FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2008-1
Unidad 3: Sistemas Extendidos
Por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

---

## Indice

La mecánica newtoniana de sistemas compuestos consiste en una extensión de las tres Leyes de Newton, además del *Principio de Superposición*, postuladas para cuerpos puntuales. Estas leyes se resumen como sigue:

*I.- Si un cuerpo en reposo no interactua con el entorno, entonces este permanecerá en reposo indefinidamente.*[1]

*II.- El cambio de momentum $\delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza aplicada y a la duración $\delta t$ de su aplicación.*[2]

*III.- La fuerza que un agente externo ejerce sobre el cuerpo es igual en magnitud, pero de sentido opuesto, a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el agente.*

El *Principio de Superposición* se refiere a que las fuerzas son aditivas en el sentido vectorial.

## 1. Generalidades sobre sistemas extendidos

Para estudiar la evolución de un sistema formado por muchas componentes nos valemos de las leyes de Newton, las que se adaptan de forma muy sencilla a sistemas complejos. Primero es necesario definir *el sistema* a estudiar, vale decir, el conjunto de partículas –distinguibles y enumerables– que uno escoge (ficticiamente) para el estudio de un fenómeno dado. El criterio que comunmente nos guía para definir las componentes del sistema es la simplicidad que nos brinde para respondernos preguntas específicas. Suponemos que las componentes del sistema pueden interactuar entre sí, y a su vez con el exterior.

En un intento de clasificación muy general, los tipos de sistemas que podemos contemplar son

i.- disgregados, tales como galaxias de estrellas, sistemas granulares, gases, etc.;

ii.- líquidos, donde las moléculas constituyentes mantienen cohesión, pero permiten que dos moléculas en contacto puedan, luego de algún tiempo, estar muy distantes entre sí.

iii.- medios elásticos, donde el conjunto de moléculas vecinas se mantiene pero sus y distancia de separación puede variar moderadamente ante deformaciones.

iv.- sólidos indeformables, donde las distancias entre moléculas vecinas es invariable en el tiempo.

En un primer acercamiento al estudio de sistemas extendidos nos focalizaremos en los *sólidos indeformables*. Un sólido lo visualizamos como un contínuo de materia, como se ilustra en la Fig. (1a) para una barra. Esta barra la trozamos imaginariamente en celdas (1b), para terminar

[1] A la inversa, si un cuerpo cambia de su estado de reposo, entonces es porque interactuó con el entorno.
[2] Esta relación se expresa $\delta\vec{p} = \vec{F}\delta t \quad \rightarrow \quad \vec{F} = d\vec{p}/dt = m\vec{a}$.

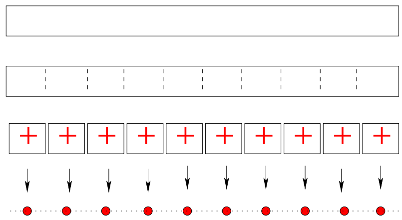



Figura 1: Representación de una barra como una colección de partículas.

con las celdas independientes indicadas en (1c). Entre celdas contiguas hay fuerzas de cohesión. Cada una de estas celdas, si son lo suficientemente pequeñas, puede ser emulada como una partícula (1d). Nuevamente, la interacción dominante ocurre entre partículas vecinas.

### 1.1. Masa y centro de masas

En los sistemas newtonianos la masa es una cantidad aditiva. Con este argumento podemos imaginar un cuerpo como la unión de $N$ celdas materiales, cada una de ellas con masa determinada. Si la celda $i$-ésima tiene masa $m_i$, con $i : 1 \to N$, entonces la masa del sistema viene dada por

$$M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Supongamos el sistema se distribuye espacialmente de modo que la posición de la celda $i$ se representa mediante el vector posición $\vec{r}_i$ referido a un origen $O$ de un sistema de referencia $S$ arbitrario. Este sistema puede ser el laboratorio, el suelo, la tierra, la via lactea, etc. Se define la posición del *centro de masas* $\vec{R}$ del sistema por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \ .$$

En coordenadas cartesianas, si denotamos

$$\vec{R} = R_x \hat{\imath} + R_y \hat{\jmath} + R_z \hat{k} \ , \qquad (1)$$

$$\vec{r} = x \hat{\imath} + y \hat{\jmath} + z \hat{k} \ , \qquad (2)$$

entonces,

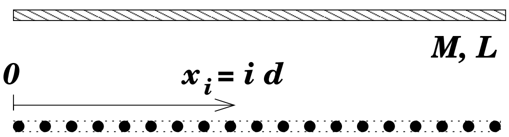
$$R_x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i \; , \tag{3}$$

$$R_y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i \; , \tag{4}$$

$$R_z = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i \; . \tag{5}$$

**El centro de masas de una barra.**
Consideremos una barra de longitud $L$ y masa $M$ distribuida uniformemente. A esta barra la dividimos en $n+1$ trozos, los cuales se separan en $d = L/n$. La masa de cada trozo es $M/(n+1)$, y la coordenada $x$ de la $i$-ésima es $x_i = i\, d$. Entonces, la ubicación del centro de masas (según el eje horizontal $x$) está dado por

$$R_x = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{n} m_i x_i = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{n} \frac{M}{n+1} \times \frac{iL}{n} = \frac{L}{2}$$




## 1.2. Energía potencial gravitacional de un cuerpo.

Consideremos un cuerpo de masa $M$ en presencia de la gravedad terrestre $g$. Podemos imaginar este cuerpo constituido por $N$ celdas enumerables. La energía potencial gravitacional del sistema es la suma de la contribición de cada una. Así, si la celda $i$-ésima es de masa $m_i$ y su coordenada con respecto al nivel cero de energía potencial es $y_i$, entonces la energía potencial total $U_g$ es

$$U_g = \sum_{i=1}^{N} m_i g y_i = Mg\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} = MgY_{CM} \; ,$$

donde claramente $Y_{CM}$ representa la coordenada $Y$ del centro de masas del sistema.

## 1.3. Centro de masas de centros de masas

Como vimos anteriormente, el centro de masas de una barra uniforme se ubica en su punto medio. Nos preguntamos por la ubicación del centro de masas de una 'L' formada por dos barras idénticas, unidas perpendicularmente en uno de sus extremos. Este cálculo es bastante simple si se recurre al siguiente teorema:

*Si $\vec{R}_A$ localiza el centro de masas de un sistema A de masa $M_A$*
*y $\vec{R}_B$ el de un sistema B de masa $M_B$,*
*entonces el centro de masas del conjunto está dado por*

$$\vec{R} = \frac{M_A\vec{R}_A + M_B\vec{R}_B}{M_A + M_B}$$

La demostración es bastante simple. Sea $M$ la masa de todo el sistema, con $M = M_A + M_B$. Si $\vec{R}$ denota la posición del centro de masas de todo el sistema, entonces

$$M\vec{R} = \sum_{todos} m_i\vec{r}_i = \sum_{i\in A} m_i\vec{r}_i + \sum_{i\in B} m_i\vec{r}_i \ .$$

Pero, $M_A\vec{R}_A = (\sum_{i\in A} m_i\vec{r}_i)$, análogamente para $\vec{R}_B$. Con ello,

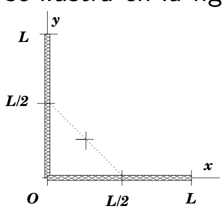
$$M\vec{R} = M_A\vec{R}_A + M_B\vec{R}_B \ ,$$

el resultado buscado.

**El centro de masas de una escuadra:**
Consideremos el sistema formado por dos barras idénticas de longitud $L$ y masa $M$, unidas perpendicularmente en sus extremos. Ubicamos la escuadra en un sistema cartesiano, eligiendo orientación y origen que aporten la mayor simplificación en los cálculos. Si el subsistema A es la barra horizontal y la B es la vertical, entonces

$$R_x = \frac{M\times(L/2) + M\times 0}{M+M} = \frac{L}{4} \ ; \qquad R_y = \frac{M\times 0 + M\times(L/2)}{M+M} = \frac{L}{4} \ .$$

Este resultado representa el punto medio entre los puntos medios de cada barra, como se ilustra en la figura de más abajo.



## 1.4. Momentum de un sistema extendido

Supongamos que un sistema de partículas evoluciona espacialmente, vale decir, sus constituyentes se mueven. Supongamos que la celda $i$-ésima tiene una velocidad $\vec{v}_i$, por lo tanto su momentum es $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$. El *momentum total del sistema*, o simplemente el *momentum del sistema*, se denota por $\vec{P}$ y se define como la suma de los momenta de sus componentes:

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

> *Una propiedad muy importante es que el momentum $\vec{P}$ de un sistema elemental o compuesto resulta igual al producto de su masa total $M$ por la velocidad de su centro de masas $\vec{V}$.*

En efecto, consideremos la definición de centro de masas y derivamos con respecto al tiempo para obtener su velocidad. Usando propiedades de las derivadas y considerando las masas $m_i$ no varían en el tiempo

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i}_{\vec{P}} = \frac{1}{M}\vec{P}\,.$$

Entonces

$$\vec{P} = M\vec{V} \tag{6}$$

## 1.5. La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

Hemos denotado por $\vec{V}$ la velocidad del centro de masas de un sistema. Su tasa de variación por unidad de tiempo corresponde a la aceleración del centro de masas y la denotamos por $\vec{a}$. En algunos textos se usa la notación $\vec{a}_{CM}$. Entonces,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\,.$$

El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las N componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema. Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas que ligan al sistema y del eventual cambio de geometría que este pueda experimentar.

Consideremos un sistema formado por $N$ partículas interactuando entre ellas. El sistema no necesariamente es un sólido; puede tener cualquier constitución. Al analizar la $i$-ésima partícula, observamos que sobre ella puede actuar resultante externa que denotamos $\vec{F}_i$. También, sobre la misma partícula $i$-ésima interactúan las restantes $N-1$ partículas. Si denotamos $\vec{f}_{j/i}$ la fuerza que ejerce la componente $j$ sobre la $i$, y convenimos (por simplicidad) en que $\vec{f}_{i/i}=0$, entonces la fuerza neta de todas las componentes sobre la $i$-ésima es $\sum_{j=1}^{N}\vec{f}_{j/i}$. La ecuación de movimiento de Newton para la partícula $i$ es:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{N}\vec{f}_{j/i}\ . \tag{7}$$

La ecuación anterior corresponde a la de la partícula $i$, y por lo tanto resume un total de $N$ ecuaciones. Si sumamos todas ellas:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}}=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}_{\vec{F}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{f}_{j/i}}_{\vec{0}}\ . \tag{8}$$

Aquí observamos

- que la suma de derivadas es igual a la derivada de la suma, por lo cual $\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}$;
- que la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas externas es igual a la suma de todas ellas; y
- que la suma de todos los *pares de fuerzas internas* es nulo, en virtud al principio de acción y reacción ($\vec{f}_{i/j}=-\vec{f}_{j/i}$).

Con lo anterior

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d(M\vec{V})}{dt}=M\dot{\vec{V}}=M\vec{a}\ . \tag{9}$$

Esta ecuación resume el comportamiento del centro de masas de un sistema cualquiera cuando sobre este actúa una fuerza externa neta $\vec{F}$. Este es un resultado totalmente general, independiente de si el sistema es sólido, líquido, gaseoso, granular, plástico, amorfo, etc. El movimiento del centro de masas está determinado exclusivamente por las fuerzas externas.

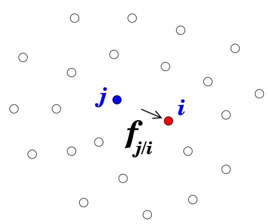



Figura 2: Un sistema de $N$ cuerpos donde se muestra la fuerza ejercida por $j$ sobre $i$.

## 1.6. Energía cinética por rotación en torno a ejes fijos

Consideremos un sólido rotando con velocidad angular $\omega$ en torno a un eje fijo. Lo que hace simple el cálculo de la energía cinética de este sistema es el hecho de que cada molécula que compone al sólido describe un movimiento circunferencial.

La energía cinética es una cantidad aditiva, vale decir, si representamos el sistema como un conjunto de $N$ celdas, cada una de masa $m_i$, con $i : 1 \rightarrow N$, entonces la energía cinética total del sistema está dado por

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 \, .$$

Considerando que la celda $i$-ésima experimenta describe un trayecto de radio $\rho_i$ con velocidad angular $\omega$, entonces su rapidez es $\omega\rho_i$. Sustituyendo en la expresión para la energía cinética obtenemos

$$K = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \right]}_{I} \omega^2$$

Aquí hemos definido el *momento de inercia* del sólido en torno al eje de rotación, que denotamos por $I$:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \, ,$$

con $\rho_i$ la distancia al eje de la celda $i$-ésima, de masa $m_i$. Esta definición se extiende a cualquier sólido distribuido volumétricamente.

Observaciones:

1. El momento de inercia depende del eje con respecto al cual se evalúa.
2. No hay restricción a la orientación ni dirección de los ejes con respecto al cual se evalue el momento de inercia.
3. El momento de inercia disminuye cuando la distribución de masas es muy próxima al eje considerado.

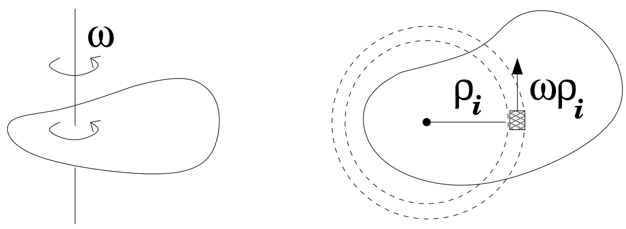
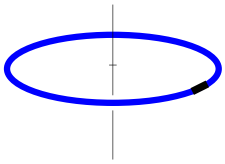



Figura 3: Un cuerpo plano rotando en torno a un eje fijo; a la derecha se ilustra una vista desde arriba.

4. El momento de inercia expresa el grado de 'porfía' de los sólidos a variaciones en su movimiento angular.

**El momento de inercia de un aro:**
Consideremos un aro de masa $M$ y radio $R$. Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de este. Si discretizamos el aro en $N$ segmentos, con $N$ muy grande, entonces $\rho_i = R$, para todo $i$. Con ello

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R^2 = MR^2 \; .$$



# 2. Apéndices

## A. ¿Altera un espectador pasivo la dinámica de un sistema?

El centro de masas de un sistema, sea este cohesionado, disgregado, amorfo o deformable, es un punto. Lo interesante es que cual sea la naturaleza del sistema y de sus fuerzas internas, el movimiento (aceleración, velocidad y trayectoria) de su centro de masas está determinado sólo por la acción de las fuerzas externas.

Un ejemplo curioso que permite ilustrar este punto lo encontramos en un sistema formado por dos masas idénticas, A y B, sin que interactúen entre sí y cada una de masa $m$. Ambas posan sobre una superficie horizontal lisa y el centro de masas se ubica en el punto medio entre ambas. Para fijar ideas, alineamos ambas partículas en un eje horizontal $x$, con $x_A$ y $x_B$ las coordenadas de A y B, respectivamente.

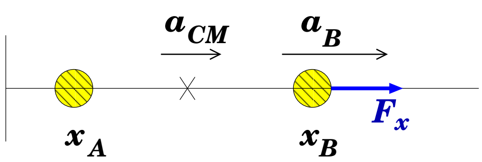
Si una fuerza horizontal $F_x$ actúa solamente sobre $B$, entonces la ecuación para el sistema binario, $\sum F_{ext} = M_{tot} a_{CM}$, implica

$$F_x = (m + m) a_{CM} \qquad \Rightarrow a_{CM} = \frac{1}{2}\frac{F_x}{m} \; .$$

Por otro lado, al considerar sólo la partícula B, su aceleración es simplemente $a_B = F_x/m$. Con ello notamos que

$$a_{CM} = \frac{1}{2} a_B \; ,$$

vale decir, el centro de masas acelera a una tasa igual a la mitad de lo que ocurre con B.




Lo anterior es consistente con el siguiente resultado para la localización del centro de masas:

$$R_x = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

Si $x_A$ no es alterada por la fuerza externa, entonces

$$\dot{R}_x = \frac{1}{2}\dot{x}_B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ddot{R}_x}_{a_{CM}} = \frac{1}{2}\underbrace{\ddot{x}_B}_{a_B}$$

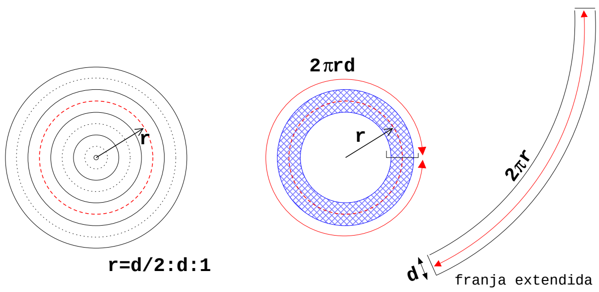
consistente con el resultado de mas arriba.

# B. Area del círculo y volumen de esfera con MATLAB

Ilustramos el uso de MATLAB para el cálculo del área de un círculo y el volumen de una esfera. Si bien los resultados son conocidos, el procedimiento nos permitirá identificar estrategias para abordar problemas más complejos.

Para el cálculo del área del círculo de radio $R$, lo subdividimos en $N$ anillos circulares, cada uno de ancho $d = R/N$. Si $N$ es lo suficientemente grande, el área de un anillo se semiradio $r$ es, en buena aproximación, igual a $2\pi rd$. Esto es ilustrado en la figura de más abajo. La construcción `r=d/2:d:1` define un arreglo de semiradios `d/2; 3d/2; ....`

El uso de esta misma idea en el cálculo del volumen de una esfera se traduce en subdividirla en cascarones de igual espesor. El volumen de una cascara de 'semiradio' $r$ y grosor $d$ será $4\pi r^2 d$. El volumen total será la suma de estas contribuciones.




El programa en MATLAB es el siguiente

```
% PROGRAMA PARA CALCULAR AREA DE UN CIRCULO Y VOLUMEN DE ESFERA
 clear
 float('double')
 R=1;
%------------ Loop de convergencia
 for N=1:100
 ri=0; rf=ri+R;
 dr=(rf-ri)/N;
 r=ri+dr/2:dr:rf;
%------------- AREA=suma 2*Pi*r(i)*dr   VOL=suma 4*Pi*r(i)^2*dr
 area=2*pi*sum(r)*dr;
 vol=4*pi*sum(r.^2)*dr;
 fprintf('Area(%i) = %.7f   Vol(%i) = %.7f\n',N,area,N,vol);
 end
 fprintf('Vol exacto %.7f \n',4*pi/3)
```

## Lectura suplementaria

Se sugieren las siguientes secciones de los textos 'Tipler' y 'Serway' de física básica.

*Fisica. Serway Tomo 1. McGraw Hill*

- Capítulo 9
  9.6 Centro de masas
  9.7 Movimiento de un sistema de partículas
- Capítulo 10 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo
  10.4 Energía cinética de rotación
  10.5 Cálculo de momentos de inercia

==========================================================

*Fisica para la ciencia y la tecnologia. Tipler. Reverte*

- Capítulo 8: Sistemas de partículas y conservación del momento lineal
  8.1 Centro de masas
  8.3 Movimiento del centro de masas
  8.5 Energía cinética de un sistema
- Capitulo 9: Rotación
  9.2 momento de una fuerza, movimiento y 2da ley de Newton
  9.3 Momento de inercia
  9.5 Energía cinética de rotación