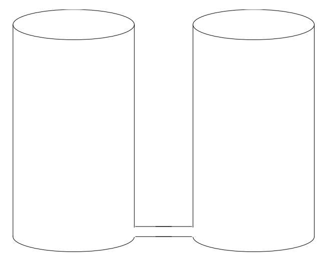

Figura 12.44

a) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos se le agregan 2 litros de un líquido cuya densidad es $\rho = 0{,}8$ g/cm^3.

b) Para la situación descrita en la parte a), encuentre la presión en el fondo de los vasos comunicantes.

c) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos, en lugar de 2, se le agregan 3 litros de un líquido cuya densidad es $\rho = 0{,}8$ g/cm^3.

33. Un tubo horizontal por el que fluye líquido de densidad ρ_0 a razón de Q m^3/s, se bifurca en dos ramas en el plano vertical, una superior y otra inferior, de secciones transversales $a_1 = a_2 = a$, abiertas a la atmósfera (ver figura 12.45). Si la distancia entre las ramas es h, determinar:

a) Las cantidades q_1 y q_2 de líquido (en m^3/s) que fluyen por ambas ramas.

b) La condición que debe cumplir Q para que haya flujo en la rama superior.

34. Una gotita de agua de 1 mm de radio se pulveriza en gotitas de 10^{-4} mm de radio. ¿En qué factor aumenta la energía superficial (debido a la tensión superficial)?

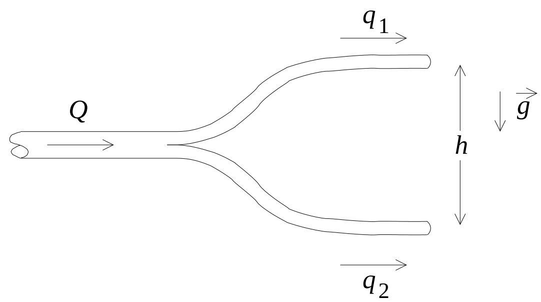

Figura 12.45

35. La figura 12.46 muestra un *tubo de Pitot*, instrumento que se usa para medir la velocidad del aire. Si el líquido que indica el nivel es agua y $\Delta h = 12$ cm, encuentre la velocidad del aire. La densidad del aire es $\rho_{\text{aire}} = 1{,}25$ kg/m^3.

    Respuesta: $v_0 = 43{,}4$ m/s $= 156$ km/h.

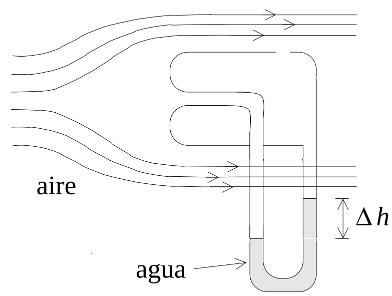

Figura 12.46

36. Considere dos placas planas de vidrio, separadas por una distancia de 0,1 mm, con un extremo sumergidas en agua en forma vertical. ¿Qué distancia se elevará el agua entre las placas debido a la capilaridad?

37. * Encuentre la velocidad terminal que adquiere una esfera de cobre de 0,5 cm de diámetro, cuando cae en agua ($\rho_{\text{Cu}} = 8{,}92$ g/cm^3). ¿En qué factor disminuye la velocidad terminal si el diámetro se achica en un factor 10?

38. * Considere un oleoducto de 5 km y 50 cm de diámetro por el cual se desea bombear 1 m^3 por segundo. Si uno de los extremos está abierto a la presión atmosférica, ¿qué presión P_1 debe existir en el otro extremo? Suponga que la densidad del petróleo es $\rho = 950$ kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es aproximadamente $\eta = 0{,}2$ Pa · s. ¿Cuál es la potencia dW/dt (energía por unidad de tiempo) disipada por la fricción interna originada por la viscosidad?

    Respuesta: $P_1 \simeq 7{,}5$ atm; $dW/dt \simeq 650$ kW.

12.11. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 8

El largo a de la parte de la varilla sumergida es $a = h/\operatorname{sen}\alpha$. La fuerza de empuje se aplica en el lugar $a/2$ y la fuerza de gravedad en el lugar $L/2$ (medidos desde O).
Sea A la sección transversal de la varilla. Entonces la fuerza de empuje viene dada por

$$\vec{F}_e = \rho_0 A a g \hat{z} = \rho_0 A \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} g \hat{z} \ .$$

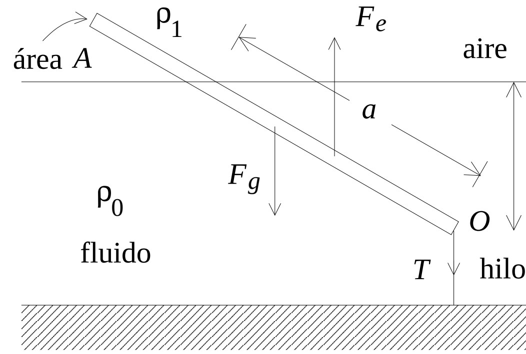

Figura 12.47

La fuerza de gravedad es

$$\vec{F}_g = -\rho_1 L A g \hat{z} \ .$$

El torque ejercido por ambas fuerzas respecto a O debe ser nulo, o sea,

$$F_e \frac{a}{2} \cos\alpha = F_g \frac{L}{2} \cos\alpha \ .$$

Simplificando se obtiene

$$F_e a = F_g L \ .$$

Sustituyendo las expresiones par F_e y F_g se deduce que

$$\rho_0 A a^2 g = \rho_1 A L^2 g \ ,$$

o sea

$$\rho_0 \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \rho_1 L^2 \ .$$

Despejando se encuentra finalmente que

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} \frac{h}{L} \ .$$

Si el lado derecho de la última ecuación es mayor o igual a uno, la varilla se mantendrá en posición vertical. El mínimo valor de h para que la varilla esté en posición vertical es

$$h_{\min} = L \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}} \ .$$

La tensión del hilo se obtiene exigiendo que la fuerza total sea nula. De esta manera se obtiene que

$$\begin{aligned} T = F_e - F_g &= \rho_0 A \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} g - \rho_1 L A g \\ &= A L g \rho_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right) = M g \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right) \ , \end{aligned}$$

donde M es la masa de la varilla.

Solución al problema 16

a) Si v es la velocidad con que emerge el agua del pistón, la velocidad hacia arriba será $v/\sqrt{2}$. El agua alcanza a subir una altura h, luego su velocidad es

$$v = 2\sqrt{gh} = 20 \text{ m/s} .$$

La cantidad de agua V que emerge del pistón en $t = 60$ segundos es

$$V = vt\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}20 \cdot 60 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}015)^2 \text{ m}^3 = 212 \text{ litros} .$$

b) Usemos el teorema de Bernoulli para comparar el flujo del agua justo a la salida del pistón con el flujo en la manguera justo detrás del pistón. No hay cambio en la energía potencial. Como la sección transversal de la manguera es 16 veces mayor que la abertura del pistón, la velocidad del agua en la manguera será 16 veces menor que la velocidad emergente v. A la salida del pistón la presión es la presión atmosférica, que ignoraremos en el presente cálculo, ya que sólo estamos interesados en la presión adicional p que debe soportar la manguera debido al agua que fluye en su interior. Se tiene

$$p + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{v}{16}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 .$$

Ignorando la energía cinética del agua al interior de la manguera (convénzase de que modifica el resultado final en menos de un 0.5 %), se obtiene

$$p = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 = \frac{1}{2}\,1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,400\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2 \cdot 10^5\,\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} ,$$

lo que corresponde a aproximadamente 2 atmósferas.

Solución al problema 27

Elijamos el eje $\hat{z}$ a lo largo de la vertical, con el origen al fondo de la caja sobre la tapa móvil. La presión a una altura z es $P(z) = \rho_0 g(h - z)$. Dividamos la tapa en franjas horizontales de largo b y ancho (altura) dz. La fuerza que ejerce el fluido sobre la franja que está a la altura z es

$$dF = P(z)b\,dz .$$

Sumando (integrando) la fuerza que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene la fuerza total

$$F = \int_0^h P(z)b\,dz = \rho_0 gb\int_0^h (h - z)\,dz = \frac{1}{2}\rho_0 bgh^2 .$$

Para encontrar a qué altura h_0 debemos aplicar esta fuerza sobre la tapa, evaluemos el torque que ejerce el fluido sobre la tapa respecto al origen. El torque que el fluido ejerce sobre la franja que está a la altura z es

$$d\tau = zP(z)b\,dz .$$

Sumando (integrando) el torque que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene el torque total

$$\tau = \int_0^h zP(z)b\,dz = \rho_0 gb \int_0^h z(h-z)\,dz = \frac{1}{6}\rho_0 bgh^3 \ .$$

Para que la tapa esté en equilibrio el torque que ejerce la fuerza total externa F debe coincidir en magnitud con τ, es decir,

$$Fh_0 = \tau \ ,$$

o sea

$$\frac{1}{2}\rho_0 bgh^2 h_0 = \frac{1}{6}\rho_0 bgh^3 \ .$$

De esta ecuación se deduce finalmente que $h_0 = h/3$.

Solución al problema 33

La relación de Bernoulli se puede aplicar entre los puntos A y B_1 y también entre A y B_2. Por transitividad, la relación de Bernoulli también es válida entre los puntos B_1 y B_2. Se tiene

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \ .$$

Pero $P_1 = P_2 = P_0$ (la presión atmosférica), $h_1 = 0$ y $h_2 = h$, luego

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \ .$$

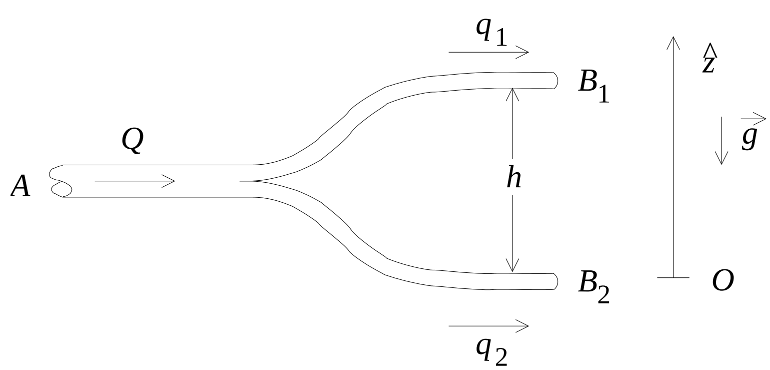

Figura 12.48

Los flujos que circulan por la rama superior e inferior vienen dados por $q_1 = av_1$ y $q_2 = av_2$, respectivamente. También se tiene que $Q = q_1 + q_2$. De las relaciones anteriores se deduce que

$$q_1 = \frac{Q^2 - 2a^2 gh}{2Q}$$

y

$$q_2 = \frac{Q^2 + 2a^2 gh}{2Q} \ .$$

Para que circule líquido por la rama superior se debe tener que

$$Q > a\sqrt{2gh}\ .$$