Sistemas Newtonianos Pauta Ejercicio 3 Primavera 2008

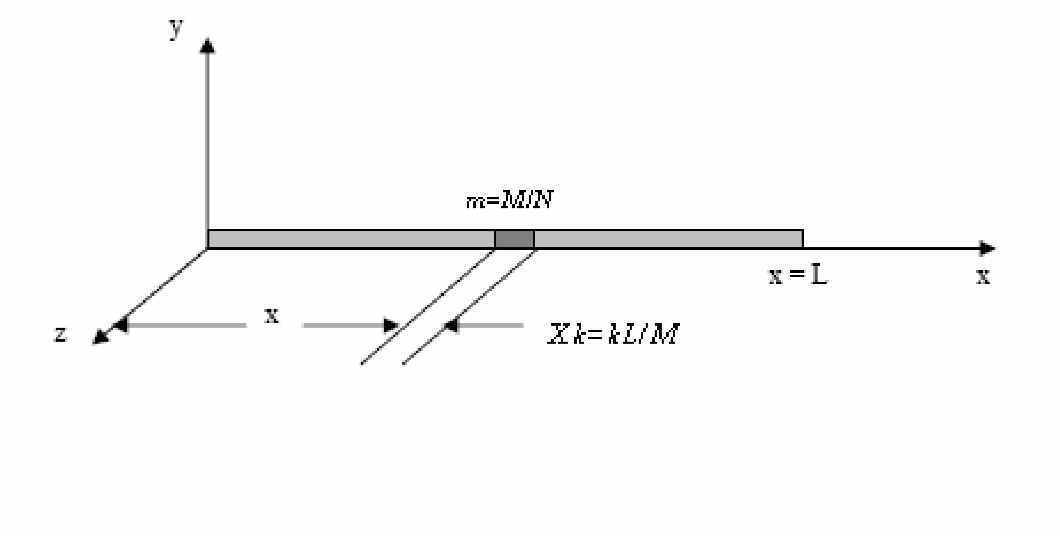
Auxiliar: Daniela Opitz

30 de octubre de 2008

1. Problema: Considere una barra de masa M y largo L que puede girar libremente en torno a su punto de apoyo O que esta en uno de sus extremos. calcule su centro de masa R e inercia rotacional I. Para ello discretice la barra en N trozos de masa N/M y tome el limite cuando N tiende a infinito.

   a) Centro de masa

   Dividimo la barra en N trozos, y los numeramos del 1 a N utilizando como indice k. definimos luego la masa y la cordenada de cada de cada trozo de la siguiente forma:



   Aplicando la definicion de centro de masa

$$X_{cm} = \frac{\sum_{k=1}^{k=N} m_k x_k}{M} \tag{1}$$

   Reemplazando los definicones para m_k y x_k tenemos:

$$X_{cm} = \sum_{k=1}^{k=N} \left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{kL}{N}\right) \tag{2}$$

$$X_{cm} = \frac{L}{N^2}\sum_{k=1}^{k=N} k \tag{3}$$

$$X_{cm} = \frac{L}{N^2} \sum_{k=1}^{k=N} k \tag{4}$$

$$X_{cm} = \frac{L}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right) \tag{5}$$

Tomando el limite cuando N tiende a ∞

$$X_{cm} = \frac{L}{2} \tag{6}$$

b) Momento de inercia

$$I = \sum_{k=1}^{k=N} m_k x_k^2 \tag{7}$$

Reemplzando de la misma forma que antes, nos queda:

$$I = \sum_{k=1}^{k=N} \left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{kL}{N}\right)^2 \tag{8}$$

$$I = \frac{ML^2}{N^3} \sum_{k=1}^{k=N} k^2 \tag{9}$$

$$I = \frac{ML^2}{N^3} \frac{N(N+1)(1+2N)}{6} \tag{10}$$

$$I = \frac{ML^2}{N^2} \frac{(N+1)(1+2N)}{6} \tag{11}$$

$$I = \frac{ML^2}{N^2} \frac{(N^2+3N+1)}{6} \tag{12}$$

Tomando el limite cuando tiende a infinito:

$$I = ML^2 \left(\frac{2N^2}{6N^2} + \frac{3N}{6N^2} + \frac{1}{6N^2}\right) \tag{13}$$

Luego I sera igual a:

$$I = \frac{ML^2}{3} \tag{14}$$