

Torque, centro de masa y momento angular

Introducción a la Mecánica
Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

VI

Índice general

VI.TORQUE, CENTRO DE MASA Y MOMENTO ANGULAR	253
VI.1. TORQUE	253
VI.1.1. Introducción	253
VI.2. DEFINICION DE TORQUE	254
VI.2.1. Definición de producto vectorial	255
VI.2.2. Algebra del producto vectorial (o producto cruz).	258
VI.3. ESTATICA	259
VI.3.1. Ecuaciones de la estática	262
VI.4. VIGAS Y ESTRUCTURAS	268
VI.5. CENTRO DE MASA	276
VI.5.1. Introducción	276
VI.5.2. Localización del centro de masa	278
VI.5.3. Movimiento del centro de masa	285
VI.6. MOMENTO ANGULAR	295
VI.6.1. Definición	295
VI.6.2. Momento de inercia de una barra	299
VI.6.3. Torque y aceleración angular. Rotación con respecto a un eje fijo .	303
VI.7. TEOREMA DE STEINER	316
VI.7.1. Momento de inercia	316
VI.7.2. Momento angular	317
VI.8. ENERGIA CINETICA DE ROTACION	322
VI.9. ROTACION EN TORNO A UN PUNTO	329
VI.10 EJERCICIOS	330

Capítulo VI

TORQUE, CENTRO DE MASA Y MOMENTO ANGULAR

VI.1. TORQUE

VI.1.1. Introducción

Al resolver un problema comenzamos por hacer un diagrama de cuerpo libre de las partes del sistema y a continuación aplicamos la segunda ley de Newton a cada una de ellas. En esta operación, tácitamente estamos considerando cada una de esas partes como una *partícula puntual*: todas las fuerzas se dibujan alrededor de un punto, al sumarlas se obtiene la fuerza resultante y luego, usando la segunda ley de Newton podemos predecir el movimiento resultante.

La geometría de cada una de las partes del cuerpo, ya sea un bloque, una cuña o una polea, interviene sólo para especificar la dirección de la fuerza de acción y reacción entre las distintas partes.

De acuerdo a la receta anterior, si la suma de las fuerzas es nula, no hay aceleración y los cuerpos (puntos) permanecen con velocidad constante o en reposo.

Obviamente las partículas puntuales constituyen una primera aproximación a problemas más reales: los cuerpos no son puntos y pueden, por ejemplo, rotar en torno a sí mismos.

Para estudiar el origen de la rotación de un cuerpo rígido, debemos considerar las fuerzas que intervienen y los puntos donde cada una de ellas actúa. Este par: la fuerza y el vector posición del punto donde se aplica la fuerza, da origen a otro vector que se denomina *torque*.

Para evaluar la rotación de un cuerpo se define el vector *momento angular*. Para una partícula este vector está asociado a su posición \vec{r} , y a su momentum \vec{p} . Para un cuerpo

sólido, se obtiene como la suma del momento angular de cada una de sus partículas que lo componen.

Los valores asociados con el torque y el momento angular, dependen –salvo una excepción: el caso estático– del origen de coordenadas elegido. El momento angular es el equivalente del momentum lineal \vec{p} .

El movimiento más general de un cuerpo rígido está compuesto de una rotación y una traslación. En los párrafos anteriores, introdujimos la rotación. La traslación reduce el cuerpo a un punto –denominado *centro de masa*– y concentra en él, las fuerzas externas. El centro de masa es un punto matemático que, para el efecto de las leyes de Newton, representa al cuerpo real y es el lugar donde se concentran todas las fuerzas externas. Como se ha trabajado hasta ahora es, precisamente, de esa forma: considerando todos los cuerpos como puntos materiales y aplicando sobre estos puntos las leyes de Newton.

En este capítulo *no se introducen nuevas leyes físicas* con el objeto de dar cuenta de la rotación que experimentan los cuerpos. No es necesario. Basta con definir una nueva operación matemática entre vectores y aplicarla a las mismas leyes físicas ya conocidas.

En el caso de la rotación de un cuerpo en torno a un eje fijo, el torque se relaciona con la aceleración angular a través de una ecuación similar a la segunda ley de Newton.

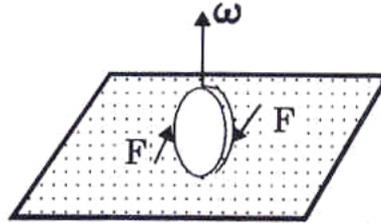
Aquí nos referiremos exclusivamente a las rotaciones en torno a un eje. Sólo dedicaremos un párrafo a la rotación de un cuerpo rígido en torno a un punto. Esta es una materia que requiere más herramientas matemáticas y por lo tanto no se incluyó en este curso.

Para introducir el torque, necesitamos definir una operación entre dos vectores llamada *producto vectorial*. Este es el tema de la siguiente sección.

VI.2. DEFINICION DE TORQUE

Las manillas de una puerta están siempre alejadas de los goznes. Por ejemplo, al cerrar una puerta –por liviana que ésta sea–, si la empujamos de un punto demasiado cercano al eje de giro, el esfuerzo que es necesario desarrollar es notorio.

Otra situación similar es la de una moneda que hacemos girar rápidamente cuando le aplicamos en forma simétrica un par de fuerzas en los bordes. En este caso, si nos hemos preocupado de aplicar dos fuerzas iguales en magnitud y dirección pero de sentidos opuestos sobre el borde de la moneda, ésta rotará en torno a un eje imaginario que atraviesa el cuerpo.



En estas operaciones intervinieron la fuerza aplicada y su brazo de acción: distancia entre el punto de aplicación y el eje de giro, que son los dos parámetros que contiene el concepto de *torque*.

Cuando existe un par de fuerzas que actúan sobre puntos distintos de un sólido rígido (que no sufre deformación), existe lo que se denomina un *torque* y su efecto genera una aceleración angular sobre el cuerpo.

El torque con respecto a un origen arbitrario O, es el producto *vectorial* entre el vector posición que une el punto de referencia O con el punto P y la fuerza \vec{F} :



$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{VI.1})$$

VI.2.1. Definición de producto vectorial

El producto vectorial es una operación matemática que se designa por el símbolo \wedge y que asocia a un par de vectores \vec{a} y \vec{b} , un tercer vector \vec{c} ,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \equiv \vec{c} \quad \text{para todo vector } \vec{a}, \vec{b}.$$

A continuación definimos la dirección, el módulo y el sentido de este nuevo vector generado por \vec{a} y \vec{b} .

• **Dirección:**

$(\vec{a} \wedge \vec{b})$ es un vector perpendicular al plano formado por los vectores \vec{a} y \vec{b} .

• **Magnitud:**

Es el producto de las magnitudes de ambos vectores, multiplicado a su vez, por el seno del ángulo más pequeño que ellos forman:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta. \quad (\text{VI.2})$$

Donde θ : es el ángulo más pequeño que forman \vec{a} y \vec{b} .

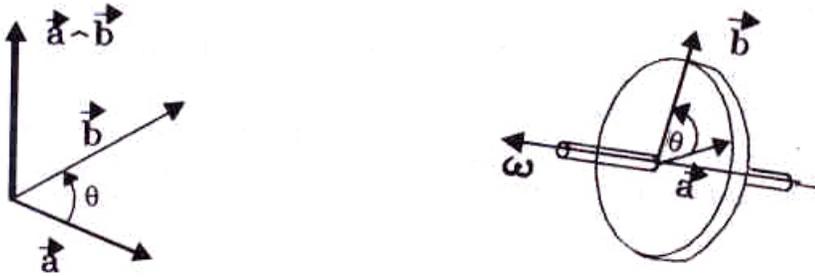


Figura VI.1: Se indica la dirección y sentido del vector que representa el producto vectorial de los vectores \vec{a} y \vec{b} .

• **Sentido** del vector $(\vec{a} \wedge \vec{b})$:

Use la *regla de la mano derecha*, empuñe la mano y estire el dedo pulgar. El ángulo θ es el ángulo más pequeño que va desde \vec{a} hacia \vec{b} , y ésta debe ser la dirección en que apuntan los dedos empuñados. En esta posición, el pulgar indica la dirección y sentido del vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$.



Figura VI.2: Uso de la regla de la mano derecha. Es una convención usada frecuentemente y por lo tanto conviene no olvidar. Entre sus aplicaciones permite asociar un vector a la velocidad angular ω .

Nota

La dirección del ángulo en $\vec{a} \wedge \vec{b}$ se toma siempre partiendo desde el primer vector (\vec{a}) hacia el segundo (\vec{b}). El orden es importante en esta definición.

• Definición de \otimes y \odot .

Siempre trabajaremos con la situación más simple: rotación de un cuerpo en torno a un eje. En este caso nos basta definir un *vector unitario cuya dirección sea normal al plano del papel y cuyo sentido identificamos a continuación:*

\otimes \equiv Entrando en el papel.

\odot \equiv Saliendo del papel.

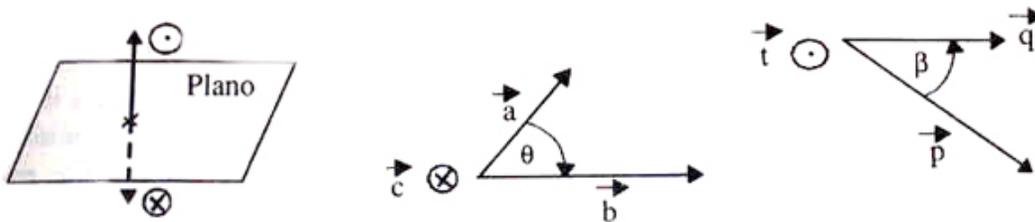


Figura VI.3: Definición de los vectores \otimes y \odot .

Ejemplo

Calcular $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

Los vectores \vec{a} y \vec{b} , se ubican en el plano, entonces:

$$\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{sen } \theta \otimes.$$

Si tomamos otro par de vectores, como \vec{p} y \vec{q} de la Figura, entonces:

$$\vec{t} = |\vec{p}| |\vec{q}| \text{sen } \beta \odot.$$

\otimes, \odot indican los dos sentidos posibles en la dirección perpendicular al plano del papel. Es la única información que necesitaremos en este caso.

La notación anterior representa una flecha que, si apunta hacia el papel toma la forma de la cola de una flecha, \otimes . Por otra parte, el vector saliendo del papel hacia nosotros se designa como \odot , y representa la punta de la flecha.

Note que:

$$\otimes = -\odot. \tag{VI.3}$$

VI.2.2. Álgebra del producto vectorial (o producto cruz).

Asociatividad.

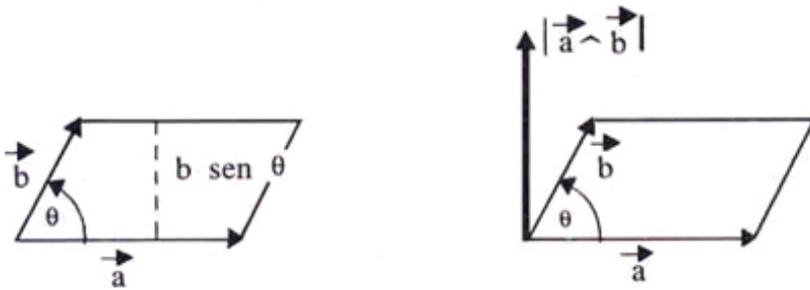
Dados tres vectores, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , entonces se cumple que:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}. \tag{VI.4}$$

El álgebra **anticonmuta**. En otras palabras: el orden de los términos en el producto es importante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}. \tag{VI.5}$$

Una superficie plana se puede asociar con un vector generado precisamente a través del producto vectorial. Imaginemos un romboide pequeño del tamaño de una moneda, esta superficie puede ser representada por un vector perpendicular a ella. Con esta definición ya conocemos la dirección del vector, su sentido es arbitrario y lo definimos al final de esta sección. La magnitud de este vector está determinada por el valor del área de la superficie. Este valor está dado por la magnitud del producto vectorial de los dos vectores que limitan el romboide (como es el caso de la Figura).



Es decir, el área del romboide de la Figura es:

$$\text{Area} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{sen } \theta.$$

El área de un elemento de superficie puede ser representado por un vector, cuya dirección indica la orientación de la superficie en el espacio y su magnitud nos da el valor del área:

$$\vec{\text{Area}} \equiv \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

De la regla de la mano derecha se desprende que, al elegir el orden de los vectores \vec{a} y \vec{b} , estamos definiendo automáticamente el sentido del vector que representa la superficie.

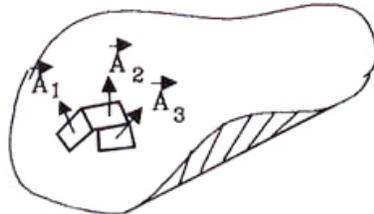


Figura VI.4: En cada una de las superficies se ha dibujado un romboide elemental. El vector que lo identifica lo hace dando solamente el punto P de la superficie y el vector perpendicular que lo representa.

En el caso de una superficie curva como la de una esfera o un elipsoide, siempre se puede descomponer en elementos de área muy pequeños (infinitesimales) de forma que la superficie queda armada mediante un conjunto de escamas (o tejas) y cada una de ellas se puede representar de la forma definida anteriormente.

VI.3. ESTÁTICA

Esta es la primera aplicación del concepto de torque que estudiaremos. La estática se concentra en el estudio de cuerpos (objetos con dimensiones finitas), que permanecen

en equilibrio bajo la acción de fuerzas externas aplicadas en distintos puntos. Por equilibrio entendemos cuerpos que no rotan ni se trasladan. Estos incluyen principalmente estructuras fijas como puentes, edificios, grúas...etc.

Comenzamos definiendo lo que entendemos por traslación y rotación.

Traslación y Rotación

Traslación: Existe traslación pura si todos y cada uno de los puntos de un cuerpo rígido experimentan el *mismo* desplazamiento.

Si el desplazamiento de cada uno de los puntos del cuerpo –que permanece sin deformarse– es diferente, el movimiento se puede considerar como una superposición de una *Rotación* y una *Traslación*.

Si el *Torque*, $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre un objeto con respecto a un punto dado, es nulo, el cuerpo no rota o permanece rotando con velocidad angular constante si lo estaba inicialmente.

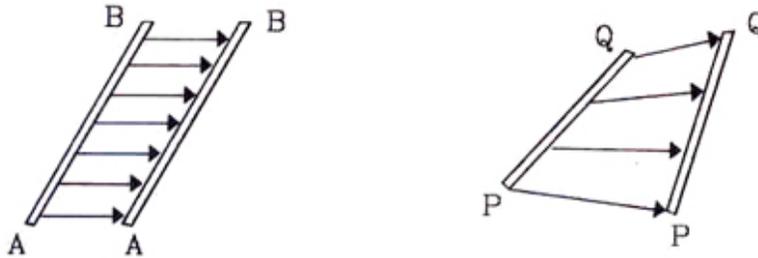


Figura VI.5: La barra AB experimenta sólo una traslación: cada uno de sus puntos se desplaza la misma cantidad. La barra PQ experimenta una traslación y una rotación simultáneamente.

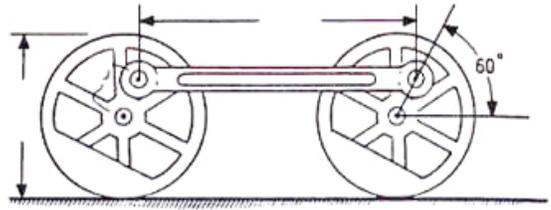
Con esta definición iniciamos el estudio del movimiento de los cuerpos rígidos, teniendo en consideración sus dimensiones espaciales. Si el cuerpo se reduce a un punto, ni el torque ni la rotación están definidos, y por lo tanto no existen.

El Torque está asociado a la aceleración angular de un cuerpo. En un punto material, no tiene sentido hablar de rotación ni torque. Si un cuerpo extendido tiene aplicadas varias fuerzas y no experimenta rotación alguna, entonces el torque neto de estas fuerzas es nulo.

Ejemplo

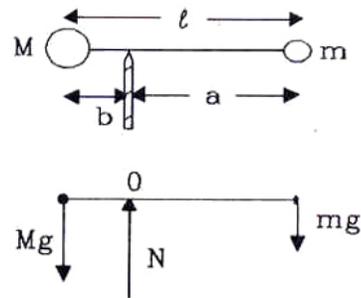
La barra de la Figura está unida rígidamente a las dos ruedas. La distancia entre ejes de estas ruedas permanece constante. Se pregunta si la barra realiza un movimiento de rotación neto o un movimiento de traslación.

La barra que une ambas ruedas, experimenta una traslación pura, de acuerdo a nuestra definición, puesto que cada uno de sus puntos sufre el mismo desplazamiento. \square

**Ejemplo**

Estudiemos el *equilibrio* de dos masas M y m unidas por una barra muy liviana (sin masa) de largo ℓ y pivoteada en algún punto entre ellas de forma que el sistema permanezca en equilibrio.

Encontrar el valor de a y b , de forma que las partículas permanezcan en equilibrio. (Suponga que las dos masas M y m , se comportan como masas puntuales concentradas en el centro de la esfera).



Por equilibrio entendemos que no existe movimiento: ni traslación, ni rotación, por lo tanto, en la dirección vertical, se cumple que:

$$\vec{a} = 0 \implies \sum \vec{F} = 0, \quad (\text{VI.6})$$

$$N = (M + m)g. \quad (\text{VI.7})$$

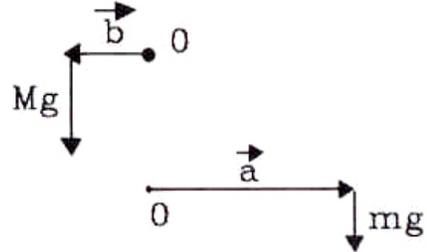
Sabemos que si ubicamos el punto de apoyo en un lugar arbitrario de la barra, volcará hacia uno de los lados. Volcar significa adquirir una velocidad angular. Para que esto no suceda el torque también debe ser cero. Elegimos como origen de coordenadas el punto de apoyo y con respecto a él, calculamos el torque generado por las masas M y m .

$$\vec{\tau}_M = \vec{b} \wedge M\vec{g} = b M g \odot$$

$$\vec{\tau}_m = \vec{a} \wedge m\vec{g} = a m g \otimes$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \implies$$

$$0 = \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_m = [b M g - a m g] \odot$$



Como la suma de los torques debe ser nula, para que no exista rotación, entonces:

$$b M = a m, \quad (1)$$

pero el largo de la barra es:

$$a + b = \ell. \quad (2)$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas y por lo tanto podemos resolver el problema. Su resultado es:

$$b = \frac{m}{M + m} \cdot \ell, \quad (VI.8)$$

$$a = \frac{M}{M + m} \cdot \ell. \quad (VI.9)$$

De esta forma, si ubicamos el pivote a una distancia a de la masa más pequeña, la barra permanecerá en equilibrio.

VI.3.1. Ecuaciones de la estática

Un cuerpo permanece en reposo (sin traslación ni rotación), si la suma del total de las fuerzas y torques que actúan sobre él, se anulan.

En estática, el torque puede ser evaluado con respecto a un origen arbitrario de coordenadas y no cambia su valor.

En dos dimensiones, la estática proporciona tres ecuaciones: dos de ellas provienen de las ecuaciones de Newton y la otra de la anulación del torque.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (\text{VI.10})$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad (\text{VI.11})$$

Torque con respecto a un punto arbitrario.

A continuación demostramos que en Estática el valor obtenido para el torque es *independiente* del punto que se tome como origen de coordenadas.

En la Figura aparece un conjunto de fuerzas arbitrarias $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, que actúan sobre una figura con forma de riñón que representa al cuerpo rígido. Existen dos puntos: O y P , con respecto a los cuales tomaremos torque. Los vectores que unen el punto de referencia con las respectivas fuerzas, se designan con prima si provienen del punto P , por ejemplo, \vec{r}_i' . Los vectores sin prima, \vec{r}_i , están definidos teniendo al punto O como su origen.

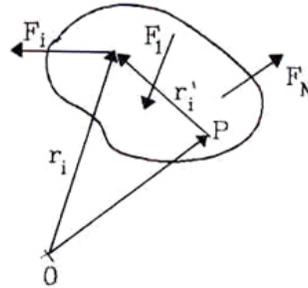
Al calcular el torque total de las fuerzas con respecto al punto O , comprobaremos que toma el mismo valor que al repetir la operación pero ahora con respecto al punto P .

Como ambos puntos: O y P , son arbitrarios, concluiremos que el valor del torque en *estática*, es independiente del punto que se tome como referencia.

A continuación realizamos los cálculos explícitamente.

Como el cuerpo está en equilibrio, el torque total $\sum \vec{\tau}$, evaluado con respecto al punto O es:

$$\sum \vec{\tau} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = 0,$$



usando la igualdad $\vec{r}_i = \vec{OP} + \vec{r}_i'$, obtenemos:

$$\sum \vec{\tau} = \sum_{i=1}^N (\vec{OP} + \vec{r}_i') \wedge \vec{F}_i,$$

como el producto vectorial es asociativo, tenemos:

$$= \sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$$

pero:
$$\sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i = \vec{OP} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OP} \wedge \vec{F}_n,$$

entonces:
$$\sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i = \vec{OP} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right),$$

reemplazando este resultado en la ecuación original:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{OP} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i,$$

como la **estática** se caracteriza por:
$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0,$$

$$= \vec{OP} \wedge \vec{0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$$

$$\sum \vec{\tau}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_P \quad (\text{VI.12})$$

Concluimos que en *estática*, podemos tomar torque con respecto al punto que más nos convenga: aquel que produzca la expresión más simple o que entregue mayor información acerca de la magnitud de la fuerza que buscamos. El valor del torque, como se demostró, no depende del origen escogido.

Ejemplo

¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de roce estático μ para que la escalera de la Figura no resbale sobre el piso?

Conocemos el largo de la escalera L , sabemos que el pintor se ubica a una distancia s del suelo y que tiene una masa M . Despreciamos la masa de la escalera comparada con la masa del pintor. El ángulo que forma la escalera con el piso es 60° .

Consideramos la pared como una superficie sin roce. El roce en el piso es el único relevante para el equilibrio de la escalera.

Recordemos que:

$$\text{sen } 30^\circ = 1/2, \quad \text{cos } 30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$\text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2, \quad \text{sen}(90^\circ + 60^\circ) = \text{cos } 60^\circ = 1/2.$$

Si no hay roce en el piso, se puede demostrar (**Ejercicio**) que no hay posibilidad de alcanzar equilibrio. Nadie, en su sano juicio, pone una escalera en un piso recién encerado.

Con el objeto de simplificar los cálculos, se desestima el roce generado entre la escalera y la muralla.

A partir del diagrama de cuerpo libre que se incluye y usando las ecuaciones [VI.10] y [VI.11], obtenemos:

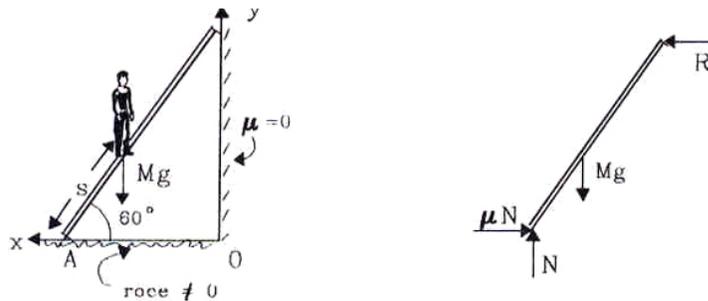


Figura VI.6: Escalera apoyada en una muralla sin roce. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la escalera.

$$\sum F_x = 0 \implies -\mu N + R = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \implies N - F_G = 0 \quad (F_G \equiv Mg) \quad (2)$$

El torque con respecto al punto A es:

$$\vec{r}_G \wedge \vec{F}_G = s M g \operatorname{sen}(90 + 60) \otimes$$

$$\vec{r}_G \wedge \vec{F}_G = s M g \cos 60^\circ \otimes$$

$$\vec{r}_R \wedge \vec{R} = L R \operatorname{sen} 120^\circ \odot = L R \cos 30^\circ \odot$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 = s M g \cos 60^\circ \otimes + L R \cos 30^\circ \odot$$

De esta última ecuación, y recordando que: $\otimes = -\odot$, obtenemos el valor de la reacción R:

$$s M g = L R \sqrt{3} \implies R = \frac{s M g}{L \sqrt{3}}. \quad (3)$$

Introduciendo este valor en la ecuación (1) obtenemos:

$$\mu N = R = \frac{s M g}{L \sqrt{3}},$$

y finalmente usando la ecuación (2): $N = F_G = M g$, encontramos el valor mínimo de μ :

$$\mu = \frac{s}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cualquier valor mayor para μ , es también una solución posible.

Comprobemos que este resultado contiene los casos extremos en los cuales se puede intuir, a través de la experiencia, la respuesta correcta. Por ejemplo, si $s = 0 \implies$ no necesita roce, puesto que el pintor se ubica justo en el piso.

Si $s = L \implies \mu = 1/\sqrt{3}$, el valor del roce debe ser máximo, como es natural si el pintor se ubica en el último peldaño de la escalera.

Es interesante notar que el roce necesario para mantener en equilibrio la escalera *no* depende de la masa del pintor. Si la escalera no resbala con un niño encima, tampoco lo hará con una persona de mayor masa. Lo que cambia son los valores de las reacciones sobre la pared y el piso. ¿Cómo cambian estas últimas afirmaciones si no despreciamos el roce entre la escala y la pared?

Ejercicio

Repita el Ejemplo anterior suponiendo que la escalera forma un ángulo α con el piso. Encuentre el valor de μ en este caso, y examine los límites para diversos valores del ángulo α .

Respuesta: $\mu = [s/L] \tan \alpha$. \square

Ejemplo

Un trozo de madera de base cuadrada, lado $2a$ y peso W , descansa sobre un piso cuyo coeficiente de roce estático es μ_e . A una altura h de la base se aplica una fuerza horizontal \vec{P} .

Encontrar la condición que debe cumplir el coeficiente de roce estático μ_e , para que el trozo de madera vuelque, sin deslizar, bajo el efecto de la fuerza \vec{P} .

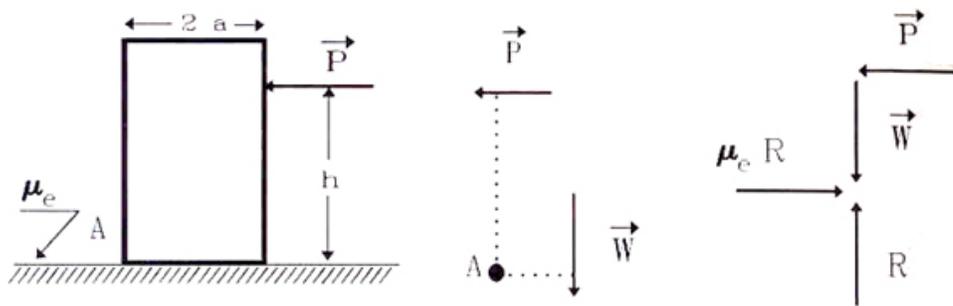


Figura VI.7: Tomando como origen el vértice A del bloque, aparecen dos torques: uno generado por la fuerza P y el otro debido al peso W del cuerpo. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

Tomando torque con respecto al vértice A , y suponiendo (correctamente) que el peso actúa justo en el centro del rectángulo que caracteriza a este objeto, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum (\tau_P + \tau_W) &= P h - W a = 0, \quad \text{para que el bloque esté a punto de volcar,} \\ \sum F_{\text{horizontales}} &= 0 \implies P \leq \mu_e W, \quad \text{cota para el valor máximo de } \vec{P}. \end{aligned}$$

Despejando P de ambas ecuaciones obtenemos: $a/h < \mu_e$. Esta es la condición necesaria para volcar el bloque. Al contrario, si $\mu_e < a/h$, el cuerpo comienza a deslizar sin volcarse, porque el torque es nulo y la fuerza \vec{P} es mayor que la fuerza de roce que se le opone.

Podemos analizar este resultado: supongamos que a es muy pequeño, en este caso es muy difícil impedir que el bloque no vuelque, puesto que deslizará sólo si $\mu_e < a/h \approx 0$.

Supongamos que se desea trasladar un armario –una caja vertical cuyo alto es mayor que su ancho y mucho mayor que su fondo– de un punto a otro dentro de una pieza. Una forma de hacerlo es empujar desde un punto muy bajo del armario para evitar que se tumbe. Esta estrategia corresponde a poner h muy pequeño en nuestra solución. En este caso siempre ocurrirá que $\mu_e < a/h$ y el cuerpo –un armario, en este caso– deslizará sin volcarse.

Para finalizar, destaquemos que al tomar el punto A de la Figura como referencia para calcular el torque simplificamos la solución de este problema. La estrategia seguida fue la siguiente: se pensó primero que el cuerpo estaba a punto de comenzar a levantarse para terminar posteriormente volcando –puesto que éste es el caso crítico que nos interesaba– en ese instante, la fuerza de reacción del piso sobre el bloque se *aplicaba justo sobre el vértice A, el único punto de contacto con el piso*, de modo que esta reacción no generó torque alguno, al igual que la fuerza de fricción y, de esta manera, simplificamos la resolución del ejemplo propuesto. □

VI.4. VIGAS Y ESTRUCTURAS

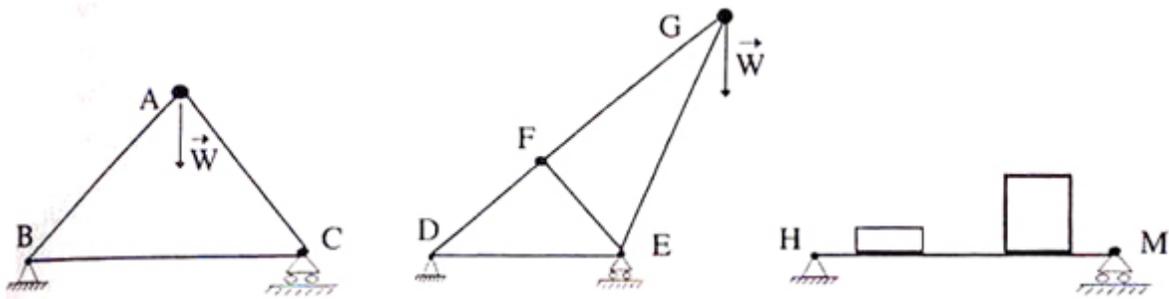


Figura VI.8: Se incluyen varios tipos de estructuras simples, isostáticas, que pueden ser resueltas –bajo las suposiciones que indicamos en el texto–, con las ecuaciones de estática.

Las estructuras de la Figura [VI.8] se denominan *isostáticas*, porque se pueden resolver usando sólo las ecuaciones de la estática. Se caracterizan porque en cada unión (por ejemplo, A, B,...H, en la Figura [VI.8]) *sólo se transmiten fuerzas y no torques*. En estos casos tampoco consideramos las deformaciones de las estructuras.

En el mundo real, las uniones transmiten fuerzas, torques y producen deformaciones; pero la inclusión de todas estas características corresponde más bien a un curso de resistencia de materiales, que a uno de introducción a la física.

Bajo estas consideraciones, el modelo de un puente corresponde a la estructura de la Figura [VI.11]. Los apoyos de un puente son diferentes en cada extremo y ambos se describen a continuación.

Una forma de apoyo (izquierda de la Figura [VI.11]) consiste en fijar una rótula al piso. Este extremo está soldado al piso. En el diagrama de cuerpo libre [VI.10] separamos el piso (o fundación) de la estructura y debemos reemplazarla por dos fuerzas perpendiculares entre sí. Una de las fuerzas impide que la estructura se deslice y la otra impide que se hunda en el piso. Como esta rótula es ideal *no transmite torque*.

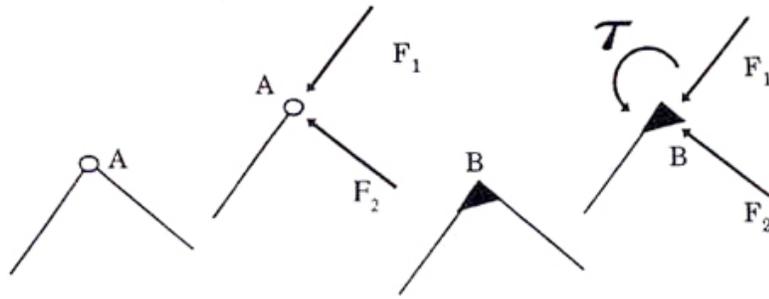


Figura VI.9: Los efectos de una unión ideal (izquierda) y otra más cercana a la realidad (derecha) son comparados en la Figura. En la unión ideal sólo se transmiten fuerzas. En la versión más realista de la derecha se incluye el torque que genera la unión.

Otra posibilidad es permitir la dilatación de la estructura – su cambio de longitud– para ello se reemplaza la rótula por un par de rodillos sobre los cuales se apoya la viga [VI.10]. De esta forma se permite el deslizamiento en dicho extremo.

En este tipo de soporte sólo se ejerce una fuerza perpendicular al piso. Aquí se desestima la fuerza de *roce* que se genera entre las dos superficies al compararla con la fuerza normal.

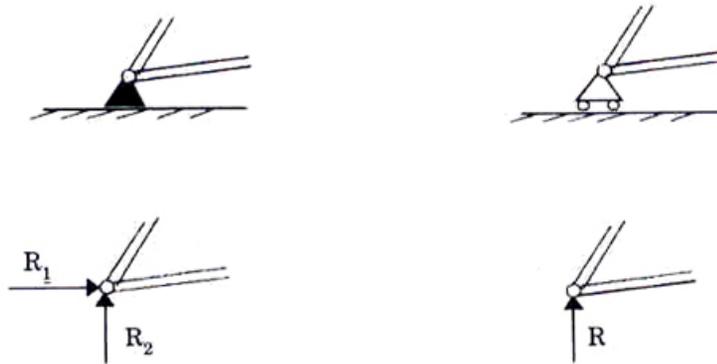


Figura VI.10: Dos tipos de soporte de estructuras: uno fijo al piso y el otro con rodillos que permiten el deslizamiento. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de cada uno de ellos.

Los puentes férreos usualmente tienen este tipo de soporte en un extremo.

Estas dos uniones son las más recurrentes en este tipo de ejemplos. Ambas aparecen siempre de a pares en estructuras de mucha longitud, puesto que al dejar libre un extremo, permite la expansión o contracción de los materiales debido a los cambios de

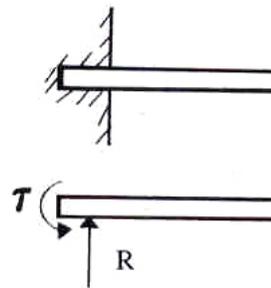


Figura VI.11: Modelo de la viga soportada en sus extremos por una unión fija y otra deslizante. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

temperatura, evitando las deformaciones en la estructura. Además, como se señaló anteriormente, al incluir dos pivotes fijos en cada extremo, las ecuaciones de la estática [VI.10] y [VI.11], no proporcionan suficientes ecuaciones para resolver todas las incógnitas que aparecen, el problema deja de ser isostático y para resolverlo debemos analizar las deformaciones del cuerpo para obtener de allí las ecuaciones que faltan.

Otra forma de fijar un extremo de una estructura, es mediante un empotramiento. En este caso se fija sólo uno de los extremos de la viga. Esta configuración se denomina viga empotrada.

En el diagrama de cuerpo libre correspondiente a este caso, se debe reemplazar la muralla por un torque y una fuerza vertical que se aplican sobre la viga.



Resolvamos el siguiente ejemplo haciendo uso de las leyes de Newton y de las propiedades de las uniones respectivas en los extremos. Es notable que en esta primera aproximación al estudio de estructuras, no necesitamos mayores herramientas para obtener información relevante acerca de su comportamiento.

Ejemplo

Un modelo más primitivo de la estructura de un puente se reproduce en la Figura que se acompaña. Sobre el punto medio de la viga, cuyo peso es despreciable, actúa una fuerza externa W .

Calcular las reacciones en los extremos de la viga, los esfuerzos de corte y el torque que soporta la viga en cada uno de sus puntos.

Como la estructura es rígida entonces, por simetría $R_1 = R_2 = W/2$. Podemos obtener este resultado si, por ejemplo, calculamos el torque tomando el punto medio de

la barra como origen. Recordemos que –en el caso estático– el resultado es independiente del origen de referencia.

Calculemos ahora el esfuerzo de corte en cada punto de la barra y procedamos a graficarlo.

Para ilustrar qué es el esfuerzo de corte, supongamos que efectivamente cortamos la viga en un punto intermedio manteniendo el valor de las reacciones en los extremos de la viga. Obviamente, si no aplicamos una fuerza y un torque en el extremo en que se hizo el corte, la estructura comienza a rotar y desplazarse. Precisamente, la fuerza que debemos aplicar para mantener estática la estructura al cortarla, es lo que se denomina *esfuerzo de corte* y su cálculo se realiza del modo señalado: cortando un extremo de la viga y reemplazándola por una fuerza y un torque.

Calculemos primero el esfuerzo de corte y designémoslo como $s(x)$.

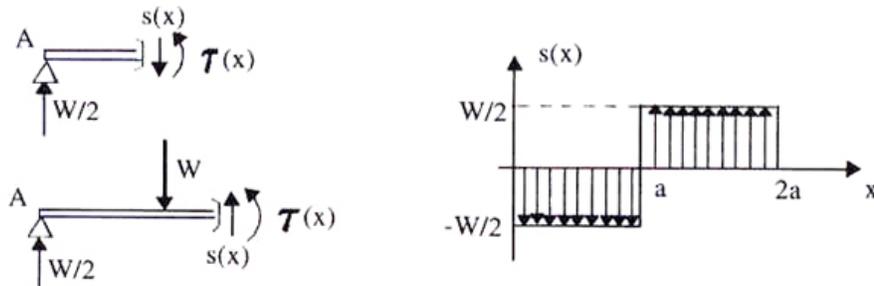


Figura VI.12: Se incluye el diagrama de cuerpo libre al cortar la viga a la izquierda y a la derecha del punto de aplicación de la fuerza W . También aparece un gráfico del esfuerzo de corte a lo largo de la viga.

El diagrama de esfuerzo de corte indica el esfuerzo que soporta la barra en cada uno de sus puntos para resistir el peso W aplicado. Hay una discontinuidad en $x = a$ debido a la existencia de la fuerza externa aplicada W .

Para $x < a$, al hacer la suma de las fuerzas a la izquierda de W , tenemos:

$$s = -\frac{W}{2} \quad \text{independiente de } x.$$

A la derecha de W , el diagrama de cuerpo libre me indica ($x > a$),

$$s = +\frac{W}{2} \quad \text{independiente de } x.$$

Con estos resultados podemos graficar el esfuerzo de corte. Si cortamos la viga en cualquier punto a la izquierda de W , debemos aplicar la fuerza $s = -W/2$ para sostener

el sistema y una fuerza $s = +W/2$ si cortamos la viga a la derecha de W . Estos son los valores que se grafican.

Calculemos el torque que debemos aplicar en cada punto de la viga para evitar que ésta gire. Usemos la notación introducida para designar un vector saliendo (\odot), o entrando en el plano del papel (\otimes).

Calculamos el torque producido por las fuerzas ubicadas a la izquierda del punto x y este resultado nos indica el valor del torque $\tau = \tau(x)$ que debemos aplicar en ese punto: x para evitar la rotación.

$x < a$	$x > a$
$\frac{W}{2} \cdot x \otimes + \tau(x) \odot = 0$	$\left(\frac{W}{2} \cdot x\right) \otimes + (W \cdot (x - a)) \odot + \tau \odot = 0$
$\left(-\frac{W}{2} \cdot x + \tau(x)\right) \odot = 0$	$[-(W a) + \frac{W}{2} \cdot x + \tau(x)] \odot = 0$
$\tau(x) = \frac{W}{2} \cdot x.$	$\tau(x) = W \left(a - \frac{x}{2}\right).$

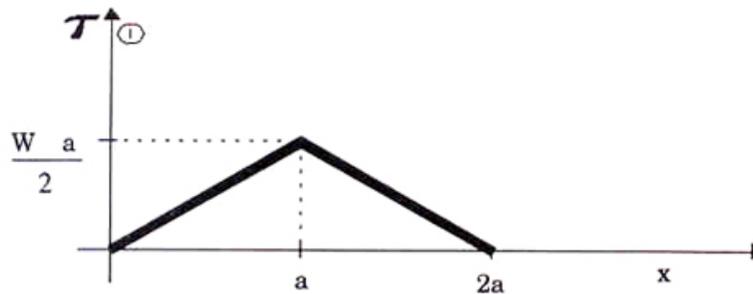


Figura VI.13: Gráfico del torque que actúa en cada punto de la viga. $\tau(x)$ indica el torque que debemos aplicar en el punto x para cancelar el proveniente del resto de las fuerzas. Hemos adoptado \odot como sentido positivo.

¿Con qué objeto calculamos el torque en función de la posición?

Se desea conocer la deformación que sufre la barra debido a las cargas aplicadas.

Es posible demostrar (Ley de Euler-Bernulli) que el valor del torque en cada punto es inversamente proporcional a ρ , el radio de curvatura de la forma que adopta la viga al deformarse:

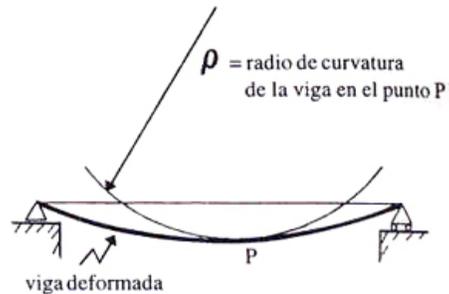
$$\tau(x) = \frac{k}{\rho},$$

La constante k es el producto de dos parámetros: $k = EI$, donde $E \equiv$ Módulo de Young e $I \equiv$ Momento de Inercia. E es un número que caracteriza la rigidez de un material, mientras más rígido, menos se curva bajo la misma carga externa.

El valor de I da una idea de la distribución de la masa de una sección transversal de la viga con respecto a una línea de simetría de la misma viga.

Su definición se incluye más adelante en este capítulo.

Una forma de entender el significado geométrico del radio de curvatura es la siguiente (ver Figura): tomar tres puntos muy cercanos de la viga deformada y trazar una circunferencia que pase a través de ellos. El radio de esta circunferencia, es el radio de curvatura ρ de la viga en dicho punto.



Si queremos el mínimo de deformación para una viga dada, entonces, el radio de curvatura debe ser lo más grande posible: $\rho \rightarrow \infty$, de esta forma la curva se aproxima a una línea recta.

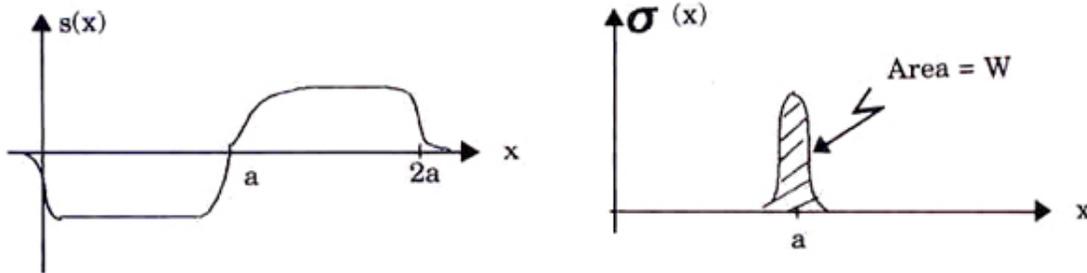


Figura VI.14: Una fuerza actuando en un punto de la viga es fácil de estudiar, pero es más realista suponer que la fuerza se distribuye en un pequeño sector de la viga. Aquí se esboza el diagrama de esfuerzo de corte para este caso.

Nota

Como en este problema nos acercamos un poco a la ingeniería, podemos comentar acerca del significado físico de tener una fuerza actuando sobre un punto de la viga. Esta situación es una aproximación razonable. Más cercano a la realidad –aunque más complicado en su expresión matemática–, es identificar la fuerza W con una distribución de *fuerzas por unidad de superficie*, en una vecindad del punto donde nosotros instalamos la fuerza externa W . Esta fuerza por unidad de superficie se denomina *presión*.

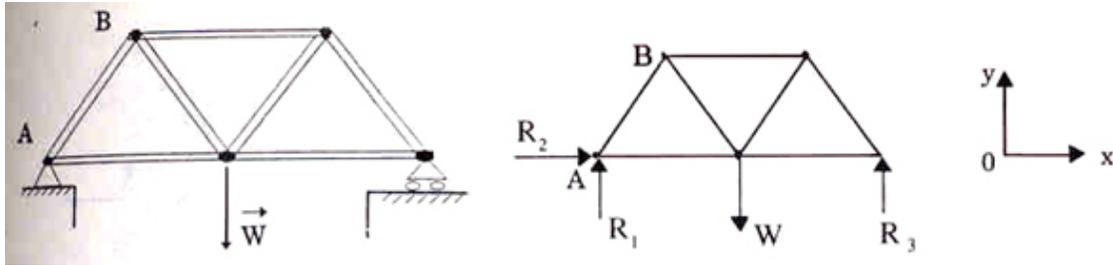


Figura VI.15: A la izquierda aparece un modelo simple de la estructura de un puente soportando una carga estática W . Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

En el caso de una viga, que la consideramos como un cuerpo sin dimensiones salvo longitud, la fuerza se distribuye por unidad de largo, $\sigma(x)$. Esta fuerza por unidad de largo se conecta a la fuerza W que nosotros usamos, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \sigma(x_i) \Delta x_i = W.$$

En el gráfico F_{total} versus x , se reproduce el esfuerzo de corte en su versión de fuerzas por unidad de largo distribuidas en una vecindad de W . Este resultado se puede comparar con el gráfico obtenido en el primer punto del ejercicio: $s(x)$ versus x .

Ejemplo

En la Figura [VI.15] aparece un modelo simple de un puente. W , representa una carga estática que descansa sobre esta estructura. Todas las barras son de largo a y tienen las mismas propiedades físicas.

- a) Calcular las reacciones en cada uno de los soportes de los extremos del puente, generados por la fuerza W .
- b) Calcular la tensión en la barra AB de la estructura.

a) Para calcular las reacciones en los apoyos usamos el único método que conocemos: las leyes de Newton y el diagrama de cuerpo libre.

Consideramos el puente como un todo rígido. Las leyes de Newton no tienen cómo distinguir entre el puente con sus barras y un cuerpo rígido, puesto que no se incluyen las deformaciones. Las barras sólo identifican dónde y en qué dirección actúan las fuerzas. Las ecuaciones de la estática permiten obtener los siguientes resultados:

$$1) \sum F_x = 0 \quad \implies R_2 = 0,$$

$$2) \sum F_y = 0 \quad \implies R_1 + R_3 = W.$$

Calculamos el torque tomando como origen el punto A:

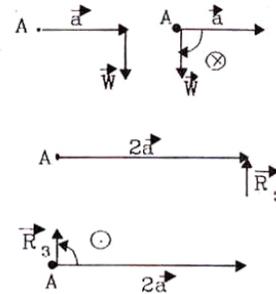
$$\vec{\tau}_W = aW \quad \otimes$$

$$\vec{\tau}_{R_3} = 2aR_3 \quad \odot$$

$$3) \sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow -aW + 2aR_3 = 0$$

Haciendo uso de las tres ecuaciones obtenemos los valores de las reacciones:

$$R_3 = \frac{W}{2}, \quad R_1 = \frac{W}{2}$$

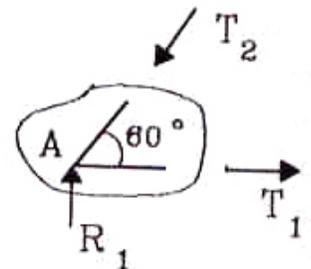


b) A continuación calculamos la tensión sobre la barra AB. El mismo método usado aquí puede aplicarse a cualquiera de las otras barras.

Como cada sección del puente debe estar en equilibrio para que el puente como un todo lo esté, entonces en cualquier sección arbitraria del puente se deben satisfacer las leyes de la estática. En particular en la sección que se indica en la Figura a continuación, debe cumplirse que:

$$\sum F_x = 0, \quad -T_2 \cos 60^\circ + T_1 = 0,$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_1 - T_2 \sin 60^\circ = 0.$$



Estas son todas las ecuaciones, puesto que al tomar torque con respecto al punto A, obtenemos $0 = 0$.

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, T_1 y T_2 , por lo tanto el problema está resuelto.

$$T_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}}, \quad T_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}/2} = \frac{W}{\sqrt{3}},$$

donde T_1 y T_2 son las tensiones a las que están sometidas las barras.



Figura VI.16: La forma como cae un automóvil en un abismo depende de la aceleración que le imprima el conductor en los segundos previos a la caída: si no acelera cae rotando (Figura izquierda), si acelera no rota (Figura derecha).

VI.5. CENTRO DE MASA

VI.5.1. Introducción

Como ya hemos destacado, las leyes de Newton tratan todos los cuerpos, independientemente de su tamaño y forma, como objetos puntuales. Todas las fuerzas se concentran en un punto y es su movimiento el que estudiamos con dichas ecuaciones.

En esta sección, analizaremos en detalle el movimiento de un cuerpo rígido plano. Podemos adelantar nuestra conclusión: al aplicar las leyes de Newton a un cuerpo rígido extendido, existe un punto que lo representa y en el cual podemos aplicar todas las fuerzas que actúan sobre él. Este punto se denomina *centro de masa* y es puramente un lugar *geométrico*: no necesariamente coincide con un punto material del cuerpo.

En lo que sigue demostraremos que el método empleado hasta ahora para resolver un problema mediante las leyes de Newton, se refiere exclusivamente al estudio del movimiento de un punto particular: el centro de masa. El formalismo anterior es insuficiente para predecir el movimiento de un cuerpo con respecto a su centro de masa.

Para poder estudiar este movimiento debemos recurrir al torque.

Al introducir el torque, automáticamente se incorporan las dimensiones de los cuerpos estudiados. La experiencia indica que al aplicar *un par de fuerzas*, es decir, dos fuerzas de igual magnitud pero actuando en puntos diferentes y con sentidos opuestos, el objeto no se desplaza sino comienza a rotar en torno de sí mismo. El centro de masa de este cuerpo debe permanecer en reposo, de acuerdo a las leyes de Newton definidas en la sección anterior.

El caso de un automóvil que llega al borde de un abismo y posteriormente cae, es un ejemplo de la diferencia entre el movimiento del centro de masa (pura traslación) y el movimiento de un cuerpo rígido (traslación y rotación simultánea). De hecho, la

respuesta del conductor en ese instante hace la diferencia en la forma de caer.

Si el automóvil se representa mediante un punto, éste describirá una parábola en su caída al mar, como las que hemos estudiado con anterioridad. Esta es la trayectoria del centro de masa.

A la izquierda de la Figura [VI.16], ilustramos lo que sucede una vez que el punto donde se supone se aplica el peso del automóvil, se asoma al precipicio, su peso genera un torque que comienza a girar el automóvil a medida que cae. Esta rotación, una vez adquirida, se conserva y el vehículo se precipita girando en torno a sí mismo.

A la derecha de la misma Figura, se proyecta un caso similar al anterior, con sólo una diferencia: el piloto del automóvil al percatarse de su situación, no se deja llevar por el pánico sino que acelera el auto al máximo. (Es probable que hayamos presenciado un auto partiendo con el máximo de aceleración y observado que levanta su parte delantera).

Como resultado de esta aceleración del automóvil, se genera un torque que tiende a levantar el frente del automóvil. Si este torque equilibra aquel generado por su peso al asomarse al abismo, el automóvil permanece horizontal (la suma de torques externos es nula), no adquiere rotación y el automóvil cae sin rotar.

En estos dos casos apreciamos que la incorporación del torque en el análisis de este ejemplo, añade información acerca de las características de la caída de un cuerpo con dimensiones finitas. Estas propiedades permanecen ocultas cuando representamos un automóvil mediante un punto material.

(Note que el comportamiento descrito es válido sólo si el automóvil tiene tracción trasera. Explique porqué.)

Otro ejemplo interesante ocurre en una rama del atletismo: en salto alto, es posible mostrar que la técnica que emplean los profesionales de esta especialidad se orienta a lograr que su *centro de masa pase por debajo* de la vara y, por supuesto, que el resto del cuerpo la sobrepase y no la toque. Este ejemplo ilustra la idea que el centro de masa es un lugar geométrico y no un punto material del objeto analizado.

En la siguiente sección demostraremos que el centro de masa (CM) de un cuerpo homogéneo coincide con el punto de simetría de este objeto.

Por ejemplo, en el caso de una pelota de fútbol, el centro de masa se ubica en el origen de la esfera. Si al golpearla se le aplica una fuerza en una dirección que *no* pasa por el (CM), la pelota se desplaza (porque hay una fuerza neta aplicada durante un cierto intervalo de tiempo) pero también *rota* en torno al CM debido a que la fuerza externa genera un torque con respecto al CM.

Si la pelota sale disparada con mucha rapidez y rotando con respecto a su centro, el roce con el aire genera una diferencia de presión en caras opuestas de la pelota. Esta diferencia de presión equivale a una fuerza actuando en la dirección perpendicular al plano de movimiento de la pelota, que la desvía de la parábola plana, que era su trayectoria esperada. Esto es lo que los jugadores llaman *darle con efecto*.

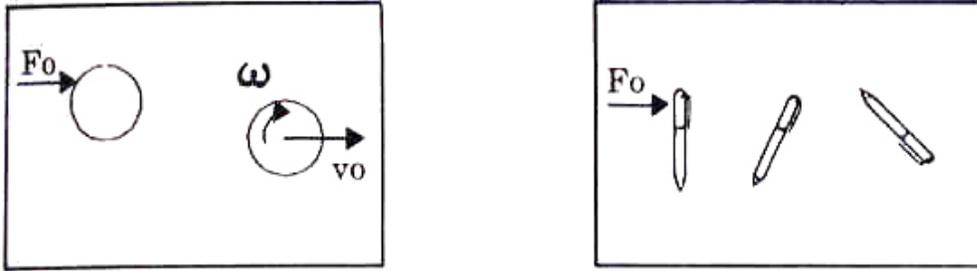


Figura VI.17: Al aplicar una fuerza en una dirección que no atraviesa el centro de masa de un cuerpo, se produce un efecto de traslación y otro de rotación.

Otro ejemplo en el cual se puede apreciar la existencia de este punto ideal –el centro de masa– es el siguiente: sobre una mesa sin roce descansa un lapicero. Al golpearlo en distintos puntos, notamos que en algunos de ellos el lapicero *rota* notablemente menos que en otros. De hecho podemos verificar que al golpearlo en un cierto punto, sólo sufre un desplazamiento y no aparece rotación. Esto nos indica que la línea de acción de la fuerza aplicada pasó justo por sobre el *centro de masa*, puesto que el lapicero se comportó exactamente como un objeto puntual.

Resumen:

En Estática podemos tomar torque con respecto a cualquier punto del espacio.

Las leyes de Newton actuando sobre un cuerpo extendido, se aplican concentrando las fuerzas en un punto: el centro de masa.

Si el torque neto con respecto a un punto no es nulo, el cuerpo comenzará a rotar. Si la dirección de las fuerzas aplicadas atraviesa el centro de masa, el cuerpo sólo experimenta un desplazamiento.

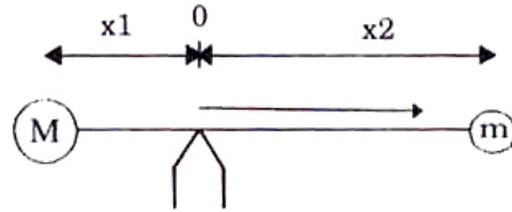
VI.5.2. Localización del centro de masa

Al resolver el ejercicio de las masas unidas por una barra de largo L , que se equilibraban sobre la punta de un alfiler, obtuvimos una indicación previa acerca de la ubicación del centro de masa. De acuerdo a la sugerencia dada, para equilibrarlas debíamos ubicar el pivote a una distancia x_1 de la masa M .

Incluyendo los signos, la solución de este problema es:

$$-M \cdot x_1 = m \cdot x_2, \quad x_1 = -\frac{m}{M+m} L$$

$$-x_1 + x_2 = L, \quad x_2 = \frac{M}{M+m} L$$



Si esta es la configuración de equilibrio, entonces el punto de apoyo es el centro de masa del sistema. La razón es la siguiente: el torque generado por el peso de una de las masas cancela al torque de la opuesta, si tomamos el punto definido por la coordenada x_1 como el origen. La fuerza de reacción del soporte debe obviamente localizarse en el mismo punto para no generar un torque y comunicar rotación al cuerpo.

Con este argumento localizamos la fuerza de reacción del soporte. Su módulo se obtiene ubicando todas las fuerzas en el punto de apoyo e imponiendo $\sum \vec{F} = 0$.

Podemos, además, repetir el experimento descrito para el lapicero ubicado sobre una mesa sin roce, ilustrado en la Figura anterior, utilizando ahora a la barra con las dos masas en su lugar. Con los argumentos desarrollados, sabemos que si le damos un golpe justo en el centro de masa –definido por x_1 ó x_2 –, la barra no rotará y sólo saldrá disparada moviéndose paralelamente a sí misma. Si la golpeamos en cualquier otro punto, la barra experimentará simultáneamente una rotación y un desplazamiento.

Restringiéndonos a una dimensión, el centro de masa (CM) para un sistema de partículas, está definido como:

$$x_{CM} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (\text{VI.13})$$

esto es, el CM es el valor medio de la coordenada de cada una de las partículas usando como factor de peso sus respectivas masas.

En el ejemplo anterior de la barra, la fórmula del centro de masa da la siguiente ubicación para el CM:

$$x_{CM} = \frac{-M x_1 + m x_2}{M + m} = 0.$$

Debido a que el numerador de esta ecuación es nulo, el CM coincide con el origen de coordenadas.

Una expresión análoga a la del centro de masa se usó en la definición de la *velocidad media* en Cinemática. En ese caso, el factor de peso con respecto al cual se promedió fue el tiempo durante el cual ocurrió cada velocidad. En el caso del CM el factor de peso de la coordenada x_i es la masa asociada con ella.

Así, encontrar el centro de masa de un sistema de partículas puntuales se reduce a ubicar la *distribución espacial media* de las masas que componen un objeto.

Si consideramos un objeto en dos dimensiones, el Centro de Masa, siendo un punto matemático, debe estar representado por dos coordenadas (x, y) . La coordenada y_{CM} se define en forma idéntica a la coordenada x_{CM} :

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \tag{VI.14}$$

La importancia de esta definición queda corroborada por la experiencia. Si calculamos la ubicación del Centro de Masa de un objeto, usando esta fórmula y luego, por ejemplo, se sostiene el cuerpo desde dicho punto, se observará que el cuerpo *no rota*. También, si se le da un impulso, exactamente en dicho punto, se verificará que el cuerpo no experimenta rotación, sólo desplazamiento.

Un modelo muy simple de un cuerpo sólido, consiste de un gran número de partículas puntuales de masa m unidas cada una a su vecina mediante un resorte de constante k . (Este modelo, por ingenuo que parezca, reproduce varias propiedades importantes de un sólido, entre ellas su capacidad calórica.)

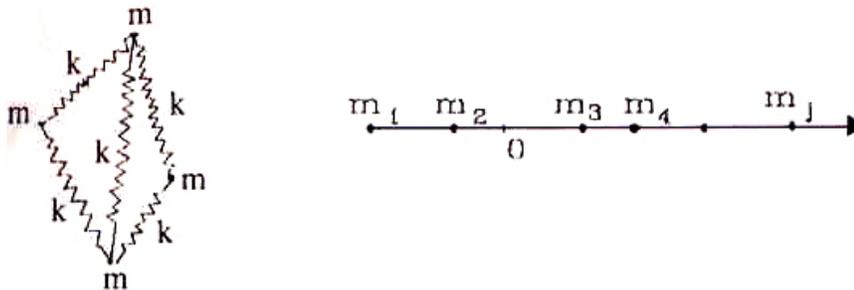


Figura VI.18: Modelo de un sólido unidimensional: masas unidas con resortes (derecha). Un enrejado de resortes, en tres dimensiones, fue utilizado para estudiar la absorción de calor de un cuerpo sólido por P. Debye y A. Einstein.

Volviendo al caso más simple, aquel de un modelo en una dimensión, el centro de masa –como ya vimos–, se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{M}$$

donde $M \equiv \sum_{i=1}^n m_i$: Masa total del sistema.

Lo que hemos hecho es *pesar* la posición de cada objeto con su respectiva masa. Vale decir que si una partícula tiene una masa muchísimo mayor que el resto tendrá el

centro de masa muy cerca de ella, puesto que en la ecuación anterior la posición de dicha partícula será la de más peso dentro de la suma.

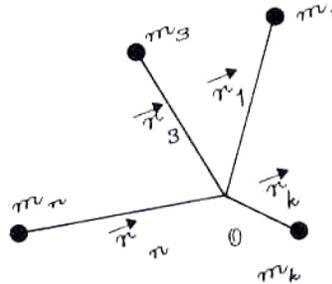
Otro caso donde se emplea un procedimiento similar es en el cálculo del promedio de notas cuando existen pruebas con coeficiente dos. Como su nombre lo indica, estas pruebas *pesan* el doble, comparadas con el resto, en el resultado final.

Generalizando esta expresión al caso de dos dimensiones y escribiéndola en forma vectorial:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{VI.15})$$

o en sus componentes:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$



Ejemplo

Encontrar el centro de masa de una varilla homogénea de largo ℓ y masa m .

De acuerdo a la afirmación que el centro de masa de un cuerpo homogéneo se encuentra en su centro de simetría, concluimos que el centro de masa de una varilla de espesor despreciable se encuentra justo en su punto medio.

Podemos llegar a este resultado calculándolo directamente o empleando un truco, como explicamos a continuación.

Tomemos el origen de coordenadas en el centro mismo de la barra, procedamos a dividirla en pequeños elementos finitos y sumar las coordenadas de cada uno de ellos en forma *simétrica* con respecto al origen. Debido al cambio de signo de la coordenada x_i al tomar el elemento de barra simétrico en la región $x < 0$, la suma se cancela de a pares: $m_i \cdot x_i + m_j \cdot x_j = 0$ porque $m_i = m_j$, (barra homogénea), y $x_j = -x_i$, al tomar el elemento simétrico con respecto al origen.

Este argumento indica que la coordenada del centro de masa es: $x_{CM} = 0$.

Nota

Al calcular $(\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i)$ debemos considerar siempre las simetrías para acortar el álgebra. De hecho, *si* el cuerpo es *homogéneo* (es decir: tiene las mismas propiedades en todos sus puntos), el centro de masa se ubica en el centro geométrico de la Figura, el punto que contiene mayor número de simetrías.

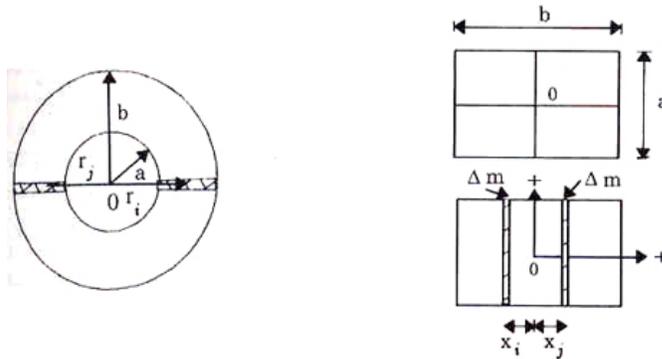


Figura VI.19: Usando las simetrías de cada uno de los dos cuerpos continuos que se incluyen, se puede obtener la posición del centro de masa de ellos, directamente sin tener que calcular explícitamente.

Obviamente el punto O (en los dos casos de la Figura) es el que posee más simetrías. Si queremos verificar este resultado nos conviene tomar ese punto como origen de coordenadas y sumar en torno a él en forma simétrica:

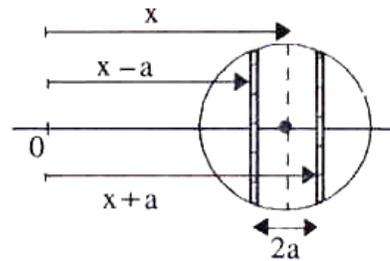
$$+\Delta m \cdot x_i + \Delta m \cdot x_j = 0 \quad (x_i < 0, x_j > 0,)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \Delta m_i \cdot x_i = 0,$$

(puesto que los términos se anulan de a pares).□

Ejercicio

Demostrar que el centro de masa de un disco cuyo origen de coordenadas no coincide con su centro, como se indica en la Figura, es precisamente el centro del disco. Con este ejercicio debe quedar claro que el centro de masa es un punto geométrico y su localización no depende de la ubicación del sistema de coordenadas. \square



De la misma forma como dividimos una barra en elementos infinitesimales, podemos descomponer un cuerpo de forma arbitraria. Este debe ser dividido en partes pequeñas, pero simétricas, de manera que su CM sea conocido. Con estos datos y la fórmula del CM podemos encontrar el centro de masa del cuerpo. Para ello debemos sumar sobre todos los elementos en que se subdividió el cuerpo, representados por las masas puntuales ubicadas en su centro de simetría.

Ejemplo

Ubicar el CM del disco de la Figura siguiente.

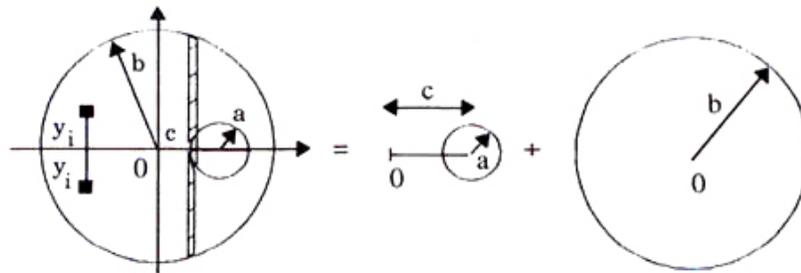


Figura VI.20: El disco original se compone aquí de un disco imaginario de masa negativa y de otro completo. El centro de masa se obtiene con la fórmula usual para el CM. Con esta estrategia, acortamos el cálculo en forma considerable.

Por simetría, el centro de masa se debe ubicar en el eje x , es decir con $y_{CM} = 0$. Para demostrarlo, comenzamos por la expresión del CM:

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

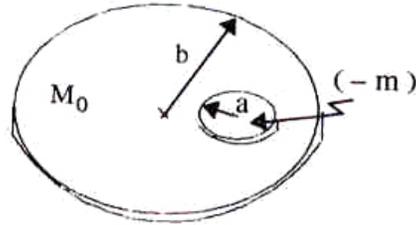
Como podemos sumar esta expresión en la forma que más nos convenga, tomamos dos elementos de masa, m_i y m_j , simétricos con respecto al eje x ; así se cumple que $y_i + y_j = 0$. Como además el cuerpo es homogéneo, elegimos los elementos con igual masa: $\Delta m_i = \Delta m_j = \Delta m$, de esta forma se cumple $[\Delta m] y_i + [\Delta m] y_j = 0$. Si sumamos de a pares en esta forma en el resto del disco tenemos $\Delta m \sum_{i=1}^N y_i = 0 = y_{CM}$.

Estos métodos serán abandonados al utilizar el cálculo integral en estos problemas. ¿Cómo evaluamos x_{CM} ?

Debido al orificio de radio $r = a$, *no* existe simetría con respecto al eje y .

Para resolver este problema utilizamos un *truco*: Las ecuaciones *no* pueden saber que no existen masas negativas. Nos aprovechamos de esto y consideramos el problema como la superposición de dos masas imaginarias que al sumarlas nos dan el disco original, con la sección que le falta. Estos dos objetos son:

- Disco *lleno* de radio b y masa M_0 .
- Disco de radio a y masa $-m$ (negativa), ubicado justo donde falta el pedazo en el disco original.



Al superponerlas se obtiene la geometría propuesta, ya que la masa negativa *cancela* su equivalente de masa positiva en el disco lleno.

¿Qué valor toma la masa $-m$, que debemos superponer sobre el disco completo?

En primer lugar, deberá tener las mismas dimensiones que el disco que falta en el original. Además, el valor de su masa debe ser igual (en magnitud) a la masa de un disco del mismo tamaño.

Note que $M = -m + M_0$, el disco original es igual al disco de masa M_0 menos el disco de masa negativa. M es la masa total del disco original, con el forado.

Como la densidad de ambos discos debe ser la misma, tenemos:

$$\rho = \frac{M_0}{\pi b^2 h} = \frac{m}{\pi a^2 h} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a^2}{b^2} M_0.$$

Donde ρ es la masa del disco y h su espesor. La masa del disco imaginario es:

$$m = -\frac{a^2}{b^2} M_0.$$

Puesto que el centro de masa es una sumatoria, siempre es posible sumarla en el orden que más nos convenga. Lo único relevante es no dejar fuera ninguna de las componentes de la suma.

Por simetría, podemos deducir rápidamente que el centro de masa de un disco lleno homogéneo, M_0 , se ubica en su centro (ver Ejemplo anterior). El centro de masa del disco

con el orificio se calcula entonces como la suma de los centros de masa de dos cuerpos: el disco lleno y el de masa negativa. Este último se superpone a M_0 de forma que su centro coincida con el centro del disco que falta en el problema original. El resultado se puede obtener considerando ambos como partículas puntuales de masa M y $-m$, respectivamente, ubicadas en su centro correspondiente. La expresión que resulta es:

$$x_{CM} = \frac{0 \cdot M_0 + c \left(-\frac{a^2}{b^2} M_0 \right)}{M_0 - \frac{a^2}{b^2} M_0} = \frac{-a^2 \cdot c}{b^2 - a^2} = (-1) \left[\frac{c \cdot a^2}{b^2 - a^2} \right].$$

La ubicación del centro de masa no depende de la masa M_0 ni de su densidad. Este resultado era esperado puesto que –en los cuerpos homogéneos– el CM es un punto que depende de la geometría del sistema. \square

Ejercicio

La expresión obtenida anteriormente es válida si $(a + c) \leq b$. Explique porqué debe cumplirse esta desigualdad. ¿Es válido este método si $(a + c) > b$?

Resumiendo:

- En la expresión de x_{cm} , el primer término de la suma es $0 \cdot M_0$, porque la masa del disco lleno es M_0 y su centro de masa se ubica en el origen de coordenadas, por lo tanto $x = 0$.

El otro término corresponde al producto de la masa del disco imaginario por la distancia desde el origen hasta el centro de este disco que, obviamente, coincide con su centro geométrico.

- Hemos resuelto el problema del disco con un agujero circular como una superposición de dos discos. Hemos reemplazado cada uno de los discos por una masa puntual ubicada en su centro, que corresponde al Centro de Masa de cada uno de los discos. \square

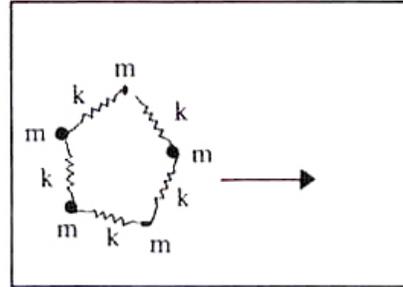
VI.5.3. Movimiento del centro de masa

Estudiemos la dinámica del centro de masa. El resultado que obtendremos fue ya adelantado: el centro de masa se mueve como un punto que concentra toda la masa y está sometido a la suma de todas las fuerzas externas.

Supongamos que las masas de la Figura descansan sobre una mesa sin roce y están oscilando en direcciones al azar. Simultáneamente, están moviéndose como un todo en una dirección arbitraria. Esto último quiere decir que si se suprimieran las oscilaciones de cada punto, el cuerpo se desplazaría como un sólido rígido en una cierta dirección.

Supongamos que el sistema consta de un número mucho mayor de partículas que las que aparecen en la Figura: ¿Cómo podemos extraer alguna información general acerca de este sistema?

Conviene recurrir, en primer lugar, a las propiedades del centro de masa. Sin duda es el más fácil estudiar:



$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Estudiamos en detalle la coordenada x . El resultado obtenido será similar a lo que suceda con la coordenada y . Ordenemos primero la ecuación del centro de masa:

$$\left[\sum_{i=1}^N m_i \right] x_{CM}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i(t).$$

Ahora hacemos lo usual en cualquier problema en que exista movimiento, tomamos la diferencia entre dos instantes t_1 y t_2 separados por un intervalo Δt y simultáneamente, tomamos el límite $\Delta t \rightarrow 0$, para poder aplicar las leyes de Newton al movimiento de cada una de las partículas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \frac{x_{CM}(t + \Delta t) - x_{CM}(t)}{\Delta t} \right] = \sum_{i=1}^N m_i \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \right] \right),$$

$$\text{pero } \sum_{i=1}^N m_i \equiv M \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x_{CM}(t + \Delta t) - x_{CM}(t)}{\Delta t} \right) \equiv v_{CM}|_x,$$

$$\text{con } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \right) \equiv v_i|_x,$$

la componente x de la velocidad de la partícula i -ésima.

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$M \vec{v}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i(t).$$

Definiendo el término de la izquierda de la ecuación como la cantidad de movimiento del centro de masa y la expresión de la derecha como la cantidad de movimiento de cada una de las partículas, obtenemos la siguiente expresión:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t)$$

Derivando esta expresión para extraer la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}_{CM}(t + \Delta t) - P_{CM}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i(t + \Delta t) - \vec{p}_i(t)}{\Delta t} \right), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} &= \sum_{i=1}^N \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

En este último paso, hemos usado –entre otras propiedades– que el límite de una suma es igual a la suma de los límites de cada una de sus componentes.

A continuación tomamos el paso más importante: introducimos la física al problema, incorporando las leyes de Newton en estas expresiones:

$$\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \equiv \vec{F}_{ext}^{(i)},$$

donde $\vec{F}_{ext}^{(i)}$ es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i -ésima: esta es la segunda ley de Newton. La aceleración de una partícula puntual es proporcional a la fuerza *neta* que actúa sobre ella. En este caso $\vec{F}_{ext}^{(i)}$, identifica la suma de las fuerzas que las otras partículas, a través de los resortes, ejercen sobre la masa i -ésima, más las fuerzas externas –como la gravitación u otras– que actúan sobre la partícula.

El primer grupo de fuerzas: aquellas que son generadas por las otras partículas del sistema, se denominan *internas*. Es conveniente distinguirlas del resto porque –como demostraremos a continuación–, a partir de la tercera ley de Newton de acción y reacción, estas fuerzas internas se anulan entre sí.

Introduciendo estos resultados en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} = \sum_i \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \sum_i F^i$$

La fuerza F^i se descompone, como ya se indicó, de la siguiente forma:

$$F^i \equiv \underbrace{F_{\text{ext}}^i}_{\substack{\text{fuerzas externas} \\ \text{actuando sobre la} \\ \text{partícula } i\text{-ésima.}}} + \underbrace{F_{\text{int}}^i}_{\substack{\text{fuerzas internas,} \\ \text{provenientes del resto} \\ \text{de las partículas,} \\ \text{actuando sobre la} \\ \text{partícula } i\text{-ésima.}}}$$

Las fuerzas internas que actúan sobre la partícula i -ésima, que provienen del resto de las partículas, se escriben como:

$$F_{\text{int}}^i = \sum_{j \neq i}^N F^{ji}.$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{i=N} (F_{\text{ext}}^i + F_{\text{int}}^i) = \sum_i F_{\text{ext}}^i + \sum_i F_{\text{int}}^i = \sum_i F_{\text{ext}}^i + \sum_i \left(\sum_{j, \text{con } i \neq j} F_{\text{int}}^{ij} \right).$$

Por el principio de acción y reacción, todas las fuerzas internas se anulan de a pares entre sí, por lo tanto:

$$\sum_i \sum_{j, i \neq j} F_{\text{int}}^{i,j} = 0, \quad \text{puesto que } F^{ij} + F^{ji} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (\text{VI.16})$$

la fuerza con que la partícula identificada con la letra i actúa sobre la partícula j , es idéntica pero de sentido opuesto a la fuerza que esta misma partícula, j ejerce sobre la i , y por lo tanto se cancelan de a pares. Finalmente, después de esta simplificación, la ecuación de movimiento del centro de masa queda:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta \vec{P}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{ext}}, \Rightarrow \text{sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.}$$

Resumen:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{externas al sistema}},$$

$$\text{Escrito de otra forma: } \Delta \vec{P}_{CM} = \vec{F}_{ext} \cdot \Delta t. \quad (\text{VI.17})$$

Se desprende de este resultado que si no existen fuerzas externas sobre el sistema, $\vec{F}_{ext} = 0$, el *centro de masa* se mueve con *momentum*:

$$\vec{P}_{CM} = \text{constante.}$$

Este es un resultado importante. Se utiliza especialmente en el estudio de choques de partículas.

En el caso de las masas unidas por resortes, referidas al comienzo de esta sección, por arbitrarias que parezcan allí las vibraciones del sistema, éstas deben ser de tal forma que el centro de masa viaje en línea recta y no oscile, puesto que *no* existen fuerzas externas al sistema. Todas las fuerzas son internas.

Ejemplo

Se tienen dos partículas de igual masa que, mediante un hilo, comprimen un resorte que las separa. El sistema se lanza con velocidad $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = v_0$; al llegar a su máxima altura, el hilo se corta, y en ese instante las masas se separan con una velocidad v_0 *con respecto al centro de masa*. Ubique el lugar donde caen las dos masas. Encuentre el lugar donde se encuentra el CM del sistema cuando ambas partículas tocan el suelo.

Nota

Suponemos que al separarse las partículas sólo adquieren velocidades en la dirección horizontal.

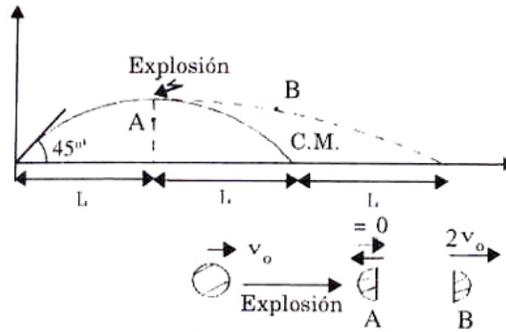
Hemos elegido la velocidad con que se separan las masas, medidas con respecto al CM, igual a la velocidad inicial v_0 , para disminuir el álgebra del problema.

Como ambas componentes de la velocidad son iguales, entonces el ángulo de lanzamiento fue de 45° .

Al llegar a su máxima altura h :

$$2g \cdot h = v_0^2, \quad h = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right),$$

el objeto explota. La semiesfera A queda en reposo con respecto a la tierra, puesto que en el enunciado se afirma que su velocidad después de la explosión es precisamente $(-v_0)$ con respecto al Centro de Masa. Al sumar las velocidades se cancelan y, en consecuencia M_A cae verticalmente.



La semiesfera B sale disparada en la dirección horizontal con una velocidad $2v_0$ y por lo tanto alcanza una distancia $2L$ (ver Figura), ya que B –o cualquier otro cuerpo– demora lo mismo en caer una altura h que en elevarse *hasta* esa misma altura.

Recordemos que ambos movimientos (horizontal y vertical) son independientes y que por lo tanto A y B tocan el suelo simultáneamente. El centro de masa viaja como si nada hubiera ocurrido, porque la *explosión origina sólo fuerzas internas* y este punto matemático cae justo en el punto medio del trazo que separa ambas partículas al tocar tierra.

Este ejemplo muestra que el centro de masa es un *punto matemático* que no necesariamente coincide con un punto material del cuerpo que representa. □

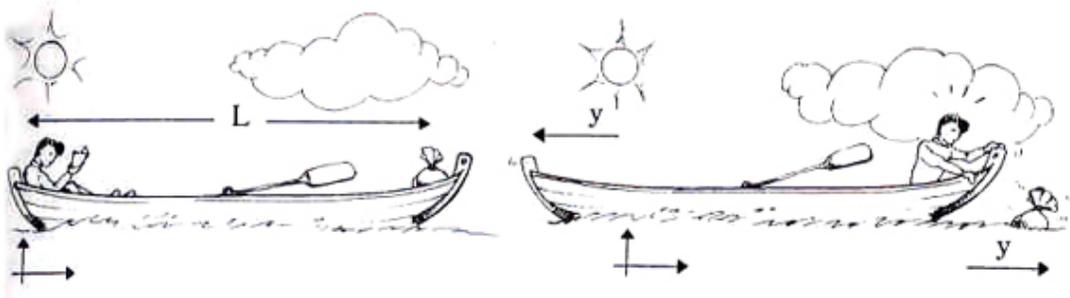


Figura VI.21: Designamos por y la distancia que se ha desplazado el centro de masa del bote.

Ejemplo

Un estudiante de masa m está sentado en un extremo de un bote de masa M . El mar está tranquilo y no hay viento. Al acomodarse, el estudiante realiza un movimiento brusco y la bolsa con la merienda, ubicada al otro extremo del bote, cae al mar. De

inmediato corre hacia el otro extremo –con una velocidad v con respecto al bote– para recuperarla. Si el largo del bote es L metros, ¿a qué distancia de la bolsa se encontrará el estudiante cuando logra alcanzar la otro punta del bote?

Puesto que en la dirección horizontal no existe ninguna fuerza externa, el momentum del sistema *estudiante–bote* se conserva. Como inicialmente el bote estaba en reposo, el momentum inicial es nulo. Supondremos que las velocidades son constantes, tanto del bote como del estudiante. Esta suposición no es esencial, sólo simplifica los cálculos.

$$P_{CM} = 0 = P_{\text{estudiante}} + P_{\text{bote}} = m(v - V) - MV,$$

donde $(v - V)$ representa la velocidad relativa del estudiante con respecto al mar. Hemos supuesto, como es natural, que el bote se mueve en sentido opuesto al estudiante. La velocidad del bote es:

$$V = \frac{m}{(m + M)} v.$$

Todo esto transcurrió en un intervalo de $T = L/v$ segundos. (Recordemos que v es la velocidad del estudiante con respecto al bote.)

Como el bolso permaneció sin moverse en el agua, cuando el estudiante llegó al otro extremo, la distancia que los separaba era el desplazamiento del bote con respecto al agua, y :

$$y = VT = \frac{m}{(m + M)} v \frac{L}{v}, \implies y = \frac{m}{(m + M)} L.$$

En este resultado no figura la velocidad que llevaba el estudiante; sólo depende de las masas y el largo L del bote.

Lo que sucede es lo siguiente: si el estudiante trata de ir más rápido, debe empujar con mayor fuerza con su pie en el piso para darse más impulso, esto genera –a través del principio de acción y reacción– una mayor velocidad para el bote. El estudiante se demora menos en llegar al otro extremo, pero el bote viaja más rápido, compensándose un efecto con otro.

Resolvamos este problema empleando solamente las propiedades del CM. Como no hay fuerzas externas y el sistema está inicialmente en reposo, el CM no puede desplazarse: debe permanecer en el mismo lugar desde el comienzo hasta el final de la carrera.

Tomemos como origen de coordenadas un punto –en el mar– que coincida con el extremo del bote donde se encuentra inicialmente el estudiante. A continuación escribamos la ecuación del CM para los instantes $t = 0$, cuando la merienda cae al mar y $t = T$, cuando el estudiante llega al otro extremo:

$$x_{cm} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot L/2}{m + M} \Big|_{t=0} = \frac{m \cdot (L - y) + M \cdot (L/2 - y)}{m + M} \Big|_{t=T},$$

despejando y de la segunda igualdad, se obtiene el resultado anterior, sin necesidad de hacer ninguna suposición con respecto a las velocidades.

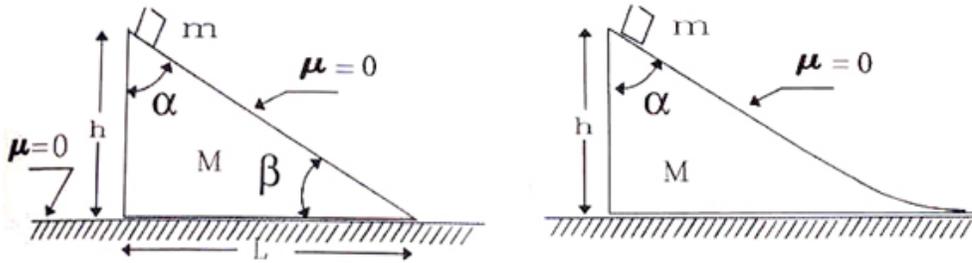


Figura VI.22: Los ángulos de la cuña son α y β . No existe roce en ninguna de las superficies de contacto, incluyendo el piso. A la derecha, se ha suavizado el ángulo β de manera que la masa m tenga, al tocar el piso, sólo una componente horizontal para la velocidad.

Ejemplo

Las superficies de los objetos de la figura: la cuña, el bloque y el piso, no tienen roce. La cuña tiene una masa M , altura h y el lado que está en contacto con el piso, largo L . Si el bloque de masa m se deja caer desde el vértice superior de la cuña y $\beta > 0$:

a) ¿cuál es la posición de la masa m , al llegar al piso? En esta pregunta y en las siguientes suponga que el bloque es una masa puntual, con el objeto de reducir los cálculos.

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad de la cuña y la velocidad de la masa m ? Escriba la ecuación de la conservación de la energía para este caso.

c) Para el caso en que $\beta = 0$ (ver Figura), ¿cuál es la velocidad de la cuña y la masa m cuando esta última toca el piso?

a) Como el CM permanece estático debido a que no hay fuerzas externas en la dirección x , se tiene que:

$$X_{cm} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot L/3}{m + M} \Big|_{t=0} = \frac{m \cdot (L - y) + M \cdot (L/3 - y)}{m + M} \Big|_{t=T},$$

donde establecimos el origen de coordenadas en un punto fijo al piso pero que coincide, en el instante inicial $t = 0$, con el vértice recto de la cuña. Supusimos, además, que su centro de masa se desplaza una cantidad y durante la caída de la masa m .

Nota: El centro de masa de un triángulo es: $x_{\text{triángulo}} = L/3$. (**Ejercicio**).

De la última ecuación, obtenemos que $y = (mL)/(m+M)$ y por lo tanto la masa m se ubica a una distancia $(ML)/(m+M)$ del origen de coordenadas fijo al piso.

b) La velocidad de la cuña tiene sólo una componente horizontal y la designamos por V_x . La masa m tiene velocidad u_x y u_y . Por conservación del momentum, se cumple que:

$$P_{CM} = 0 \implies -MV_x + mu_x = 0.$$

Hemos supuesto que la masa M se desplaza hacia la izquierda de la Figura.

La conservación de la energía mecánica en este ejemplo, genera la siguiente ecuación:

$$mgh = \frac{1}{2}MV_x^2 + \frac{1}{2}mu_x^2 + \frac{1}{2}mu_y^2,$$

si reemplazamos el valor de V_x en esta ecuación, se llega a:

$$mgh = \frac{1}{2}m \left(\frac{m}{M} + 1 \right) u_x^2 + \frac{1}{2}mu_y^2.$$

c) Cuando la cuña se deforma y el ángulo β se anula, desaparece la componente vertical de la velocidad y en este caso podemos encontrar, con estos métodos, la velocidad de ambos cuerpos M y m . La velocidad de m se obtiene despejando de la ecuación de conservación de la energía mecánica, la velocidad u_x :

$$u_x = \sqrt{\left[\frac{2Mgh}{m+M} \right]}, \quad V_x = \frac{m}{M} \sqrt{\left[\frac{2Mgh}{m+M} \right]}.$$

Ejemplo

Dos masas m_1 y m_2 , descansan sobre una mesa sin roce. Un resorte de constante k es comprimido una distancia d , con m_2 pegado a la pared y enseguida el sistema es abandonado desde el reposo.

a) Encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.

b) En el instante que m_2 ha perdido el contacto con la pared, ¿cuál es la velocidad del CM? ¿Cuál es la velocidad de cada una de las masas?.

a) Siempre que el resorte esté comprimido la masa m_2 permanecerá apoyada en la pared. Cuando el resorte alcance su largo natural, no habrá fuerza sobre m_2 , y por lo tanto, tampoco contra la pared. Esto ocurre cuando m_1 ha recorrido una distancia d .

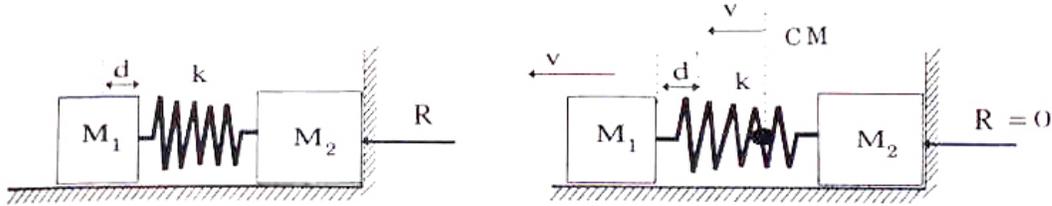


Figura VI.23: No hay roce entre los bloques y el piso. El resorte no tiene masa.

b) Cuando la masa m_2 deja de presionar a la pared, no hay ninguna fuerza horizontal actuando sobre el sistema. A partir de ese instante el CM se desplazará con una velocidad constante igual a:

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + 0}{m_1 + m_2}.$$

Por conservación de la energía, tenemos:

$$E_i = E_f \implies \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{k d^2}{2}, \implies v_1 = \sqrt{\frac{k d^2}{m_1}},$$

de esta forma la velocidad del CM es:

$$V_{cm} = \frac{\sqrt{k d^2 m_1}}{m_1 + m_2}.$$

A continuación nos ubicamos en un sistema de referencia que se mueva con el CM. En este sistema las velocidades de la masas son:

$$u_1 \equiv v_1 - V_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{k d^2}{m_1}}, \quad u_2 \equiv -V_{cm} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{k d^2}{m_1}},$$

donde u_1 y u_2 son las velocidades relativas al CM de m_1 y m_2 respectivamente.

Al despegarse de la pared, las dos masas continuarán oscilando con respecto al CM. Las condiciones iniciales para describir esta oscilación en el sistema CM, son las siguientes: el resorte adopta su largo natural en ese instante y u_1 y u_2 representan las velocidades iniciales de cada una de las masas. \square

Resumen:

Existe un punto matemático que representa al objeto y cuya dinámica ocurre como si sobre él actuaran todas las fuerzas externas al sistema:

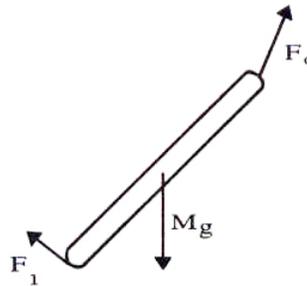
$$\Delta \vec{P}_{CM} = \Delta t (\sum \vec{F}_{ext}).$$

Si el cuerpo *no* es puntual, *además* de la expresión anterior debemos usar el *Torque*.

Si un cuerpo rígido no rota o gira con velocidad angular constante y su centro de masa permanece en reposo, entonces:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0,$$

$$\sum \vec{\tau} = 0.$$



Estas son las ecuaciones de la *Estática*.

VI.6. MOMENTO ANGULAR**VI.6.1. Definición**

La definición de momento angular es:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \wedge \vec{P} \quad (\text{VI.18})$$

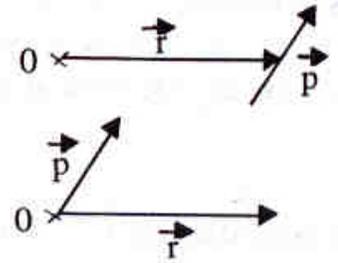
Comenzamos con la definición del producto vectorial aplicada al momento angular, utilizando los vectores que la definen: \vec{r} y \vec{P} .

El módulo de \vec{L} , está dado por:

$$L = |\vec{r}||\vec{p}|\text{sen}\theta.$$

El sentido de \vec{L} está determinado por la regla de la mano derecha, y puede entrar ($\Rightarrow \vec{L} = L \otimes$), o salir del plano determinado por \vec{r} y \vec{p} , ($\Rightarrow \vec{L} = L \odot$).

Recordemos que θ es el ángulo más pequeño entre \vec{r} y \vec{p} .



Momento angular de una partícula rotando

Calculemos el valor del momento angular para el caso más simple. Una partícula de masa M que gira describiendo una circunferencia de radio r . El momentum lineal es: $\vec{p} = m\vec{v}$, donde \vec{v} es tangente a la circunferencia y por lo tanto el ángulo que forma con el radio es $\theta = \pi/2$. El módulo de la velocidad tangencial es $v = \omega r$.

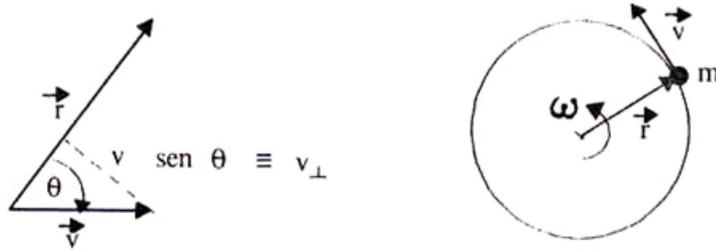


Figura VI.24: Momento angular de una partícula moviéndose a lo largo de una circunferencia.

$$L = m|\vec{r}||\vec{v}|\text{sen}\theta, \quad \text{con } |\vec{r}| = r \text{ y } |\vec{v}| = v,$$

$$L = mrv_{\perp}, \quad \text{donde } v_{\perp} = \omega r \quad \text{en una circunferencia} \quad (\text{VI.19})$$

$$L = m r \omega r$$

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega. \quad (\text{VI.20})$$

Esta última expresión representa el *Momento Angular* de una partícula que describe una órbita circular. La velocidad angular ω no debe ser necesariamente constante. La fórmula obtenida es general para el movimiento circular.

Momento angular de una barra rígida

¿Cuál es el momento angular de una barra que gira en torno a un extremo?

Este es un ejemplo de un sólido con dimensiones finitas. Para encontrar el momento angular de la barra, la descomponemos en una serie de trozos infinitesimales y calculamos el momento angular de cada uno de ellos, considerados como una partícula. Al sumar el momento angular de cada uno de ellos obtenemos el momento angular de la barra.

La exactitud de este método depende del error incorporado en la aproximación. Los elementos infinitesimales son, al fin de cuentas, pequeñas barras que nosotros hemos confundido con una partícula puntual. Mientras más pequeño sea el largo de estas barras infinitesimales y menor su ancho, mejor será la exactitud de este método.



Figura VI.25: Descomposición de una barra continua en elementos muy pequeños que finalmente, en el cálculo, son considerados como partículas puntuales.

El momento angular de este sistema de partículas es:

$$L = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \omega_0 \quad (\text{VI.21})$$

ω_0 : es la velocidad angular de la barra. No es necesariamente constante.

r_n : indica la distancia que separa a la partícula n-ésima del centro de giro.

m_n : es la masa de la partícula n-ésima. La suponemos igual para cada uno de los elementos en que se dividió la barra.

El procedimiento usado consistió en dividir la barra en elementos de largo Δ – todos iguales–, tal como se indica en la Figura. El valor de r_n lo elegimos de manera que identifique el punto medio de cada uno de los elementos en que se dividió la barra. Este punto medio es el centro de masa de la barra infinitesimal.

$$r_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta = (2n - 1) \frac{\Delta}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{VI.22})$$

$m_n = m_0$, la masa es la misma para cada uno de los trozos Δ ,

$\omega = \omega_0$, ω no depende de n ,

$$L = m_0 \omega_0 \left(\sum_{n=1}^N r_n^2 \right) = m_0 \omega_0 \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^N (2n - 1)^2$$

$$L = m_0 \omega_0 \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \left[\sum_{n=1}^N (4n^2 - 4n + 1) \right] \quad (\text{VI.23})$$

Resumiendo, hemos considerado la barra rígida como un agregado de puntos materiales que rotan con una velocidad angular ω_0 constante, con respecto a uno de sus extremos.

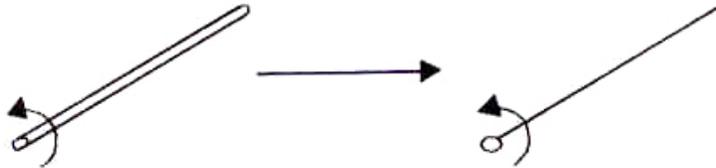


Figura VI.26: Modelo usado para calcular el momento angular de una barra rígida. En rigor, este modelo identifica la barra con un segmento de una línea recta: no consideramos su ancho. Incluirlo complica el álgebra y no agrega nada conceptualmente nuevo.

Definimos $r_n = (n - \frac{1}{2}) \Delta$ para indicar el Centro de Masa de cada uno de los trozos en que se dividió la varilla. De esta forma, para $n = 1$, el CM se ubica en $\Delta/2$ y para la n -ésima partícula, tenemos $(n \Delta - \Delta/2) = (n - 1/2)\Delta$.

Resumen de los resultados sobre series

En el párrafo que sigue, citamos los resultados acerca de series que son necesarios para resolver este ejercicio.

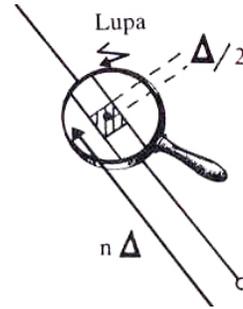
$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{6}(2N+1)(N+1).$$

Recordemos que:

$$\sum_{n=1}^N (Aa_n + Bb_n) = A\left(\sum_{n=1}^N a_n\right) + B\left(\sum_{n=1}^N b_n\right),$$

Con A y B independientes de n . Los otros coeficientes a_n y b_n pueden depender de n .



VI.6.2. Momento de inercia de una barra

Retornando a la sumatoria [VI.23]. Si desarrollamos cada uno de los términos incluidos allí, obtenemos la siguiente expresión:

$$L = m_0 \omega_0 \frac{\Delta^2}{4} \left[\sum_{n=1}^N 4n^2 - \sum_{n=1}^N 4n + \sum_{n=1}^N 1 \right],$$

el resultado de cada una de las sumatorias es:

$$= m_0 \omega_0 \Delta^2 \left[\frac{N}{6}(2N+1)(N+1) - \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N}{4} \right],$$

y finalmente, ordenando la suma:

$$= m_0 \omega_0 \left[\frac{\Delta^2}{6} N(2N+1)(N+1) - \Delta^2 \frac{N(N+1)}{2} + \frac{\Delta^2 N}{4} \right]. \quad (\text{VI.24})$$

El paso siguiente consiste en lograr que esta suma de pequeñas barras se aproxime lo más posible a una barra continua. Para ello imponemos que $N \rightarrow \infty$, esta operación equivale a subdividir repetidamente cada trozo infinitesimal de la barra, es decir:

$$\Delta \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \quad \text{de forma que se cumpla}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \Delta = \ell, \quad \text{con } \ell \equiv \text{largo de la barra.} \quad (\text{VI.25})$$

$$\text{Además: } \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot m_0] = M, \quad \text{masa de la barra.} \\ m_0 \rightarrow 0 \end{array} \quad (\text{VI.26})$$

Agrupando explícitamente en la sumatoria [VI.24], cada uno de los productos: $\Delta \cdot N$ y $m_o \cdot N$, la expresión del Momento Angular L , toma la siguiente forma:

$$L = \omega_0 \left\{ \frac{1}{6} (m_0 N) [2N\Delta + \Delta] [N\Delta + \Delta] - \frac{m_0}{2} \Delta N [\Delta N + \Delta] + \Delta N \cdot \frac{\Delta m_0}{4} \right\}.$$

$$\text{donde usamos: } \Delta^2(2N+1)(N+1) \equiv (2N\Delta + \Delta)(N\Delta + \Delta).$$

$$\text{Ahora si: } \Delta \rightarrow 0, \quad m_0 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\text{con } \Delta \cdot N = \ell, \quad N \cdot m_0 = M \quad \text{entonces tenemos:}$$

$$L = \omega_0 \left[\frac{1}{6} M (2\ell + \Delta)(\ell + \Delta) - \frac{m_0}{2} \ell(\ell + \Delta) + \frac{\ell}{4} \Delta m_0 \right],$$

$$L = \frac{M\ell^2}{3} \omega_0. \quad (\text{VI.27})$$

En la última igualdad, descartamos los términos que contenían como factores a Δ y m_o . Esta determinación se tomó porque ambos términos tienden a cero. Su efecto en la suma se desvanece en este límite, frente a los otros términos que permanecen finitos.

El factor que acompaña a ω_0 depende solamente de la geometría del cuerpo y de la ubicación relativa del eje de rotación dentro del cuerpo. Este término tiene dimensiones de masa multiplicado por largo al cuadrado. Recibe el nombre de *momento de inercia* y se identifica con la letra I .

$$I \equiv \text{momento de inercia. Sus dimensiones son: } [M] \cdot [L]^2$$

$$I = \frac{1}{3} M \ell^2, \quad (\text{VI.28})$$

este es el momento de inercia de una barra evaluado con respecto a uno de sus extremos. La barra tiene largo ℓ y masa M .

La expresión genérica del momento de inercia I , de un objeto es:

$$I = k M L^2,$$

donde k es un número determinado por la geometría del cuerpo y la posición del eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia I . M es la masa del cuerpo y L , representa una longitud característica del objeto.

No existe un valor único de I asociado a un cuerpo, como se ilustra a continuación.

Ejemplo

Calcular el valor del momento de inercia de una barra que rota con respecto a un eje que pasa por su centro de masa.

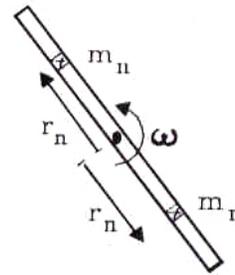
El largo de la barra es ℓ y su masa M .

$$I \equiv \sum_{n=1}^N m_n r_n^2.$$

Sabemos que es posible realizar esta suma en cualquier orden sin alterar el resultado. Entonces podemos considerar este ejemplo como una suma de dos barras independientes, cada una de largo $\ell/2$ y masa $M/2$.

Esta es la fórmula que se usó anteriormente. Aquí r_n señala cada uno de los trozos en que se subdividió la barra. Como es una *suma*, podemos hacerla en la forma que más nos convenga. Primero debemos sumar los términos hacia un lado de la barra y enseguida el resto, esto es lo que hacemos en la primera línea de la ecuación que sigue. Ya hemos calculado anteriormente cada una de las sumas; su valor se inserta en la segunda de las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$I = \sum_{n=1}^{N/2} m_n r_n^2 + \sum_{k=1}^{N/2} m_k r_k^2,$$



$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{3} \left(\frac{M}{2} \right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{M}{2} \right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^2, \\
 &= \frac{1}{24} M \ell^2 + \frac{1}{24} M \ell^2, \\
 I &= \frac{1}{12} M \ell^2. \tag{VI.29}
 \end{aligned}$$

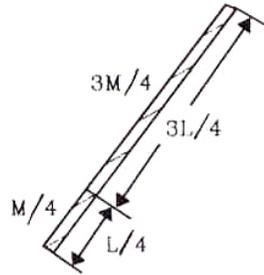
Este es el valor del momento de inercia de una barra que gira con respecto a su punto medio. Como se aprecia, siempre tiene un valor proporcional a $M \cdot \ell^2$. El factor numérico que lo multiplica depende de la posición relativa del eje de giro en el cuerpo.

Ejemplo

Calcule el valor del momento de inercia de la misma barra anterior, pero ahora tomando como referencia un eje perpendicular al plano del papel, ubicado a una distancia $\frac{L}{4}$ de su extremo.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
 I &= I_{\frac{3L}{4}} + I_{\frac{L}{4}}, \\
 I &= \frac{1}{3} \left(\frac{3M}{4} \right) \left(\frac{3L}{4} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{L}{4} \right)^2, \\
 I &= \frac{7}{48} ML^2. \quad \square
 \end{aligned}$$



Resumen:

La expresión para el momento de inercia I , se obtuvo a partir del momento angular de una partícula que gira en un plano describiendo una circunferencia.

El momento angular de un cuerpo en torno a un eje fijo es:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = I \vec{\omega}, \tag{VI.30}$$

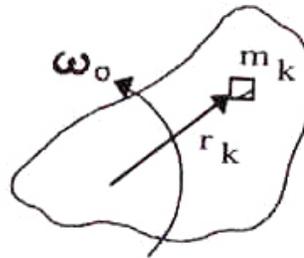
donde el $\vec{\omega}$ apunta en la dirección perpendicular al plano y cuyo sentido queda determinado por la regla de la mano derecha. Coincide, además, con el sentido determinado a partir del producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{p}$.

$$I = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \equiv \int dm r^2. \quad (\text{VI.31})$$

I es una cantidad que depende de la ubicación del eje de rotación y de la geometría del objeto.

Si el cuerpo es un sólido rígido y rota con velocidad angular ω alrededor de un eje, podemos escribir entonces:

$$L = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \omega_0 = I \omega.$$



VI.6.3. Torque y aceleración angular. Rotación con respecto a un eje fijo

Si el eje de rotación mantiene fija su orientación y el cuerpo no se deforma o cambia la posición relativa de sus componentes; la variación del momento angular en el tiempo se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{dL}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I \left(\frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right),$$

donde $I =$ constante, por ser un sólido rígido.

$$= I \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right),$$

$$\frac{dL}{dt} = I \alpha, \text{ donde } \alpha \text{ es la aceleración angular.}$$

Para incorporar el torque en la última ecuación, utilicemos la definición del momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ y derivémosla con respecto al tiempo para conectarla con la expresión anterior.

Comencemos enfatizando dos puntos: primero, realizaremos este cálculo para una partícula y posteriormente, generalizaremos al cuerpo entero, sumando sobre cada una de ellas. Segundo: *en un sólido rígido, todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración angular, ω y α , respectivamente.*

Por definición:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \wedge \vec{p}(t)}{\Delta t} \right\}$$

Debemos aplicar la condición de *Leibnitz* –que caracteriza a toda operación que se denomine derivada–, a esta última expresión. Esta condición afirma que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{A(t + \Delta t) \cdot B(t + \Delta t) - A(t)B(t)}{\Delta t} \right\} &= \\ &= A(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} \right] + \\ &\quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \right] \cdot B(t). \end{aligned}$$

Entonces, en el caso del momento angular L ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) \right] \wedge \vec{p} + \\ &\quad + \vec{r}(t) \wedge \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \right], \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} \right] &= \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F}, \end{aligned}$$

el primer término es cero, puesto que $\vec{p} = m\vec{v}$, y por lo tanto es paralelo a \vec{v} . Finalmente, obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{\text{externas}} = \vec{\tau}. \quad (\text{VI.32})$$

Resumen:

Acortamos el cálculo para no alargar excesivamente el texto. Por ejemplo, falta la sumatoria de esta expresión con respecto a cada una de las partículas: es decir, en $\vec{r} \wedge \vec{p}$, debería aparecer $\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$. También faltó analizar el efecto de las fuerzas internas y estudiar como se cancelan los torques generados por estas fuerzas, por efecto del principio de acción y reacción.

El resultado final es el exhibido en la ecuación [VI.32], donde L representa el momento angular del cuerpo rígido y τ el torque externo que actúa sobre el sistema.

Las expresiones obtenidas a partir de la definición del momento angular L y de su derivada son:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}, \quad (\text{VI.33})$$

$$\Delta\vec{L} = \Delta t \vec{\tau}. \quad (\text{VI.34})$$

Para un cuerpo rígido:

$$\vec{\tau} = I \vec{\alpha}. \quad (\text{VI.35})$$

$$\text{Si } \sum \vec{\tau} = 0, \implies \Delta\vec{L} = 0 \implies \vec{L} = \text{constante}. \quad (\text{VI.36})$$

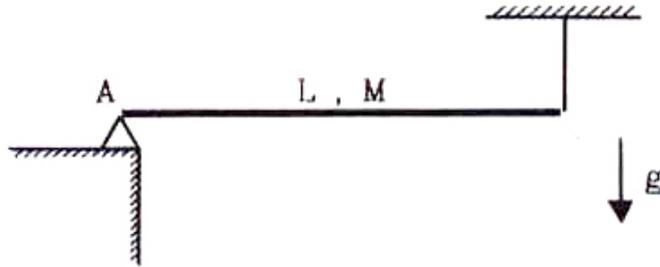


Figura VI.27: Barra rotulada en A y sostenida por un hilo desde el extremo opuesto. Al cortarse repentinamente la cuerda, la reacción en el punto A disminuye, como se demuestra en el Ejemplo siguiente.

Ejemplo

Una barra de masa M , largo L y momento de inercia I_A con respecto al punto A, ($I_A = \frac{1}{3} ML^2$), está sostenida por un hilo en el punto B y puede girar alrededor de un pivote en el otro extremo. Repentinamente el hilo se corta.

- a) Calcular las reacciones en el punto A y la tensión de la cuerda en B, antes de cortarse el hilo.
- b) Calcular la reacción R en A y la aceleración angular α inmediatamente después del corte de la cuerda.

Respuesta:

a) No existen fuerzas horizontales, entonces sólo existen componentes verticales, y al aplicar las leyes correspondientes a la estática, se obtiene:

$$R_A = T_B = \frac{1}{2} Mg.$$

b) Note que se piden estos valores exactamente después del corte de la cuerda, puesto que en un instante posterior el problema se complica, porque el torque va a depender del valor del ángulo que la barra forme con la horizontal.

Aplicando la segunda ley de Newton en el centro de masa de la barra, tenemos:

$$1) \quad R - Mg = M a_{CM},$$

y calculando el torque con respecto al extremo fijo A,

$$\sum \tau_A = I\alpha, \quad \text{y reemplazando la expresión del torque,}$$

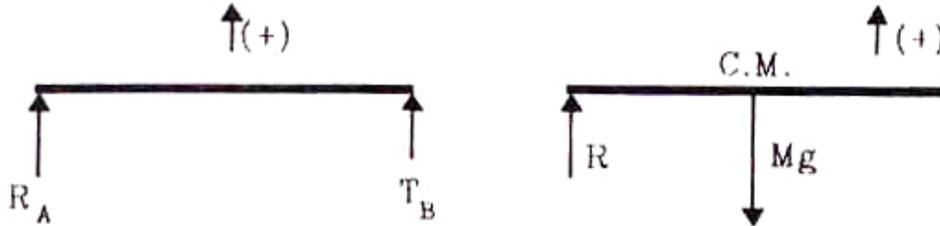


Figura VI.28: Diagrama de cuerpo libre para el caso estático, antes de romper la cuerda (izquierda) y justo después que se corta.

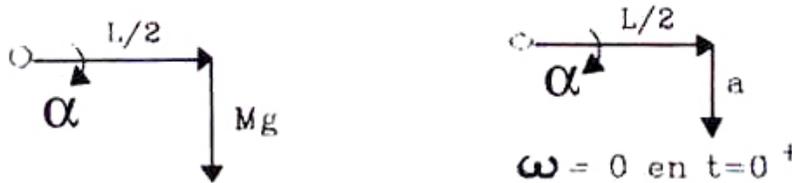


Figura VI.29: Diagrama de cuerpo libre de la barra justo en el instante en que se cortó el hilo. Se ilustra también la relación entre la velocidad angular y la velocidad lineal del centro de masa.

$$2) \quad Mg \cdot \frac{L}{2} = I\alpha.$$

Existe una relación geométrica entre la aceleración angular y la aceleración del centro de masa, cuando la barra comienza a girar con respecto al punto A:

$$3) \quad a_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{2}.$$

Ahora ya tenemos suficientes ecuaciones para resolver este problema. Despejando α de la ecuación 3) obtenemos:

$$\frac{1}{4}MgL^2 = I a_{CM} = \frac{1}{3}M L^2 a_{CM}, \quad \text{de donde:}$$

$$a_{CM} = \frac{3}{4}g \quad \text{y} \quad R = \frac{1}{4}Mg. \square$$

Es interesante hacer notar que el extremo de la barra tiene una aceleración de:

$$a_B = \alpha L = a_{CM} \frac{2}{L} L = \frac{3}{2}g.$$

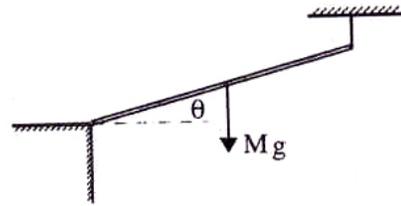
Podemos hacer un experimento para saber si este resultado es correcto: colocar una bolita en el extremo de una barra, similar a la del ejemplo reciente pero que haga un cierto ángulo sobre la horizontal. Si repentinamente soltamos la barra, la bolita experimenta una aceleración igual a g , por lo tanto debe caer más lentamente que el extremo de la barra y además verticalmente, con lo cual alcanzará un punto más al interior de la barra. Se puede hacer, en ese punto, una concavidad para que la bolita se instale allí al final de su caída y, con esto, verificar los resultados obtenidos aquí.

Ejemplo

¿Qué sucede si la barra forma un ángulo θ con respecto a la horizontal? ¿Cuál es el valor de la aceleración en el extremo de la barra?

Todo es similar al ejemplo anterior, excepto que:

$$\begin{aligned}\vec{r} \wedge \vec{g} &= r g \sin(\theta + \pi/2), \\ &= r g \cos \theta \otimes.\end{aligned}$$



Las ecuaciones de Newton, el torque y la relación entre la aceleración angular y lineal, para el caso en que el hilo se acaba de cortar, se escriben a continuación:

- 1) $M a_{CM} \cos \theta = -R_y + M g,$
- 2) $M a_{CM} \sin \theta = R_x,$
- 3) $M g \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha \otimes,$
- 4) $a_{CM} = \alpha \frac{L}{2}.$

Donde T es la fuerza tangencial que ejerce el piso sobre la barra. R es la reacción normal del piso.

Despejando la velocidad angular en función de la velocidad del CM de la ecuación 4) y reemplazándola en la ecuación 3), obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{M g \cos \theta L^2}{\frac{1}{3} M L^2 4} = \frac{3}{4} g \cos \theta,$$

esta es la aceleración del CM. En el extremo de la barra se cumple:

$$a = \frac{3}{2}g \cos \theta.$$

Si $\cos \theta > \frac{2}{3} \Rightarrow a_B > g$, en el instante en que se corta el hilo de la barra.

Ejercicio

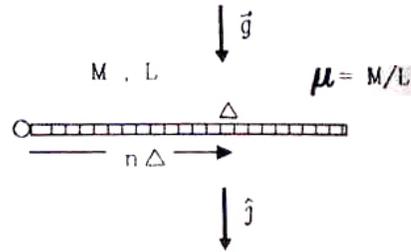
Calcular la posición de la cavidad de manera que la bolita al caer, desde un extremo de la barra, se ubique en el receptáculo. \square

Ejemplo

Demuestre que al calcular el torque con respecto a un extremo de la barra y concentrar todo el peso en el CM, como se hizo en el ejemplo anterior, se obtiene el mismo resultado que al evaluar el torque generado por el peso de cada elemento infinitesimal de barra con respecto al mismo punto.

En la ecuación 3) del último ejemplo, usamos el peso del cuerpo Mg como la fuerza que generó el torque, sin embargo en rigor deberíamos usar la suma de los pesos de cada una de las partes infinitesimales de la barra por su respectivo brazo, para calcular el torque total.

No lo hicimos porque el resultado es el mismo, es equivalente a considerar el peso de la barra concentrado en el CM. A continuación demostramos este resultado. Δ es el largo de cada segmento de barra, μ es la densidad lineal, M la masa total y L el largo de la barra. El vector unitario \hat{j} se indica en la Figura.



Note que la barra permanece horizontal, de modo que:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \wedge (g\hat{j}) &= r_i g, \quad \text{puesto que } \sin\theta = 1. \\ \vec{\tau} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \mu \Delta \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge (g\hat{j}), \\ \vec{\tau} &= \mu \Delta g \left[\sum_{n=1}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \Delta = \mu g \Delta^2 \left[\sum_{n=1}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \\ &= \mu g \Delta^2 \left\{ \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{2} N + \frac{1}{2} N \right\}, \\ &= \mu g \left\{ \frac{1}{2} (N\Delta)^2 + (N\Delta) \cdot \Delta \right\}, \end{aligned}$$

Tomando el límite $\Delta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$, tal que $N \cdot \Delta = L$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau &= \underbrace{\mu g \frac{1}{2} L^2}_{\text{}} + \mu g \cdot L \cdot \Delta, \\ \vec{\tau} &= (\mu L) g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} M g L \otimes. \end{aligned}$$

Con este cálculo verificamos que, concentrar la masa total del cuerpo en el CM, y calcular el torque sumando el efecto de cada uno de sus elementos, son métodos equivalentes.

Ejemplo

Calcular el momento angular con respecto a un punto P, para una barra que se traslada (sin rotar) con velocidad \vec{V} en un plano, como se indica en la Figura.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \right) \wedge \vec{p},$$

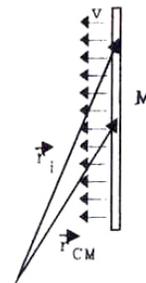
ya que $\vec{p}_i = \vec{p}_j = \vec{p}$ debido a que la barra experimenta solo traslación.

$$\sum \vec{r}_i = \sum (\vec{r}_{CM} + n \Delta \hat{j}) = N \vec{r}_{CM} + 0.$$

Donde $\sum (n \Delta) \hat{j} = 0$, puesto que –por simetría– existe el mismo número de segmentos de largo Δ sobre el CM, que bajo él.

$$p = m_o \vec{v}, \quad N m_o = M.$$

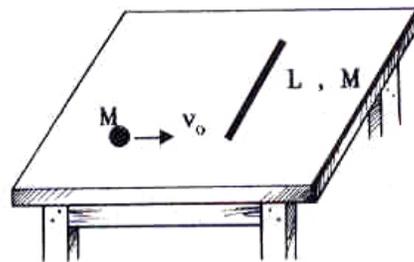
$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \wedge (M \vec{v}).$$



Ejemplo

Una barra de largo L y masa M descansa sobre una mesa horizontal pulida (con roce despreciable). Una masa M que tiene una velocidad v_0 y que está dirigida perpendicularmente contra la barra (ver Figura) choca con el extremo y se queda pegada a ella.

- ¿Cuál es la posición del CM del sistema cuando la masa se encuentra a una distancia a de la barra?
- ¿Cuál es el valor de la velocidad del CM, antes y después del choque?
- Calcule la velocidad angular ω_0 del sistema barra–masa con respecto al CM, antes y después del choque.



Solución:

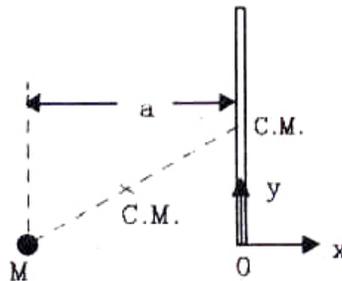
a) Por simetría, el CM de la barra homogénea se ubica en su punto medio. Para determinar el CM del sistema barra–masa, lo descomponemos en dos masas puntuales, una que representa a la barra ubicada en su punto medio y la otra la masa M . El CM del sistema se localiza en el punto medio de la línea que los une.

Ubicamos el origen del sistema de coordenadas en el extremo de la barra, en el lugar exacto donde ocurrirá el choque (ver Figura).

En un cierto instante, la masa M se ubica en $x = -a$, entonces, usando la expresión para calcular el CM, obtenemos para el sistema barra–masa:

$$x_{CM} = \frac{(-a)M + 0 \cdot M}{2M} = -\frac{a}{2},$$

$$y_{CM} = \frac{0 \cdot M + \frac{L}{2}M}{2M} = \frac{L}{4}.$$



b) Como $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ en el plano de la mesa, entonces:

$$\Delta \vec{P}_{CM} = \Delta t \left[\sum \vec{F}_{ext} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{V}_{CM}|_{antes} = \vec{V}_{CM}|_{después}.$$

$$V_{CM}|_x = \frac{M v_0 + M \cdot 0}{2M} = \frac{1}{2} v_0, \quad V_{CM}|_y = 0.$$

$$\text{Donde hemos usado [VI.5.3]: } \vec{V}_{CM} = \frac{\sum m \vec{v}_i}{\sum m_i}.$$

c) Como la masa M no choca con el centro de masa de la barra, después del choque, el conjunto experimenta un movimiento de traslación y rotación simultáneos. El CM del sistema *no* sufre cambios debido al choque, puesto que las fuerzas que ocurren en ese instante, son internas y no afectan la dinámica del conjunto barra–masa. Como no hay fuerzas externas en el plano de la mesa, *la velocidad del centro de masa permanece constante e igual a $V_0/2$.*

Parece razonable reubicar el origen del sistema de referencia en el centro de masa. En esta nueva ubicación, la barra junto con la masa M en su extremo, no se desplaza y sólo gira en torno al nuevo origen de coordenadas. Más aún, como el torque externo al sistema barra-masa es nulo, el momentum angular, L_0 , permanecerá constante.

$$\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \text{constante},$$

es decir: $L_{\text{antes del choque}} = L_{\text{después del choque}}$.

Comencemos estudiando el movimiento del conjunto barra-masa, desde el sistema ubicado fijo al centro de masa.

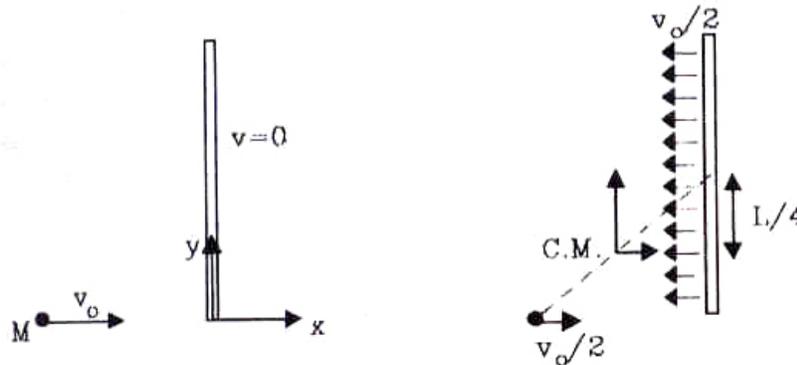


Figura VI.30: El choque visto por un observador ubicado en la mesa (sistema de Laboratorio) y otro observador que se mueve con el centro de masa del conjunto barra-masa.

Calculemos las velocidades relativas. De acuerdo a la fórmula obtenida en el Capítulo III:

$$V_{\text{barra}/\text{CM}} = V_{\text{barra}/\text{Lab}} + V_{\text{Lab}/\text{CM}} = V_{\text{barra}/\text{Lab}} - V_{\text{CM}/\text{Lab}},$$

reemplazando los valores correspondientes:

$$V_{\text{barra}/\text{CM}} = 0 - \frac{V_0}{2} = -\frac{V_0}{2},$$

$$V_{\text{masa}/\text{CM}} = V_{\text{masa}/\text{Lab}} - V_{\text{CM}/\text{Lab}} = V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2}.$$

Ambas velocidades sólo tienen componentes en el eje-x.

Para calcular la velocidad angular después del choque, necesitamos conocer el valor del momento angular del sistema antes que éste ocurra. Este valor es la suma del momento angular de la barra más la contribución de la masa M . Si tomamos como origen el CM, entonces (ver ejercicio previo):

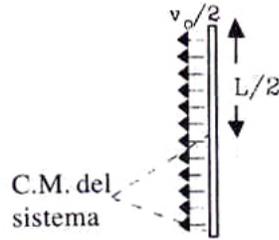


Figura VI.31: Campo de velocidades de la barra. La barra no tiene velocidad angular, todos sus puntos tienen la misma velocidad, en consecuencia, podemos usar el resultado obtenido en un ejercicio anterior para el cálculo del momento angular.

$$L_{\text{barra/CM}} = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{p} = \frac{M L V_o}{8}, \quad (\text{VI.37})$$

$$L_{\text{masa/CM}} = M \frac{V_o}{2} \frac{L}{4}, \quad \text{y el momento angular total es,} \quad (\text{VI.38})$$

$$L_{\text{antes del choque}} = \frac{1}{4} L M V_o. \quad (\text{VI.39})$$

Después de ocurrido el choque, el momento angular del conjunto permanece constante y el *conjunto barra-masa gira como un todo*, lo que facilita el cálculo del momento angular total:

$$L_{\text{después del choque}} = L_{\text{barra/CM}} + L_{\text{masa/CM}}.$$

$$L_{\text{barra/CM}} = I \omega_0, \quad (\text{puesto que sólo existe rotación, con respecto al CM}).$$

$I \equiv$ Momento de Inercia de una barra rotando con respecto al centro de masa del conjunto barra-masa.

El valor del momento de inercia de la barra rotando con respecto al punto que se indica en la Figura ya se calculó en un ejemplo anterior, el valor obtenido fue:

$$I = \frac{7}{48} M L^2.$$

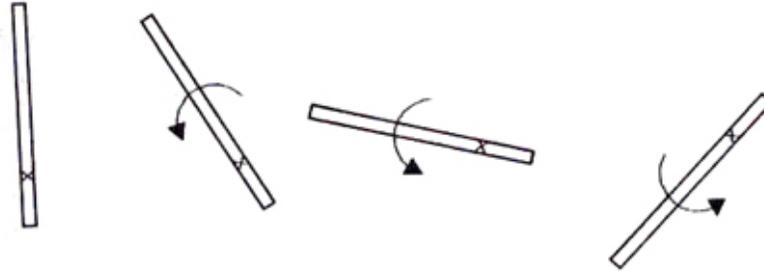


Figura VI.32: Movimiento del conjunto barra–masa después del choque. El CM se mueve con velocidad constante, por lo tanto las cruces –que ubican el CM– deben estar en una línea horizontal e igualmente espaciadas, si los intervalos de tiempo considerados entre cada posición, son iguales.

$$L_{\text{después del choque}} = \underbrace{\frac{7}{48} ML^2 \omega_0}_{I \omega_0} + \underbrace{M \left(\frac{L}{4}\right)^2 \omega_0}_{M r_M^2 \omega_0} = \frac{5}{24} ML^2 \omega_0,$$

pero, $L_{\text{antes}} = L_{\text{después}}$, de aquí obtenemos la ecuación que nos permite calcular ω_0 :

$$\frac{M V_0 L}{4} = \frac{5}{24} (\omega_0 L) ML, \quad \text{simplificando, se tiene:}$$

$$V_0 = \frac{5}{6} (\omega_0 L) \implies \omega_0 = \frac{6}{5} \frac{V_0}{L}.$$

Comentarios

Este es un problema largo y conviene resumir sus puntos más importantes.

- El conjunto estudiado consiste en la barra y la masa puntual. Sobre este sistema *no* existen fuerzas externas en el plano de la mesa, por lo tanto el momentum lineal y el momento angular se conservan:

$$\Delta \vec{P}_{\text{sistema}} = 0,$$

$$\Delta \vec{L}_{\text{sistema}} = 0.$$

Cualquier cambio de velocidades entre estas dos componentes se debe a la acción de las fuerzas internas.

- Como no hay fuerzas externas el centro de masa se mueve con *velocidad constante*, por lo tanto conviene ubicar el sistema de referencia fijo a dicho punto. Las leyes de Newton son válidas allí, puesto que *es un sistema inercial*.

- Al considerar el momento angular antes del choque, la barra se toma como un punto de masa M y velocidad $(V_0/2)$ porque se *traslada paralelamente a sí misma*.

- Como las masas de ambos cuerpos son iguales a M , no tenemos oportunidad de considerar los casos extremos en que la partícula tiene una masa m muy pequeña o muy grande comparada con la masa M de la barra.

Ejercicio

Repita estos cálculos utilizando una masa $m \neq M$ para la partícula puntual. Verifique que estos resultados coinciden con los obtenidos anteriormente, cuando se impone que ambas masas sean iguales.

VI.7. TEOREMA DE STEINER

VI.7.1. Momento de inercia

Existen muchos ejemplos interesantes en los cuales el eje de rotación no pasa por el centro de masa.

A continuación expresamos el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje fijo, perpendicular al plano de movimiento y que lo atraviesa por un punto arbitrario.

El valor del momento de inercia con respecto a este nuevo eje es igual a la suma del momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa y el valor del momento de inercia del centro de masa –considerado como una partícula– con respecto al nuevo eje.

La única operación que debemos realizar es descomponer el vector posición de cada una de las partículas \vec{x}_i , como la suma de un vector que va desde el eje al centro de masa \vec{R}_{CM} y otro que apunta desde el CM al punto i -ésimo, \vec{r}_i .

$$I_o = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i)^2, \quad \vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i.$$

Utilizaremos $\vec{R}_{CM} \equiv \vec{R}$, en los siguientes desarrollos, en el resultado final incluiremos nuevamente el sub-índice CM.

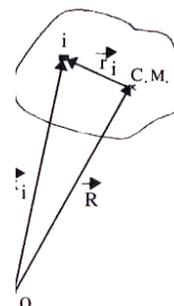
$$(\vec{x}_i)^2 = (\vec{R} + \vec{r}_i)^2,$$

$$(\vec{x}_i)^2 = \vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2,$$

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2 \right],$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0, \text{ entonces:}$$

$$I_o = M R_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^2.$$



Identificando los términos correspondientes, se obtiene:

$$I_o = I_{CM} + I_{c/rCM}$$

VI.7.2. Momento angular

Una situación análoga se produce en el caso del momento angular. La misma separación de coordenadas anterior, es válida aquí. El detalle de los cálculos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \wedge (m_i \vec{v}_i), \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i) \wedge (m_i \vec{v}_i) \right\}, \\ &= \vec{R}_{CM} \wedge \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{v}_i), \end{aligned}$$

$$\text{como, } \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM}, \text{ y además, } \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i, \text{ reemplazando}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{R}_{CM} \wedge (M \vec{V}_{CM}) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \wedge \vec{V}_{CM} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{u}_i). \end{aligned}$$

En este cálculo hemos usado la igualdad: $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0$, y la composición de velocidades: $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i$, obtenida derivando con respecto al tiempo, el vector posición: $\vec{x}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$.

El momento angular con respecto al punto O se descompone en la suma de dos términos: el momento angular del cuerpo con respecto al centro de masa y el momento angular del objeto –concentrado en su centro de masa–, con respecto al punto O :

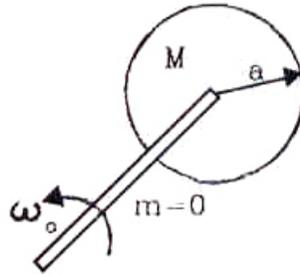
$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \wedge M \vec{v}_{CM}.$$

La variación del momento angular con respecto al tiempo está relacionada con el torque a través de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Ejemplo

Una barra de masa despreciable ($m = 0$) y largo ℓ , sostiene en su extremo un disco –de masa M y radio a – mediante un eje sin fricción. Si a medida que la barra gira, el disco permanece paralelo a sí mismo, calcular el momento angular con respecto al eje de giro de la barra.



El momento angular es:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \wedge M \vec{v}_{CM}.$$

Como el disco *no* gira con respecto a su centro de masa, $\vec{L}_{CM} = 0$. El momento angular se reduce al de una masa M ubicada en el extremo de la barra, que rota con la velocidad angular de la barra ω_0 :

$$I = M \ell^2, \quad L_O = M \ell^2 \omega_0.$$

Ejemplo

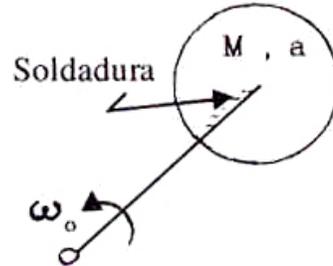
Para evitar que el disco se traslade paralelamente a sí mismo, como sucede en el caso anterior, lo fijamos a la barra. Ahora el disco *gira* unido a la barra y su centro de masa describe una circunferencia.

Calcule el momento angular del conjunto.

La expresión del momento angular es:

$$L_o = L_{CM} + L_{c/r \text{ CM}}$$

$L_{c/r \text{ CM}}$ es el momento angular del disco con respecto a su centro. Su velocidad angular es la misma de la barra. Su valor es:



$$L_{c/r \text{ CM}} = I_{c/r \text{ CM}} \omega_o = \frac{1}{2} M R^2 \omega_o,$$

donde ω_o es la velocidad angular de la barra. $[M R^2]/2$, es el valor del momento de inercia del disco con respecto a su centro.

Por otra parte:

$$L_{CM} = M \ell^2 \omega_o \Rightarrow L_o = \left\{ M \ell^2 + \frac{1}{2} M R^2 \right\} \omega_o. \square$$

Supongamos que en este caso $\ell = R$, entonces $L_o = [3 M R^2]/2 \omega_o$. Esto es equivalente a que el disco gire en torno a un eje situado en el borde, por lo tanto, el valor del momento de inercia de un disco con respecto a un borde es:

$$I_{c/r \text{ al borde}} = \frac{3}{2} M R^2.$$

Ejemplo

Calcular la aceleración de un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano inclinado. Este plano forma un ángulo θ con la horizontal. El valor del coeficiente de roce entre el cilindro y el plano es $\mu_{\text{estático}}$.

Lo primero que debemos hacer es elegir un sistema de referencia adecuado que facilite los cálculos. Una de las posibilidades es ubicarlo en el punto P de la Figura, de modo que la ecuación del torque sea simple. Esta no es la única alternativa, como ilustraremos al final de este ejemplo.

De acuerdo a la ley de composición del momento angular, tenemos:

$$L_P = L_{CM} + L_{c/r \text{ CM}}$$

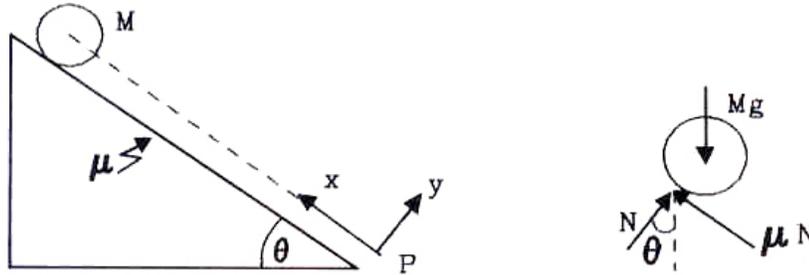


Figura VI.33: Diagrama de cuerpo libre de un cilindro que cae por un plano inclinado con roce.

L_{CM} es nulo: la velocidad del centro de masa es colineal con el vector que une este punto con P . De esta forma:

$$L_P = L_{c/r_{CM}} = \frac{M R^2}{2} \omega,$$

donde ω es la velocidad angular del cilindro. A medida que se desplaza por el plano inclinado, su velocidad angular aumentará, de modo que $\omega = \omega(t)$.

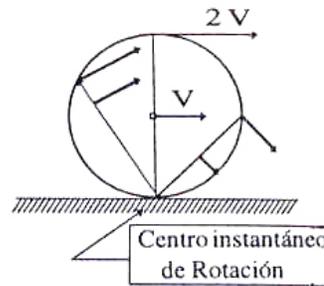
Por otra parte, la expresión para el torque es:

$$\tau = \frac{dL_P}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{M R^2}{2} \omega \right\}.$$

La única fuerza que genera un torque con respecto al punto P es el roce. La fuerza normal al plano \vec{N} , se cancela con la proyección del peso del cilindro: $Mg \cos \theta$ (ver Figura).

Las ecuaciones de Newton y la del torque son entonces:

- 1) $F_{roce} = I_{CM} \alpha \quad \left(\frac{d\omega}{dt} \equiv \alpha \right),$
- 2) $Mg \sin \theta - F_{roce} = M a_{CM}.$
- 3) $N - Mg \cos \theta = 0.$



La condición geométrica de *resbalar sin rodar* indica que *instantáneamente* el cilindro está rotando con respecto al punto de contacto entre el cilindro y el plano. La velocidad del centro del disco es: $R\omega = v_{CM}$. La velocidad relativa entre el punto del cilindro en

contacto con el piso y el piso mismo es nula en ese instante (ver Figura). Las aceleraciones están relacionadas por:

$$R\alpha = a_{CM}.$$

Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: α , N , F_{roce} y a_{CM} . Despejando a_{CM} ,

obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{2g \operatorname{sen} \theta}{3} \quad \alpha = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \operatorname{sen} \theta.$$

El valor de N se obtiene directamente de la ecuación 3), y

$$F_{\text{roce}} = -Mg \frac{\operatorname{sen} \theta}{3}.$$

Note que si el cilindro rueda sin resbalar, debe cumplirse que la fuerza de roce, sea menor o igual al valor máximo $F_{\text{máxima de roce}}$, que de acuerdo a la definición empírica dada es $F_{\text{máxima de roce}} = \mu_{\text{estática}} F_{\text{normal}}$.

De esta forma, para que el cilindro no resbale a medida que baja, debe cumplirse que:

$$F_{\text{roce}} = Mg \frac{\operatorname{sen} \theta}{3} \leq \mu_{\text{estática}} F_{\text{normal}} = \mu_{\text{estática}} Mg \cos \theta.$$

De aquí obtenemos la condición para que el cilindro no resbale:

$$\frac{\tan \theta}{3} \leq \mu_{\text{estática}}.$$

Es decir, si incrementamos lentamente el ángulo θ , el cilindro comenzará a resbalar sobre el plano, cuando se cumpla que: $\tan \theta > 3\mu$. El factor $1/3$, depende de la geometría del cuerpo. \square

Ejercicio

Continuando con este ejemplo, elija ahora un sistema de referencia apoyado en el plano, es decir con el punto P , origen del sistema de coordenadas, descansando en el vértice inferior del plano inclinado. Demuestre que el momento angular con respecto al punto P es:

$$L_o = L_{c/r \text{ CM}} + L_{CM} = \frac{3}{2} M R^2 \omega.$$

Comente este resultado teniendo presente el valor del momento de inercia con respecto a un borde del disco, encontrado anteriormente. \square

VI.8. ENERGIA CINÉTICA DE ROTACION

Calculemos la energía cinética, K , de un anillo rotando con respecto a un eje perpendicular a su plano, que pasa por el centro de masa. Este puede ser el modelo de una rueda de bicicleta, si despreciamos la masa de los rayos que unen el aro al eje central.

La velocidad tangencial de una partícula en el borde es, $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$, donde \vec{R} es el vector que apunta a dicha partícula y $\vec{\omega}$, la velocidad angular del anillo.

Como $\vec{\omega}$, es perpendicular a \vec{R} , para cualquier punto del aro, entonces: $\vec{\omega} \wedge \vec{R} = (\omega R) \hat{t}$, donde \hat{t} , es un vector unitario tangente al anillo. La energía cinética de un elemento de arco es:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2,$$

donde m_i es la masa de un elemento de arco del aro, y $V = R\omega$, su velocidad tangencial.

Sumando sobre todas las partículas del aro, obtenemos su energía cinética:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2, \\ K &= \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i R_i^2 \right] \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

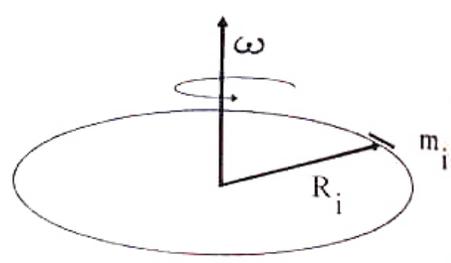
Este mismo método puede generalizarse al caso de un objeto bidimensional girando alrededor de un eje perpendicular a él, o a una figura que gira en torno a un eje que coincide con uno de sus ejes de simetría.

La expresión general para la energía cinética de un cuerpo, cuyo momento de inercia con respecto a un eje de simetría es I , en torno al cual se encuentra girando, es:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{VI.41})$$

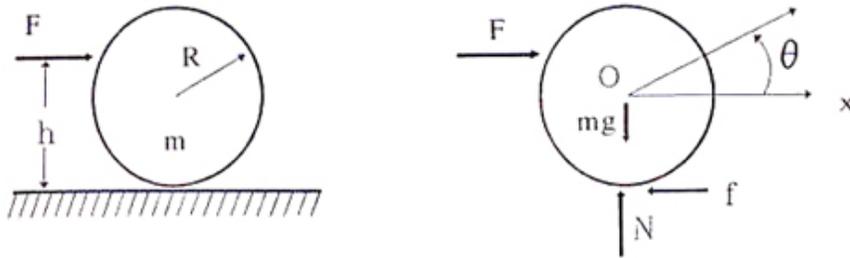
Esta expresión también es válida para un objeto plano, cualquiera sea su forma.

Un ejemplo que se repite a menudo, es el de un cuerpo rodando sin resbalar sobre otro. En estos casos, la fuerza de roce no realiza trabajo, porque no hay desplazamiento relativo entre los dos puntos en contacto de los cuerpos. Por tanto, la energía se conserva.



Por ejemplo, si hacemos rodar un cilindro en un plano rugoso, de manera que no resbale sobre él, en teoría –dada una velocidad inicial– el cilindro permanece eternamente rodando. En la práctica sabemos que esto no sucede. La suposición que existe un único punto de contacto entre el cilindro y el piso no se cumple: en realidad, es una superficie debido a que el cilindro se deforma –muy poco–, pero suficiente para que la condición de rodar sin resbalar no se cumpla en forma estricta. Además, el piso no es perfectamente plano, de manera que en algunos instantes existe –independiente de la deformación ya mencionada– más de un punto en contacto simultáneo, lo que genera un torque que contribuye a disipar la energía inicial con estos choques microscópicos.

Otra característica de esta forma de desplazamiento, es el rango de valores que puede alcanzar la fuerza de roce. Por ejemplo, un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano horizontal, tiene una fuerza de roce que se opone a su movimiento y cuyo *máximo valor* es igual a $F = \mu_{\text{estático}} N$, donde N es la fuerza normal al plano. Debemos recordar que esta fuerza no está determinada por esta ecuación, sino que varía desde cero hasta su valor máximo, ya indicado. Esta fuerza responde de acuerdo a las características del piso. Si es perfectamente plano y horizontal, el valor que toma la fuerza de roce es igual a cero, puesto que el cilindro no desacelera. Pero en caso que surga una leve pendiente, al ser remontada por el cilindro, su peso deja de ser normal al piso, adquiriendo una componente paralela a él, y simultáneamente, aparece una fuerza en sentido opuesto generada por el roce. Esta última no es, necesariamente, igual a la proyección tangencial del peso.



Ejemplo

Un cilindro de radio R y masa m , está empujado por una fuerza F , que actúa a una distancia h del piso, como se indica en la Figura. El coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y el piso es μ . Encuentre el valor de la fuerza de roce f y la aceleración lineal del cilindro.

Usamos las ecuaciones de Newton –incluyendo el torque– para resolver este problema. Sea x , el eje horizontal que se ubica a la altura del centro de masa del cilindro, y θ el ángulo que describe el cilindro al rodar. Las ecuaciones de Newton son:

$$m a = F - f.$$

Tomando torque con respecto al centro de masa y suponiendo que el momento de inercia del cilindro con respecto a este eje es I , tenemos:

$$I \alpha = -F(h - R) - f R.$$

Note que ambas fuerzas: F y f , generan un torque en el mismo sentido.

Si el valor de F permite que el cilindro ruede sin resbalar, entonces se cumple: $R\alpha = a$. Con esta última igualdad, tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: α , a y f . Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

$$a = \frac{F h R}{I + m R^2} = R \alpha, \quad f = F \left[1 - \frac{m h R}{I + m R^2} \right].$$

Resulta interesante analizar los distintos valores que debe tomar f cuando cambiamos el punto de aplicación de la fuerza F . Esto ilustra lo que comentamos en el párrafo anterior: f no es constante, sino que varía dentro de ciertos límites.

Si $h = 0$, entonces estamos aplicando la fuerza en el punto de contacto, así: $f = F$, y el cilindro sólo se moverá si $F > f$. Si $h = R$, $f = F/3$, si incluimos el valor del momento de inercia del cilindro, $I = m R^2/2$. Podemos calcular en qué punto debemos aplicar F , de modo que no exista fuerza de roce, $f = 0$: $h = 3 R/2$.

Si el valor de f es mayor que $\mu_{\text{estático}} m g$, entonces el cilindro resbala y la fuerza de roce es: $f = \mu_{\text{cinético}} m g$. Este valor modifica la aceleración del cilindro:

$$a = \frac{F - \mu m g}{m}, \quad \alpha = \frac{F(h - R) + \mu m g R}{I}.$$

Ejemplo

Un disco con momento de inercia I_1 gira sobre un piso sin roce, con velocidad angular ω , alrededor de un eje vertical sin fricción. Un segundo disco de momento de inercia I_2 , que inicialmente no rota, cae sobre el primero (ver Figura). Como existe roce entre las superficies, pasados unos segundos ambos discos giran con la misma velocidad angular Ω .

- Calcule el valor de Ω .
- Calcule la razón entre la energía cinética de rotación inicial y la final, cuando ambos discos giran unidos.
- Suponga que la fuerza de roce entre ambos discos genera un torque $\tau_o = \text{constante}$: calcule cuánto tardaron los discos en alcanzar la velocidad angular común, Ω .

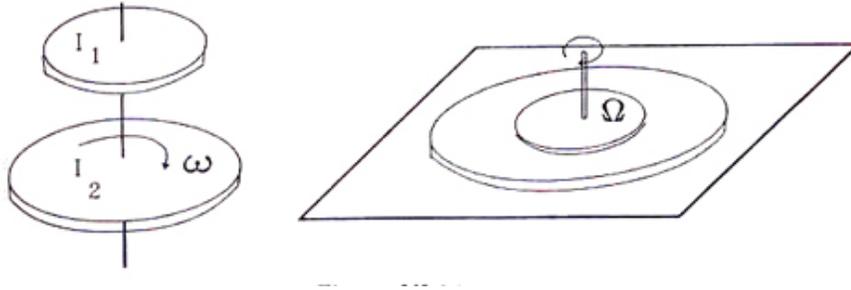


Figura VI.34:

a) Como no hay torques externos sobre los discos, el momento angular se conserva: $L_i = L_f$. El momento angular inicial corresponde exclusivamente al disco I_2 , puesto que es el único que se encuentra girando al comienzo:

$$L_i = L_f \implies I_2 \omega = [I_1 + I_2] \Omega,$$

el momento angular final es la suma de ambos momentos de inercia. De esta ecuación, podemos encontrar el valor de Ω :

$$\Omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \omega.$$

b) La energía cinética de rotación inicial es: $I_2 \omega^2 / 2$ y la final es: $I_2^2 \omega^2 / [2(I_1 + I_2)]$. La razón entre ambas es:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = 1 - \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

la energía cinética inicial que desapareció, fue disipada en forma de calor durante el lapso de tiempo en que los discos alcanzaron una misma velocidad angular.

Note que si $I_1 \gg I_2$, prácticamente toda la energía se disipa, independiente del valor inicial.

c) Sobre el disco I_2 se ejerce un torque τ_o que lo tiende a frenar. Puesto que no hay ningún torque externo, por acción y reacción, el mismo τ_o actúa sobre I_1 , pero en sentido opuesto. La aceleración angular sobre cada uno de los discos es:

$$\alpha_1 = \frac{\tau_o}{I_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau_o}{I_2}.$$

La velocidad angular obedece la ecuación: $\omega_f = \omega_i \pm \alpha t$, como ambos discos deben alcanzar –simultáneamente– la misma velocidad, se tiene:

$$\Omega = \omega - \alpha_2 T = 0 + \alpha_1 T, \implies T = \frac{\omega}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{I_1 I_2 \omega}{\tau_o [I_1 + I_2]}. \square$$

Ejemplo

Un disco de masa M y radio R , está montado en un eje horizontal sin roce cuyo radio es r . Sobre este eje se enrolla un hilo cuyo extremo libre tiene atada una masa m . El conjunto se deja libre, partiendo del reposo (ver Figura). Si después de caer una altura h , el hilo se desprende del cilindro: ¿qué torque debemos aplicar al disco para detenerlo en cinco revoluciones?

Podemos resolver este problema usando el método tradicional de torque y fuerzas, pero es mucho más directo resolverlo utilizando el método de la energía.

Inicialmente sólo existe energía potencial, correspondiente a la masa m que está suspendida a una altura h : $E_i = m g h$. Esta expresión indica que el sistema de coordenadas usado tiene como origen el punto donde la masa m pierde contacto con el cilindro.

La energía total en el instante en que la masa m se desprende, es:

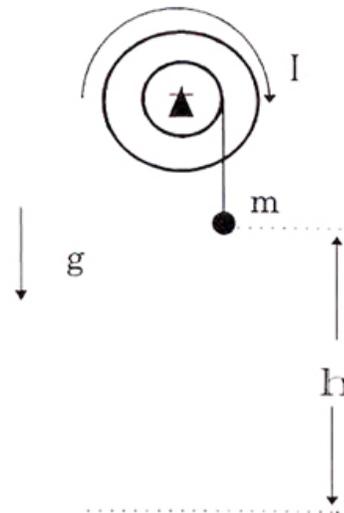
$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

donde I , es el momento de inercia del sistema disco-eje, y ω es su velocidad angular. La relación entre v y ω es: $v = \omega r$.

Igualando estas dos últimas expresiones obtengo el valor de la velocidad angular del disco, ω :

$$\omega^2 = \frac{2 m g h}{m r^2 + I}.$$

Si aplicamos un torque constante τ , la desaceleración del sistema será $\alpha = \tau/I =$ constante. Recordando que la velocidad angular final es nula, entonces: $\omega_i = \alpha T$, con T , el



tiempo que tarda en detenerse el sistema. La expresión para θ , el ángulo recorrido antes de detenerse, es:

$$\theta = \omega_i T - \frac{1}{2} \alpha T^2 = \frac{\omega_i^2}{\alpha} - \frac{\alpha \omega_i^2}{2 \alpha^2} = \frac{\omega_i^2}{2 \alpha} = \frac{2 m g h I}{[m r^2 + I] \tau}. \quad \square$$

Existe una forma más directa de obtener este resultado, que explicaremos a continuación.

La ecuación del trabajo y la energía

Análogamente a la forma cómo calculamos la pérdida de energía debida al roce para el movimiento de traslación, lo hacemos para la rotación.

El trabajo se definió como $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$, con $\Delta \vec{x}$, el desplazamiento del objeto donde actuaba la fuerza F . En el caso de la rotación se verifica que: $\Delta W = \tau \Delta \theta$. Se elimina el producto punto que aparece en su similar, porque estamos estudiando rotaciones con respecto a u. eje fijo en el espacio, de esta forma la dirección del torque siempre coincide con el vector que identifica al ángulo de rotación.

El formalismo para una rotación finita es:

$$\sum_{i=1}^N \tau \Delta \theta = \sum_{i=1}^N I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Delta \theta = \sum_{i=1}^N I \Delta \omega \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N I \Delta \omega \omega = \frac{1}{2} I [\omega_f^2 - \omega_i^2],$$

donde usamos procedimientos similares a los utilizados al introducir el concepto de energía. El resultado final es:

$$\sum_{i=1}^N \tau \Delta \theta = \frac{1}{2} I [\omega_f^2 - \omega_i^2]. \quad (\text{VI.42})$$

Podemos aprovechar la semejanza de estos cálculos con sus equivalentes, desarrollados anteriormente y definir la potencia. En el caso de la traslación, su definición es:

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Para la rotación:

$$\text{Potencia} \equiv P = \tau \omega. \quad (\text{VI.43})$$

Ejemplo

Un cilindro de masa M , radio R y momento de inercia I con respecto a su eje de simetría, rueda sin resbalar desde lo alto de una colina. Si la velocidad del centro de masa del cilindro era V_o , encontrar la velocidad del cilindro después que ha descendido una altura h .

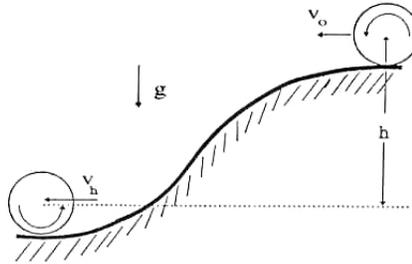


Figura VI.35:

Como no hay pérdida de energía, podemos usar su ley de conservación, incluyendo la energía de rotación:

$$E_i = E_f \implies \frac{1}{2}mV_o^2 + \frac{1}{2}I \left[\frac{V_o}{R} \right]^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_h^2 + \frac{1}{2}I \left[\frac{V_h}{R} \right]^2.$$

En el primer término, no hay que olvidar la energía de rotación del disco. V_h , es la velocidad del disco en el punto inferior. Despejando V_h , obtenemos:

$$V_h^2 = V_o^2 + \frac{2mgh}{m + I/R^2}. \square$$

VI.9. ROTACION EN TORNO A UN PUNTO

Los ejemplos y ejercicios desarrollados en este capítulo corresponden al caso de cuerpo plano girando en torno a un eje perpendicular a este plano o, a un cuerpo en tres dimensiones, si y sólo si, el eje escogido coincide con uno de sus ejes de simetría.

Para un cuerpo en tres dimensiones cuya rotación no se realiza de acuerdo a las especificaciones anteriores, las ecuaciones:

$$\vec{L} = I\omega, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = I\alpha,$$

no son válidas. El momento de inercia en este caso es una matriz y no un número como nosotros lo hemos introducido aquí.

Estos casos son tratados en textos más avanzados.

VI.10. EJERCICIOS

1. – Una barra de masa M y largo $\sqrt{3}R$ descansa sobre un canal de sección circular y de radio R . En un extremo de la barra se ubica una masa puntual $M/2$, como se indica en la Figura. Calcule el ángulo θ que adopta la barra en su posición de equilibrio.
2. – Sobre la polea de la Figura, cuyo momento de inercia es I , se enrolla una cuerda inextensible y sin masa. La polea gira unida a la cuerda, sin resbalar en ningún momento. En cada uno de sus extremos, cuelga un bloque de masa m y M respectivamente, con $M > m$.

Inicialmente la masa M está a una altura H y en reposo. Al soltarla cae y después de chocar con el piso permanece en reposo.

- a) Calcule el tiempo que demora la masa M en tocar el piso.
- b) Calcule hasta que altura alcanza a subir la masa m después que M toca el piso.

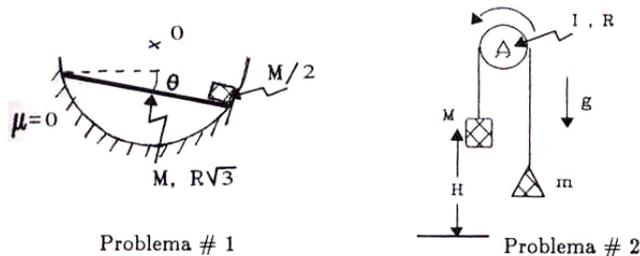


Figura VI.36:

3. – Un péndulo balístico es un aparato que se usa para medir la velocidad de una bala. En la Figura se muestra un esquema simplificado de este péndulo para entender su funcionamiento. Consiste de una masa M que cuelga de una cuerda ideal (sin masa) de largo L .

Contra la masa de este péndulo se dispara una bala con velocidad V_0 y masa m que se incrusta en el péndulo. Si M estaba inicialmente en reposo y ambas masas terminan moviéndose juntas después del choque:

¿Cuál es el ángulo máximo, θ_{Max} , que alcanza el péndulo debido al choque? Exprese el resultado en función de los datos del problema, incluyendo g y V_0 , de esta manera puede posteriormente determinar V_0 en función del ángulo de desviación.

4. – Cuando un cuerpo cuelga de un punto y se encuentra en reposo, cualquiera sea su forma, *siempre* su centro de masa se ubica en la vertical que pasa por dicho punto.

Las dos barras de largo $2L$ y 2ℓ , cuyas masas son M y m respectivamente, están soldadas en B formando un ángulo de 90° .

- a) Calcule la posición del Centro de Masa del sistema de las dos barras.
 b) Calcule el ángulo α que hace la barra $2L$ con la vertical en la posición de equilibrio.
 c) Estudie su respuesta con los siguientes casos particulares:
 i) $m = 0$, ii) $M = 0$ iii) $\ell = L$, con $m = M$.

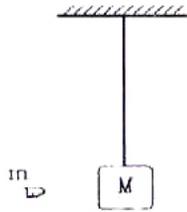
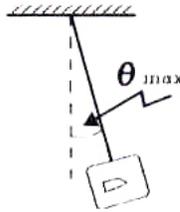
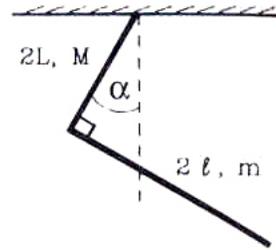


Figura VI.37:



Problema # 3



Problema # 4

5. – Pedro y Pablo Diet desean saber cuánto pesan, pero no disponen de una buena balanza. Para hacerlo idearon el siguiente método: se dirigieron a la plaza y se ubicaron en los extremos del balancín. Si Pablo se ubica a una distancia l_1 del apoyo del balancín y Pedro a una distancia l_2 , el balancín queda en equilibrio (ver Figura). Enseguida, Pedro toma una piedra de P kg. y se ubica a una distancia l_3 del centro de giro, mientras que Pablo lo hace a una distancia l_4 , quedando el sistema en equilibrio. Considere $l_4 > l_3$.

Obtenga una expresión para los pesos de Pedro y Pablo en función de los datos del problema.

6. – Calcular la tensión sobre la cuerda AB, si la barra OC tiene masa despreciable y el pivote en O no tiene roce.
 7. – Un letrero luminoso, cuya masa tiene un valor M , cuelga en forma horizontal, sostenido mediante una cuerda y una barra, como se muestra en la Figura.

Calcule la tensión en la cuerda DC y las reacciones en la rótula de apoyo A.

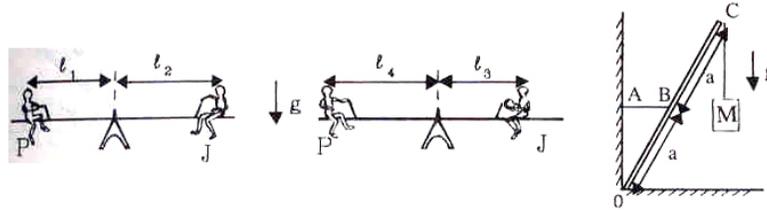


Figura VI.38:

Problema # 5

Problema # 6

8. – Un aro de madera circular delgado de masa m , radio R , se encuentra en un plano horizontal sin roce, en reposo. Una bola, también de masa m , se mueve con velocidad horizontal v , choca al aro y se incrusta en él como lo indica la Figura. Calcular la velocidad del centro de masa, el momento angular del sistema con respecto al CM , la velocidad angular ω del aro y la energía cinética del sistema, antes y después de la colisión.

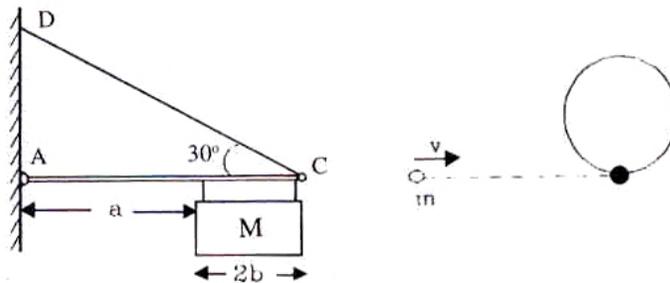


Figura VI.39:

Problema # 7

Problema # 8

9. – Los cuatro puntos de la Figura, cuyas masas son iguales a m , se ubican en los vértices de un rectángulo de lados ℓ y 2ℓ , que descansa sobre una superficie horizontal sin roce. Los puntos están conectados por barras rígidas de masa despreciable. Otra masa puntual, M , se acerca en la dirección del eje x con una velocidad V_0 , choca con la masa ubicada en ese vértice y permanece adherida a ella después del choque.
- Encuentre la posición del centro de masa del rectángulo. No considere, en esta pregunta, la masa que colisiona.
 - Calcule el valor de la velocidad del centro de masa del sistema total, incluyendo todas las partículas.
 - Describa el movimiento del sistema después del choque.

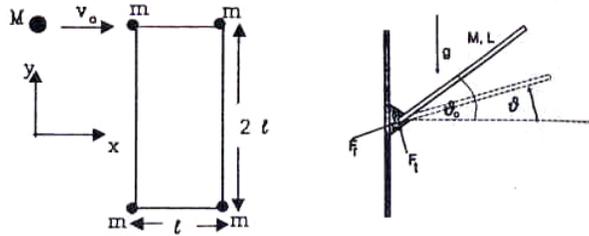


Figura VI.40:

Problema # 9

Problema # 10

10. – Una barra de largo L y masa M , puede girar libremente en torno a una bisagra empotrada en la pared (ver Figura). La barra está inicialmente en reposo y forma un ángulo θ_0 con la pared. En $t = 0$, la barra se suelta. Calcule la componente perpendicular a la barra de la fuerza que ejerce la bisagra sobre la barra, cuando el ángulo entre la barra y la vertical es θ . El momento de inercia de la barra con respecto al centro de masa es $I = M L^2/12$.
11. – Un panel rígido delgado de masa M , ancho w y longitud l , está suspendido verticalmente desde un eje horizontal, sin roce, en su lado superior. Una bala de masa m , con velocidad V perpendicular al panel, se aloja en su centro.
- a) ¿Cuál es la velocidad de la bala justo después del impacto?
- b) ¿Cuál es el valor del ángulo de giro, θ , que experimenta el panel?

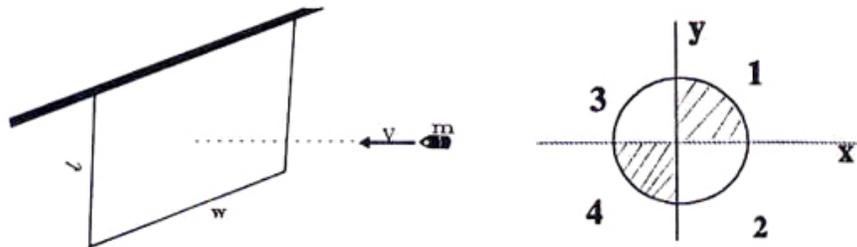


Figura VI.41:

Problema # 11

Problema # 13

12. – Un hombre se encuentra de pie en el *centro* de una plataforma giratoria con sus brazos extendidos horizontalmente y con una masa de 5 kg en cada mano. Se le pone en rotación alrededor de un eje vertical, con una velocidad angular de una vuelta cada dos segundos. Calcular su nueva velocidad angular si deja caer

sus manos a ambos lados del cuerpo. El momento de inercia del hombre puede suponerse constante e igual a $5,9 \text{ kg m}^2$. La distancia primitiva de los pesos al eje es de 90 cm y su distancia final 15 cm.

13. – Un cilindro sólido tiene una densidad que varía por cuadrantes, como se indica en la Figura. Los números que allí aparecen reflejan los valores relativos de las densidades en los cuadrantes. Encuentre la ecuación de la recta que cruza el origen y el *CM* simultáneamente. Tome como referencia el eje *x* e *y*, de la Figura.

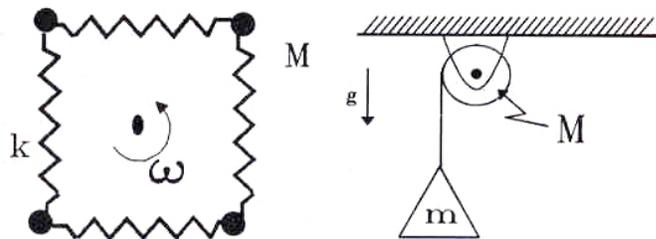


Figura VI.42:

Problema # 14

Problema # 15

14. – Cuatro masas M , ubicadas en un mismo plano y sometidas únicamente a la fuerza externa provocada por los resortes de constante K , largo natural L y masa despreciable. Los resortes están girando con velocidad angular W en torno a un eje perpendicular al plano a través de su centro de simetría. Suponiendo que el sistema se mantiene en equilibrio. ¿Cuánto se extienden los resortes?
15. – Una masa m está colgada de una cuerda alrededor de un cilindro sólido circular de masa M y radio R , pivoteado sin roce como se muestra en la Figura. Encontrar la aceleración de m .
16. – Un cascarón esférico de radio externo R , y radio interno r , tiene una masa por unidad de volumen, ρ , constante. Expresa el momento de inercia I de este cascarón, con respecto a un eje que pasa a través del centro, en términos de r , ρ , R y la masa total M .
17. – Una esfera uniforme y sólida, se ubica en reposo sobre un plano inclinado en un ángulo θ . ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de roce estático, μ_0 , entre la esfera y el plano inclinado, para que ruede sin resbalar?
18. – Un yo-yo está formado por dos discos uniformes cada uno de masa M y radio R . Uniendo estos discos hay un eje de radio r y masa despreciable.

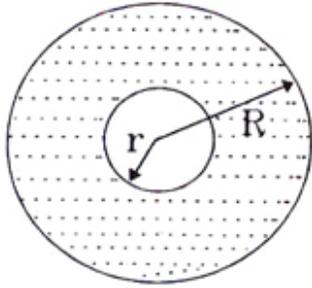
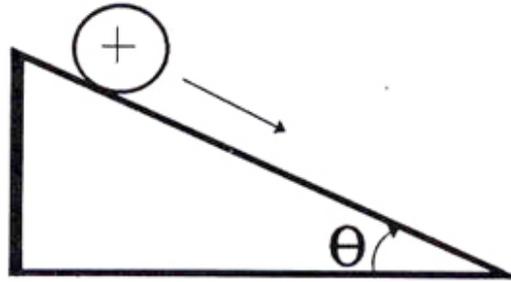


Figura VI.43:



Problema # 16

Problema # 17

Un hilo se enrolla en torno a este eje y su extremo se sostiene desde una cierta altura. En un instante, el yo-yo se deja caer, partiendo del reposo. Inicialmente se encuentra a una distancia D , del extremo superior del hilo.

a) Si no hay movimiento pendular, ¿qué ángulo forma el hilo con la vertical cuando se suelta el yo-yo?

b) ¿Cuál es la aceleración del centro del carrete?

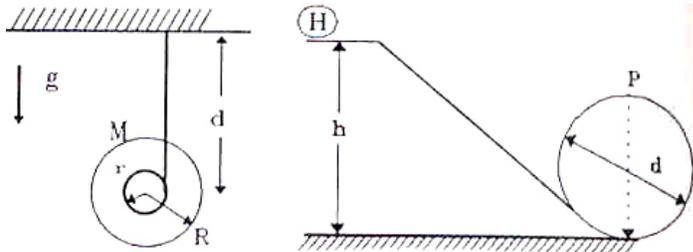


Figura VI.44:

Problema # 18

Problema # 19

19. – El aro H de radio r rueda sin resbalar por el plano inclinado. La altura de partida h , es tal que el aro adquiere una velocidad suficiente para mantenerse en contacto con el riel circular hasta el punto P .

¿Cuál es el valor de la altura h ?

20. – Al presionar una bolita sobre una mesa horizontal, sale proyectada a lo largo de la mesa con velocidad inicial v_0 , y velocidad angular w_0 , siendo el eje de rotación horizontal y perpendicular a v_0 . La bolita tiene radio R , y su coeficiente de fricción con la mesa es constante.

- a) ¿Qué relaciones deben existir entre v_0 , R y w_0 para que la bolita se detenga?
- b) Relacione v_0 , R y w_0 para que la bolita resbale, se detenga y vuelva a su posición inicial con velocidad $V = \frac{3}{7} v_0$

21. – Un disco circular uniforme de radio R y masa M , puede girar libremente con velocidad angular ω , en un plano horizontal alrededor de P . Fijas al borde del disco se mantienen dos masas m , unidas –cada una– por una cuerda de largo ℓ . En cierto instante, se rompe la traba que las mantenía fijas, sin afectar – en este proceso– el momento angular del sistema. Las masas se extienden y las cuerdas que las sostienen son liberadas de sus ganchos H y H' , cuando éstas alcanzan a extenderse radialmente hacia afuera. Encontrar ℓ , la longitud de estas cuerdas, tal que el disco sea detenido por esta acción.

Nota: Este esquema ha sido usado para reducir el movimiento de giro de algunos satélites.

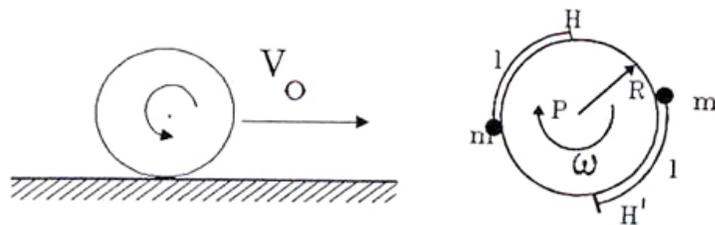


Figura VI.45:

Problema # 20

Problema # 21

- 22. – Dos cilindros indistinguibles entre sí ruedan sin deslizar sobre un plano inclinado. Uno de ellos llega al extremo del plano *antes* que el otro. Si ambos tienen la misma masa y radio externo, ¿qué conclusión puede sacar Ud. acerca de la estructura de estos cilindros?
- 23. – Dos partículas cuyas masas son $\frac{3}{4}M$ y M respectivamente, están conectadas por un resorte de masa despreciable, largo natural L y constante k . Estas partículas se encuentran inicialmente en reposo, a una distancia L sobre una mesa horizontal sin roce. Un objeto cuya masa es $M/4$, se mueve con rapidez v a lo largo de la línea que define el resorte, choca y se adhiere a la partícula de $3M/4$. Encontrar la amplitud y el período con el cual vibra el sistema después del choque.
- 24. – El sistema de la Figura, consiste de dos masas que se mantienen separadas una distancia $a + \ell$, donde ℓ , es el largo natural del resorte que las une. No existe roce entre las masas y el piso. Repentinamente son abandonadas desde el reposo.

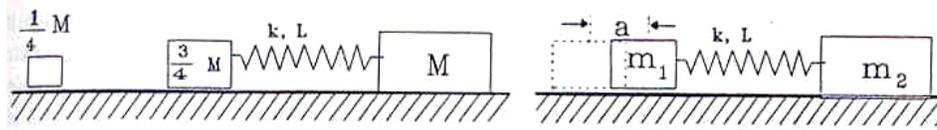


Figura VI.46:

Problema # 23**Problema # 24**

- a) Encontrar los períodos de oscilación de m_1 y m_2 .
- b) Comparar el período con el de un oscilador de masa simple.
- c) Encuentre la energía de oscilación del sistema.
- d) ¿Cómo se reparte esta energía entre m_1 y m_2 ?
25. – Una barra de largo ℓ y masa m , cuelga verticalmente de un soporte, sin roce, que le permite girar completamente en torno a él.

Por la izquierda se aproxima una masa m que impacta horizontalmente en el extremo de la barra, con velocidad V_o . Inmediatamente después del impacto la masa queda pegada a la barra y comienza a moverse con ella.

- a) Calcule la velocidad angular del conjunto barra-masa inmediatamente después del impacto.
- b) ¿Qué valor debe tomar V_o para que el sistema barra-masa pueda alcanzar la posición vertical superior con una velocidad angular nula?

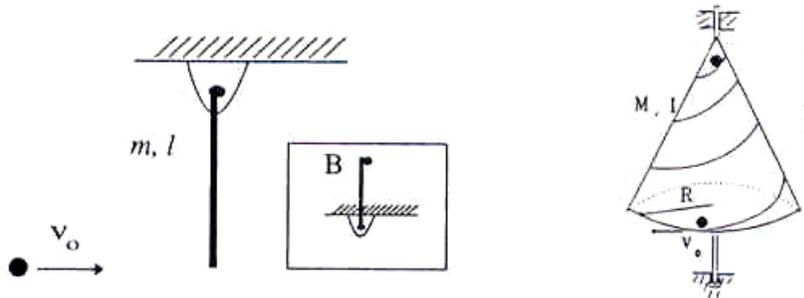


Figura VI.47:

Problema # 25**Problema # 26**

26. – Un cono de masa M , radio basal R , altura h puede girar libremente y sin roce alrededor de su eje de simetría. El momento de inercia con respecto a este eje es I . Una partícula puntual de masa m , parte del reposo desde su vértice y se desliza por un tubo *sin fricción*, que envuelve el manto del cono y emerge *horizontalmente*,

en forma tangente al círculo de su base. Inicialmente el *cono y la partícula se encuentran en reposo*. Encontrar la velocidad angular del cono ω y la velocidad V_o de la partícula con respecto al piso, justo después que ésta sale por la base. Recuerde que la velocidad V_o es paralela al piso en el momento de la salida.

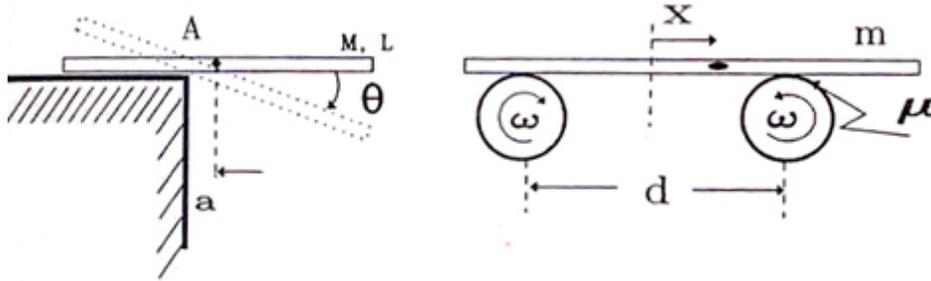


Figura VI.48:

Problema # 27

Problema # 28

27. – Una barra recta, uniforme y homogénea de masa M , y longitud L , se encuentra perpendicular al borde de una mesa. Su centro de masa se ubica fuera de la mesa, a una distancia a , como se muestra en la Figura. La barra se suelta desde el reposo en una posición horizontal y *comienza a girar teniendo como centro, el borde de la mesa*. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y la mesa es μ , encontrar el valor del ángulo θ que forma la barra con la horizontal en el instante que ésta *comienza a deslizar* por el borde.

Nota: para encontrar el ángulo θ opere de la siguiente manera:

- a) Suponga que la barra comienza a deslizar cuando el ángulo alcanza un valor igual a θ . Escriba la conservación de la energía para dos instantes: cuando la barra adopta el ángulo θ y al comenzar a caer. (Esto genera una ecuación).
- b) En la posición de la Figura, escriba las ecuaciones de Newton y el torque con respecto al punto A , para el centro de masa de la barra, esto nos suma tres ecuaciones adicionales.

No olvide incluir la aceleración angular *tangencial y centrípeta* en las ecuaciones de Newton. Recuerde que la aceleración angular α y la aceleración del centro de masa están relacionadas (una ecuación adicional).

- c) De estas 5 ecuaciones puede despejar θ . Encuentre que el ángulo θ es:

$$\tan \theta = \frac{\mu \ell^2}{\ell^2 + 36 a^2}.$$

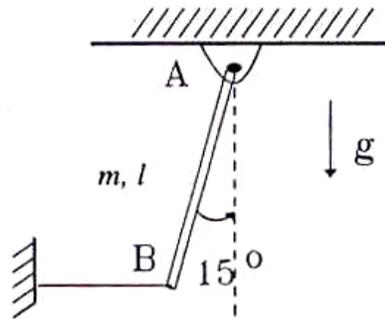


Figura VI.49: Problema # 29

28. – La Figura muestra un tablón uniforme de masa m deslizando horizontalmente sobre dos rodillos que giran en sentidos opuestos y con velocidad angular constante ω . La distancia entre ejes es d y el coeficiente de roce cinético es μ .
- En la posición de la Figura, con su centro de masa desplazado una distancia x , calcule las reacciones del cilindro sobre el tablón. El origen de la coordenada x es el punto medio de la distancia entre ejes.
 - Demuestre que el tablón describe un movimiento armónico simple. Determine el valor de ω .
 - Si en el instante que el centro de masa del tablón pasa por $x = 0$ tiene una velocidad V_0 , encuentre el valor de la amplitud de esta oscilación.
29. – Una barra uniforme de masa m y largo ℓ , puede girar libremente en torno al extremo A. Inicialmente la barra está en equilibrio sostenida por una cuerda unida a su otro extremo B, formando un ángulo $\theta = 15^\circ$ con la vertical.
- Calcule la tensión de la cuerda horizontal que sostiene la barra.
 - Si en $t = 0$ se corta la cuerda, calcule el tiempo que demora la barra en retornar por primera vez a su posición inicial. Suponga que el movimiento es armónico simple.
 - Calcule la velocidad del extremo B en cualquier instante t .