

# Oscilador armónico, energía y choques

**Introducción a la Mecánica**  
Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Chile

V

# Índice general

<b>V. OSCILADOR ARMONICO, ENERGIA Y CHOQUES</b>	<b>197</b>
V.1. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE . . . . .	198
V.1.1. Experimento . . . . .	198
V.2. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE . . . . .	201
V.2.1. Condiciones iniciales . . . . .	204
V.2.2. Oscilaciones pequeñas. Péndulo simple . . . . .	208
V.3. TRABAJO . . . . .	212
V.3.1. Cálculo del trabajo realizado por un resorte . . . . .	215
V.4. ENERGIA . . . . .	218
V.4.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico . . . . .	224
V.5. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE . . . . .	226
V.6. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL . . . . .	229
V.7. PENDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL . . . . .	234
V.8. MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO . . . . .	235
V.9. MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO . . . . .	237
V.10. CHOQUES . . . . .	238
V.10.1. Choques elásticos . . . . .	238
V.10.2. Choque inelástico . . . . .	241
V.10.3. Choques en dos dimensiones . . . . .	244
V.10.4. Fuerzas impulsivas . . . . .	246
V.11. EJERCICIOS . . . . .	247

## Capítulo V

# OSCILADOR ARMÓNICO, ENERGÍA Y CHOQUES

En esta sección estudiaremos el movimiento generado al elongar (o comprimir) un resorte con una masa en su extremo. La solución obtenida aquí está íntimamente ligada al movimiento circunferencial uniforme. Genera, además, el mismo tipo de ecuaciones que rige el movimiento de un péndulo, caso que también examinaremos en detalle en este capítulo.

Otro aspecto que abordaremos es lo que se denomina trabajo. Esencialmente consiste en integrar las ecuaciones de movimiento de Newton y obtener una expresión algebraica más sencilla que, en general, involucra sólo la velocidad y la posición del cuerpo. Para algunos tipos de fuerza, incluida la fuerza de restitución de un resorte, este procedimiento genera una cantidad que se conserva a lo largo de la trayectoria del punto. A esta expresión se le denomina *energía*.

Usando estos métodos es posible obtener información acerca de problemas más complicados, como por ejemplo las oscilaciones (no necesariamente pequeñas) de un péndulo.

Finalmente, se incluye el caso de choques entre partículas, como una aplicación directa de las leyes de Newton.

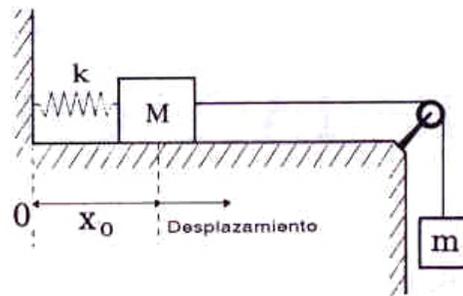
Al final del capítulo se propone una serie de ejercicios cuya solución requiere, en muchos casos, de la aplicación simultánea de los conceptos mencionados en esta introducción.

## V.1. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE

### V.1.1. Experimento

Para encontrar el comportamiento de un resorte sometido a una fuerza, realizamos el siguiente experimento: *lentamente* colgamos de un extremo masas de 1 kg, en la forma que se indica en la Figura. Simultáneamente procedemos a tabular el alargamiento que experimenta el resorte y la fuerza que lo provoca. Al graficar los resultados se obtiene la ley de fuerza que gobierna el comportamiento de un resorte.

$F = T$	Desplazamiento
1 N.	. 31 mm.
2 N.	. 64 mm.
3 N.	. 89 mm.
.	.
.	.



Después de realizar numerosos experimentos se llega a la siguiente conclusión: *El desplazamiento del extremo de un resorte, medido a partir de su largo natural  $x_0$ , es proporcional a la fuerza aplicada.*

El largo natural del resorte, denominado  $x_0$ , es la longitud que adquiere cuando no existe ninguna fuerza externa aplicada sobre él.

Esta es una *ley empírica*: proviene de la experimentación y no representa un conocimiento más profundo de los mecanismos que utiliza el resorte para reaccionar de esta forma a la acción de una fuerza.

En la Figura se grafica la fuerza aplicada *versus* el desplazamiento. El resorte se opone con una fuerza de igual magnitud y dirección pero en **sentido opuesto**. La ley de fuerzas para el resorte es:

$$F = -k(x - x_0). \quad (\text{V.1})$$

Esta es la *ley de Hooke*.

Robert Hooke (1635–1703) fue contemporáneo de Newton y un hombre que destacó en diferentes áreas: construyó una bomba de vacío que permitió a Boyle encontrar la ley de los gases ideales que lleva su nombre, construyó un microscopio con el cual observó el corcho y otros tejidos de plantas y notó que estaban constituidos por pequeñas cavidades separadas por paredes que denominó *celdas*. Esta es una de las primeras menciones de lo

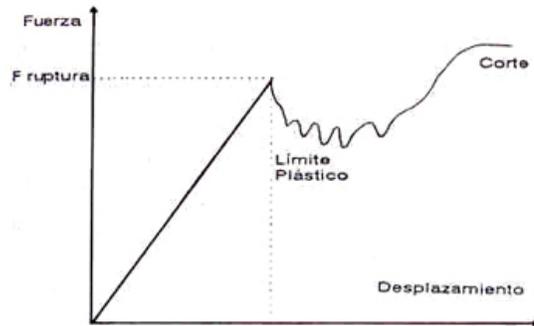


Figura V.1: En la abcisa del sistema de coordenadas se anota el desplazamiento del extremo del resorte y en la ordenada la fuerza aplicada. Después de experimentar con distintas magnitudes de fuerza, se observa que existe una zona donde una línea recta representa la tendencia de los puntos tabulados.

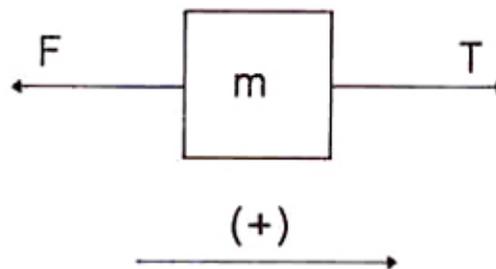
que posteriormente se conoce como *célula*. Fue uno de los críticos de la teoría corpuscular de la luz, elaborada por Newton y publicada en su libro de óptica.

El punto de quiebre de la línea se denomina el *límite elástico* y marca el inicio del comportamiento plástico del resorte: aquella región donde la deformación experimentada por el resorte se transforma en deformación permanente. El resorte no recupera su largo inicial.

La fuerza se debe aplicar lentamente de forma que la masa  $m$  no adquiera velocidad. Si la velocidad no es despreciable, el análisis del problema debe incluirla. Esta última situación será estudiada posteriormente.

Escribimos las ecuaciones de Newton asociadas a la masa  $m$ , tomando el extremo del resorte como origen del sistema de coordenadas.

Hemos supuesto que la masa del resorte es despreciable comparada con la masa que colgamos de su extremo. El diagrama de cuerpo libre para la masa en el extremo del resorte se indica en la Figura. En la dirección horizontal tenemos:



$$-F + T = m a,$$

donde  $T$  representa la fuerza que opone el resorte al intentar ser elongado y  $F$  es la fuerza externa, proveniente –en este caso–, de las masas que se han colgado desde el

extremo.

Si las masas se cuelgan cuidadosamente, la aceleración es nula,  $a = 0$ , entonces  $T = F$  en cada instante. Al estudiar la tabla de valores obtenida experimentalmente, podemos relacionar la fuerza aplicada con la deformación del resorte. El resultado es una relación lineal entre la fuerza y la deformación, válida dentro de un cierto rango de valores para la fuerza, denominado el rango de linealidad del resorte:

$$F = -kx. \quad (\text{V.2})$$

La constante  $k$ , mide la rigidez del resorte. Un resorte muy rígido tiene asociado un valor de  $k$  alto; en este caso debemos aplicar una fuerza de magnitud apreciable para poder estirar el resorte una distancia pequeña. El caso opuesto, un valor de  $k$  muy pequeño representa un resorte muy débil sobre el cual una fuerza pequeña producirá una deformación apreciable.

Las dimensiones de  $k$  son:

$$[k] = \frac{[\text{newton}]}{[m]}.$$

### Ejemplo

Dados dos resortes idénticos, de rigidez  $k$ , calcular la deformación que experimentan al colgar una masa  $m$ , en los dos casos siguientes: cuando los resortes se conectan en serie, y en paralelo.

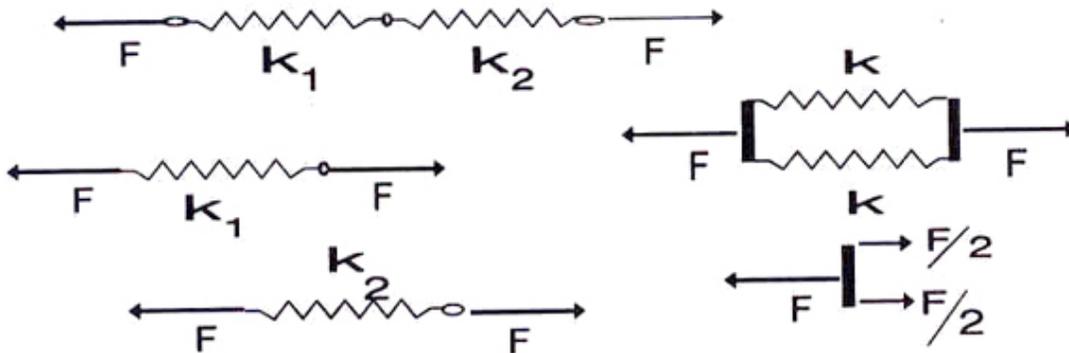


Figura V.2: A la derecha se representa a los dos resortes conectados en paralelo y a la izquierda aparecen conectados en serie. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de las configuraciones.

a) Resortes en serie.

Para obtener un resultado más interesante supongamos que la constante de rigidez de

cada resorte es diferente. Al conectar los dos resortes en serie obtenemos otro resorte, cuya rigidez la definimos como  $K$  y cuya expresión debemos encontrar a continuación.

Al aplicar una fuerza  $F$  (con  $F = mg$ ) en los extremos del sistema de dos resortes, en la unión de cada resorte actúa la misma fuerza  $F$  en la dirección y sentido que se indica en la Figura. Debido al efecto de esta fuerza cada uno de los resortes se elonga una distancia  $F/k_1$  y  $F/k_2$ . Como la elongación de cada uno de los resortes se debe sumar debido a la forma en que están conectados, el resorte compuesto se estira:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \equiv \frac{F}{K} \Rightarrow \frac{1}{K} = \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right].$$

Conociendo el valor de la constante  $K$  para esta configuración, podemos estudiar el caso particular en que ambos resortes tienen la misma rigidez:

$$\frac{1}{K} = \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right], \text{ si ambos resortes son iguales } \frac{1}{K} = \frac{2}{k} \implies K = \frac{k}{2}. \quad (\text{V.3})$$

b) Resortes en paralelo.

En este caso suponemos de un comienzo que ambos resortes son idénticos. Como están en paralelo, cada uno soporta la mitad del peso de la masa  $m$ , es decir, una fuerza  $F/2$ . Cada uno de los resortes se elonga  $F/(2k)$  y, de acuerdo a la forma como están conectados los resortes, el sistema se elonga  $F/(2k)$ , de modo que el resorte equivalente tiene una constante de rigidez:

$$K = 2k, \quad \text{para resortes en paralelo.} \quad (\text{V.4})$$

En resumen, si tenemos dos resortes y queremos armar un resorte más duro, debemos conectarlo en paralelo. Ahora, si lo deseamos más blando, debemos conectarlo en serie.  $\square$

### Ejercicio

Encuentre el valor de la rigidez equivalente  $K_n$  que tienen  $n$  resortes idénticos al ser conectados: a) todos en paralelo y b) todos en serie.  $\square$

## V.2. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

En la sección anterior estudiamos el caso estático. Analicemos ahora la situación dinámica, supongamos que repentinamente cortamos la cuerda que une la masa con el platillo en la Figura [V.1], entonces la fuerza externa desaparece instantáneamente,  $F = 0$ . En este caso, la segunda ley de Newton afirma que:

$$m a = -k x, \quad (\text{V.5})$$

donde  $a \equiv$  aceleración de la masa  $m$  a lo largo del eje  $x$ .

Aquí hemos supuesto que la ley de fuerzas encontrada para el caso estático se aplica –sin cambios–, al movimiento acelerado. La validez de esta suposición debe ser ratificada por los experimentos: dentro de cierto rango de valores, el comportamiento de los resortes debe ajustarse a esta ley.

De esta forma estamos en condiciones de poner a prueba las ecuaciones de Newton y el resultado empírico acerca de la ley de fuerzas del resorte. Solamente debemos ser capaces de resolver la ecuación de movimiento planteada [V.5]. Esta ecuación nos permite conocer la posición del resorte,  $x(t)$ , en cada instante. Al comparar el valor de  $x(t)$  obtenido a través de las ecuaciones [V.5], con la trayectoria que describe una masa  $m$  oscilando del extremo de un resorte en el laboratorio, podemos concluir que las ecuaciones planteadas [V.5], constituyen un modelo razonablemente cercano a lo que es un oscilador en la realidad.

Hay un factor que no se considera en esta sección y que efectivamente se observa en el laboratorio: el amortiguamiento de la oscilación. Este aspecto se tratará posteriormente, por ser más complejo.

Volviendo a la ecuación [V.5], vemos que es una ecuación diferencial y que no estamos capacitados (a menos que conozcamos el cálculo diferencial) para resolverla. Afortunadamente, ya hemos visto este tipo de ecuaciones al estudiar el movimiento circular uniforme, y podemos encontrar su solución haciendo una analogía con este movimiento.

A continuación mostraremos que basta entender la cinemática del movimiento circular uniforme para resolver la ecuación [V.5].

Empecemos recordando la expresión para la aceleración de una partícula que describe una circunferencia con una rapidez uniforme (Capítulo III):

$$\vec{a} = -\omega^2 r [\cos \omega t, \text{sen } \omega t] = -\omega^2 \vec{x}. \quad (\text{V.6})$$

Al tomar la componente  $x$  de este vector, obtenemos:

$$a_x = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad (\text{V.7})$$

se puede apreciar que es el mismo tipo de ecuación que aparece en el caso del resorte, si identificamos  $\omega^2$  con  $k/m$ .

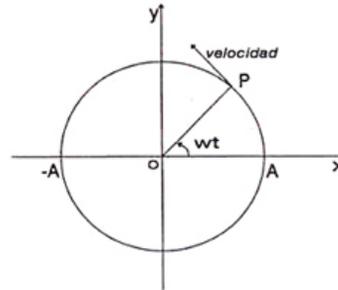
En palabras, esta ecuación nos dice que en cada instante el valor de la aceleración debe ser proporcional a la posición de la partícula. El factor de proporcionalidad es  $-\omega^2$ .

Si ambas ecuaciones, la obtenida al estudiar el movimiento armónico simple y aquélla que gobierna el movimiento de una masa unida a un resorte, son iguales, entonces tienen la *misma solución*. Una de las soluciones de la ecuación [V.5], es:

$$x(t) = A \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} t \right], \quad (\text{V.8})$$

con  $A = \text{Constante}$ .

Como estamos resolviendo un problema físico, cada una de las cantidades que aparecen en la ecuación debe tener un significado concreto. En el caso de la constante  $A$ , representa la amplitud de la oscilación.



Por ejemplo, analizando en detalle la solución [V.8] concluimos que corresponde a un resorte cuya elongación en  $t = 0$  es  $x(t = 0) = A$ . La velocidad en ese mismo instante es nula, como se puede verificar al derivar una vez esta solución. También se puede llegar a esta conclusión al inspeccionar la última Figura, donde se representa un movimiento circular uniforme. Allí se advierte que la velocidad es tangente a la circunferencia y en ese punto –donde  $t = 0$ – no tiene componente en el eje  $x$ . De hecho es perpendicular a él.

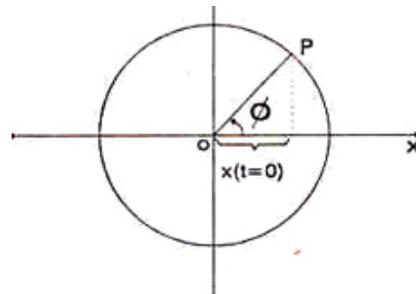
Si estiramos un resorte de forma que  $x = A$  y en un instante arbitrario, que designamos como  $t = 0$ , se deja ir, el resorte oscila en torno al punto de equilibrio con una frecuencia  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Gráficamente se puede ver en la Figura, como la proyección del punto  $P$  sobre el eje  $x$ , oscila entre  $-A$  y  $+A$ , a medida que el punto  $P$  da vueltas a la circunferencia. (El ángulo que describe el vector que apunta hacia  $P$  es lo que se denomina la *fase* de dicho movimiento).

Sin embargo, ésta no es la situación más general. Puede ocurrir que al momento de empezar el movimiento, el punto  $P$  que representa a la posición inicial de la partícula en la Figura, no se ubique en el eje  $x$  sino que forme un ángulo  $\phi$  con la horizontal, tal como se aprecia en la Figura.

En este caso debemos sumar el ángulo  $\phi$  a  $(\omega t)$  y la solución es:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (\text{V.9})$$

con  $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$ .



Esta última ecuación es la solución más general de la ecuación

[V.5]. Todos los posibles casos que pueden ocurrir con un oscilador armónico se acomodan a esta expresión.

### V.2.1. Condiciones iniciales

El problema del movimiento de una masa  $m$  atada a un resorte de constante  $k$ , masa nula y sin fricción, ya está resuelto. Su solución es la ecuación [V.9]. Para usar esta expresión en cada uno de los casos particulares planteados en un ejercicio, debemos determinar los valores de las constantes  $A$  y  $\phi$ , que aparecen en la ecuación [V.9]. Estas dos constantes contienen la información acerca de la velocidad y la deformación del oscilador en el instante inicial.

La constante  $\omega$  distingue un oscilador armónico de otro.

Para determinar  $A$  y  $\phi$  debemos conocer las condiciones bajo las cuales se originó la oscilación, éstas se denominan las *condiciones iniciales* del problema.

*Un problema está bien planteado* si a partir de los datos que nos entregan se puede determinar, sin ambigüedades,  $A$  y  $\phi$ .

#### Ejemplo

En el instante inicial,  $t = 0$ , el extremo de un resorte se encuentra en su punto de equilibrio ( $x = 0$ ), con una velocidad ( $-V_0$ ). Encontrar el valor de  $A$  y  $\phi$  en este caso.

Estos son los datos típicos que se proporcionan para resolver un problema de oscilaciones.

En la solución general [V.9], se debe ajustar los valores de  $A$  y  $\phi$  para satisfacer estas condiciones iniciales:

$$x(t = 0) = 0 = A \cos \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2},$$

( $A \neq 0$ , puesto que si  $A = 0$ , no existe oscilación). Reemplazando en la ecuación general [V.9], tenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \pi/2) = -A \sin(\omega t).$$

La velocidad se encuentra sumándole ( $\pi/2$ ) al ángulo correspondiente al vector posición y multiplicando la amplitud por  $\omega$ . (Recordemos que, en todo instante,  $\vec{V}$  es perpendicular al vector posición).

$$V(t) = -A \omega \sin[\omega t + \pi/2] = -A \omega \cos[\omega t].$$

Hemos usado las propiedades del seno y del coseno. (Ver Apéndice Matemático para mayores detalles).

Aplicamos ahora la condición inicial a la expresión de la velocidad. Se obtiene:

$$t = 0, \quad V(t = 0) = -V_0 = -A \omega \Rightarrow A = \frac{V_0}{\omega}.$$

Así, en este caso, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$x(t) = \left(\frac{V_0}{\omega}\right) \cos(\omega t + \pi/2). \quad (\text{V.10})$$

Las dimensiones de  $V_0/\omega$  son,

$$\left[\frac{V_0}{\omega}\right] = \frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{\left[\frac{1}{T}\right]} = L. \quad (\text{V.11})$$

### Nota

Conviene destacar que el *movimiento armónico simple*, este es el nombre que recibe el movimiento que hemos estudiado, es fundamental en el funcionamiento de los relojes mecánicos porque  $\omega$ , la velocidad angular, está determinada por la constante  $k$  del resorte y la masa  $m$ . Conocidos estos valores, la frecuencia queda *fija*, sin depender de la forma cómo se inicia esta oscilación.

Ya sabemos resolver el problema de la oscilación de un sistema masa resorte en ausencia de fricción. El procedimiento consiste en determinar las constantes  $A$  y  $\phi$ , a partir de las *condiciones iniciales* del problema. Como es una operación que se repite una y otra vez, conviene ilustrarla con distintos casos.

### Ejemplo

Aplicamos una fuerza sobre un resorte de modo que se alargue  $X_0$  metros, medidos a partir de su largo natural. Repentinamente lo soltamos. ¿Qué valor toman las constantes  $A$  y  $\phi$  en este caso?

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} \text{En } t = 0 : \quad x = X_0 &= A \cos \phi, \\ v = 0 &= -A \omega \sin \phi. \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones  $A$  y  $\phi$  quedan determinadas y podemos conocer la posición y la velocidad en cualquier instante posterior.

Si le hubiésemos dado un impulso (un golpe corto) justo cuando estaba en reposo, entonces las condiciones iniciales serían:

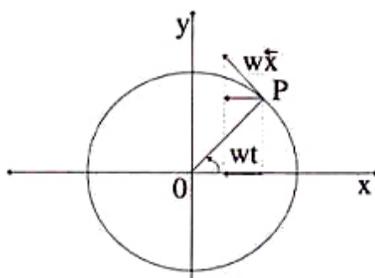


Figura V.3: La velocidad se puede obtener geoméricamente de la Figura. Es tangente a la circunferencia y su magnitud está dada por el producto del radio por la velocidad angular. La velocidad de la masa unida al extremo del resorte se obtiene proyectando  $w r$  sobre el eje  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{En } t = 0 : \quad x(t = 0) = 0 &= A \cos \phi \Rightarrow \phi = \pi/2, \\ v(t = 0) = v_0 &= -A \omega \sin \phi \Rightarrow A = -v_0/\omega. \end{aligned}$$

Un impulso corresponde físicamente a un cambio repentino en el valor de la velocidad, sin afectar –en ese instante– a la posición, la cual permanece inalterada.

Sabemos que  $v(t)$  es la derivada de  $x(t)$  con respecto al tiempo. Pero también se puede pensar (de acuerdo a la Figura [V.3]), en una rotación en  $\pi/2$  radianes con respecto al vector  $\vec{x}(t)$  y además multiplicar el largo (módulo) del vector  $\vec{x}(t)$  por  $\omega$ .

Esta operación nos permite obtener gráficamente la velocidad en cualquier instante.

### Ejercicio

Se tiene una masa unida a un resorte de constante  $k$ , que oscila sobre una mesa sin roce. Demuestre que si la posición en el instante  $t = 0$  es  $x_0$ , y su velocidad es  $v_0$  en el mismo instante, entonces las constantes  $A$  y  $\phi$ , toman los siguientes valores:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad \square \quad (\text{V.12})$$

### Ejemplo.

Una partícula que realiza un movimiento oscilatorio armónico pasa consecutivamente a través de dos puntos separados por una distancia  $a$ , con la *misma velocidad* (en magnitud, dirección y sentido). El tiempo que tarda en recorrer el trayecto entre estos dos puntos es  $\tau$  segundos.

Sabemos, además, que la partícula demora  $2\tau$  segundos en pasar por el segundo punto, ahora con la misma velocidad (en dirección y magnitud), pero en *sentido opuesto*.

A partir de estos datos encuentre el período  $T$  y la amplitud  $A$  de este movimiento.

En este ejemplo, las condiciones iniciales para determinar las constantes  $A$  y  $\phi$  no están dadas en forma simple y directa, como es lo usual en otros problemas. En otras palabras, conociendo  $a$  y  $\tau$ , debemos determinar las constantes de movimiento  $A$ ,  $\phi$ , y la razón  $k/m$  del oscilador.

Notemos que la magnitud de la velocidad del oscilador en los puntos citados en el enunciado, *no* es conocida, sólo  $a$  y  $\tau$  son datos. Otro punto, es la presentación de los datos iniciales: la distancia  $a$  y los tiempos aparecen en forma relativa. Esto nos permite definir la posición inicial del oscilador, el instante en que el tiempo comienza a contar,  $t = 0$ , como nos convenga más.

La posición y la velocidad están determinadas por:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{y} \quad v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi).$$

Usando la identidad trigonométrica:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , podemos obtener una relación entre  $x(t)$  y  $v(t)$ , válida para todo  $t$ :

$$x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega^2} = A^2 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2(t)}{\omega^2}}.$$

De esta última relación se deduce que si *la velocidad es la misma en los puntos P y Q* (Figura [V.4]) entonces  $x(t)$  –la proyección sobre el eje horizontal de estos dos puntos–, debe ser simétrica con respecto al origen.

De este resultado se desprende que debemos elegir  $\phi$  de manera que el tiempo empiece a contar cuando el oscilador pasa por el origen: de esta forma las ecuaciones se simplifican. Tomando  $\phi = \pi/2$  las expresiones para  $x(t)$  y  $v(t)$  se transforman en:

$$x(t) = A \sin \omega t \quad \text{y} \quad v(t) = A\omega \cos \omega t.$$

Podemos comprobar directamente que para  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  y la velocidad es positiva  $v(0) = A\omega$ .

Según el enunciado, la distancia entre el punto P y Q es:

$$x(\tau/2) - x(-\tau/2) \equiv a = 2A \sin \omega \tau/2.$$

Donde hemos utilizado la igualdad  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ . Tenemos una ecuación y dos incógnitas:  $A$  y  $\omega$ .

La siguiente ecuación proviene del dato acerca de la velocidad de retorno por Q. De la Figura [V.4] se deduce que:

$$\omega \tau/2 + \omega \tau/2 + \omega 2\tau = \omega 3\tau = \pi.$$

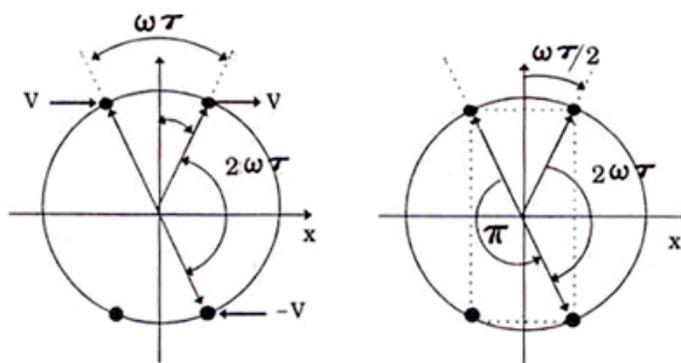


Figura V.4: El gráfico del movimiento circunferencial uniforme señala las condiciones que se han impuesto en la cinemática del problema (izquierda). La simetría del movimiento permite determinar que el ángulo descrito entre los puntos con velocidad  $v$  y  $-v$ , es  $\omega 3\tau = \pi$ .

Con esta ecuación tenemos el problema resuelto:  $\omega = \pi/[3\tau]$  y  $A = a/[2\text{sen}(\pi/6)] = a$ . La constante  $\phi$  la fijamos al comienzo de la resolución.

$$x(t) = a \text{sen} \left( \frac{\pi}{3\tau} t \right). \quad \square$$

### Ejercicio

En el ejemplo anterior y usando sólo igualdades trigonométricas, demuestre que a partir de la condición:

$$v(\tau/2) = -v(\tau/2 + 2\tau) \quad \implies \quad A \cos \omega\tau/2 = -A \cos[\omega(\tau/2 + 2\tau)],$$

se obtiene:  $\omega\tau = \pi/3$ , sin hacer uso de las propiedades geométricas exhibidas en la Figura [V.4].  $\square$

### V.2.2. Oscilaciones pequeñas. Péndulo simple

El caso más representativo de las oscilaciones pequeñas es el de un péndulo simple. Este consiste de una masa  $m$  colgando de un hilo o de una barra de masa despreciable y que realiza pequeñas oscilaciones en un campo gravitatorio.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen en este caso (oscilaciones pequeñas), son similares a las de una masa atada a un resorte.

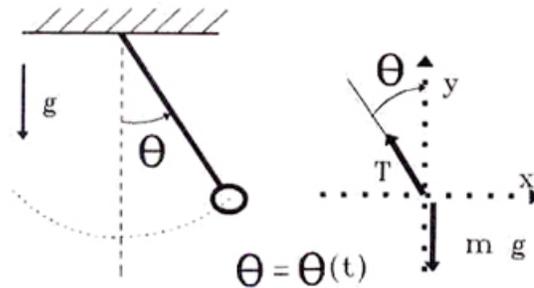


Figura V.5: Una masa  $m$  suspendida de una cuerda de largo  $\ell$ , oscila en un campo gravitatorio. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la masa  $m$ . El ángulo  $\theta$  debe ser del orden de  $5^\circ$  para usar la aproximación  $\text{sen } \theta \approx \theta$ .

La masa  $m$  está restringida a viajar a lo largo de la circunferencia, de manera que su desplazamiento sigue la tangente a la circunferencia en todo instante. Por lo tanto, el elemento de arco recorrido en un intervalo de tiempo por la partícula es:

$$\begin{aligned} \Delta s &\equiv \ell \Delta \theta : \text{ elemento de arco recorrido} \\ &\hspace{10em} \text{en el intervalo } \Delta t, \\ \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \ell \frac{\Delta \theta}{\Delta t} : \text{ velocidad tangencial de la partícula,} \\ \frac{\Delta \left[ \frac{\Delta s}{\Delta t} \right]}{\Delta t} &= \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} : \text{ aceleración tangencial de la masa } m. \end{aligned}$$

Donde  $\ell$  es el radio de la circunferencia.

Del diagrama de cuerpo libre (ver Figura [V.5]) se desprende que:

$$T \cos \theta - m g = m a_y, \quad \text{y} \quad -T \text{sen } \theta = m a_x.$$

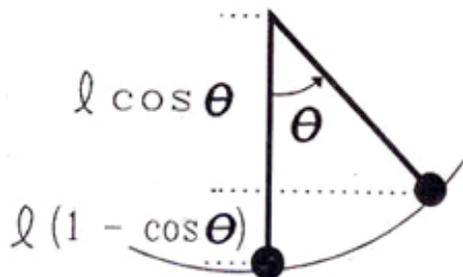
La ecuación de la izquierda es la segunda ecuación de Newton proyectada en la dirección vertical.  $T$  proviene de la tensión que ejerce la cuerda sobre la masa  $m$ .

La ecuación de la derecha es la proyección sobre el eje horizontal.

El siguiente paso consiste en simplificar las ecuaciones anteriores introduciendo la *aproximación*  $\theta \ll 1$ , con  $\theta$  medido en radianes.

De acuerdo al desarrollo en serie de  $\cos \theta$  y  $\text{sen } \theta$  tenemos:  $\cos \theta \approx (1 - \theta^2/2, \dots)$  y  $\text{sen } \theta \approx \theta$ .

Si despreciamos los términos que contienen  $\theta^2$ , esta aproximación es equivalente a que el péndulo se mueva horizontalmente y despreciemos totalmente el movimiento vertical. De hecho, el cambio de altura de la masa  $m$ , desde la posición de equilibrio hasta el punto de máxima elongación es  $\ell(1 - \cos \theta)$ , lo cual dentro del orden de aproximación adoptado aquí es:  $\approx \ell \theta^2$ , y por lo tanto podemos suponer que el péndulo *no se levanta*.



De aquí se desprende que no hay desplazamiento  $y$ , y, en consecuencia, no hay aceleración en dicha dirección:  $a_y \approx 0$  y  $a_x \approx a_{\text{tangencial}}$ .

Con estas aproximaciones, la segunda ecuación de Newton queda:

$$T - mg = 0, \quad \text{y} \quad T \sin \theta \approx T \theta = m a_{\text{tangencial}},$$

reemplazando la tensión en la ecuación de la derecha y la expresión encontrada anteriormente para la aceleración tangencial en  $a_x$ , se tiene:

$$m \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \approx -mg \theta, \quad \text{para valores pequeños del ángulo } \theta. \quad (\text{V.13})$$

Esta última ecuación es del mismo tipo que la ecuación de una masa que oscila unida a un resorte [V.9]. En aquel caso la segunda derivada de la posición, la aceleración, era proporcional a la posición, aquí la segunda derivada del ángulo  $\theta$  es proporcional al ángulo  $\theta$ . Matemáticamente son idénticas, sólo necesitamos identificar  $\omega$  como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

En esta ecuación,  $T$  es el período del péndulo. No es la tensión de la cuerda.

La ecuación de movimiento queda descrita por la siguiente fórmula:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi). \quad (\text{V.14})$$

donde  $\theta_0$  es el máximo valor que puede tomar el ángulo  $\theta$  en su oscilación y  $\phi$ , al igual que en el caso anterior, está relacionado con las condiciones iniciales del péndulo. Esta ecuación es general, abarca todos los casos posibles de un péndulo con oscilaciones pequeñas.

**Ejemplo.**

A continuación mencionamos tres ejemplos en cuya resolución podemos usar como *modelo aproximado*, un sistema masa–resorte.

- El cable de acero que sostiene un peso en una grúa. Este cable se **estira** debido al peso y podemos modelarlo como un resorte ideal. Igual cosa sucede con el cable de acero que sostiene un ascensor que aparece en la otra Figura. Al comenzar a elevarse recibe un tirón desde el extremo opuesto al ascensor y el cable comienza a oscilar. Es claro que las oscilaciones son pequeñas y se amortiguan debido al roce que existe en todas sus componentes.

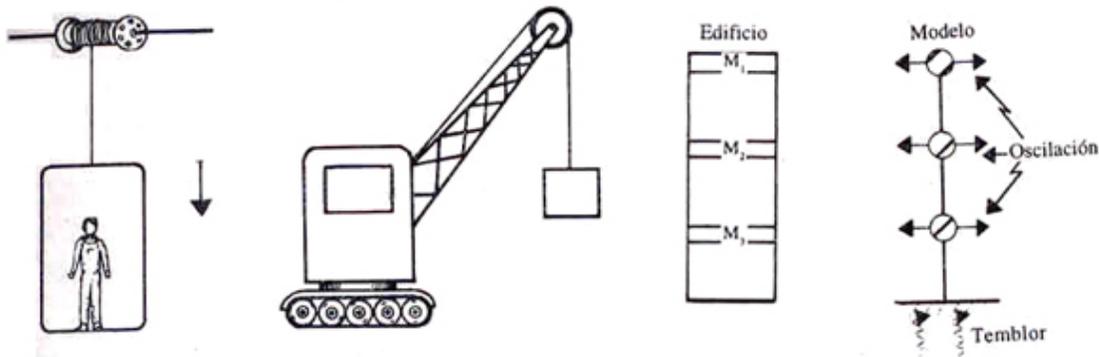


Figura V.6: Algunas estructuras que, al ser modeladas a través de un oscilador armónico, proporcionan información relevante acerca del sistema.

- De la misma forma que un resorte oscila con una frecuencia bien determinada, el sistema de tres partículas de la Figura tiene tres formas naturales de oscilación, cada una asociada con una frecuencia  $\omega$  diferente.

Un edificio puede ser modelado por este conjunto de masas unidas a una barra común. Las masas, que representan la loza del edificio, experimentan una oscilación transversal como se indica en la Figura.

Existen modelos mucho más sofisticados para representar un edificio, pero éste permite estimar, en orden de magnitud, sus frecuencias propias de oscilación.

Es importante conocer los valores de estas frecuencias puesto que el edificio debe diseñarse de modo que los valores de su frecuencia de oscilación (las frecuencias naturales mencionadas anteriormente), sean diferentes de las frecuencias características observadas en los terremotos ocurridos en la región, con el fin de evitar que comience a oscilar en simpatía con las oscilaciones de la Tierra, aumentando de esta forma su amplitud y terminando por destruirlo.

- Si debemos remolcar un auto averiado, al comienzo se debe actuar lentamente, en caso contrario, si hay movimientos bruscos se corre el peligro de alcanzar la tensión límite de la cuerda que los une.

Esto se debe a que al aplicar una determinada fuerza en forma repentina, la cuerda se estira dos veces más que al realizar la misma operación *en forma lenta*. De esta última forma se evita sobrepasar el límite elástico de la cuerda.

Este resultado lo usan quienes, después de amarrar un paquete, cortan la cuerda dándole un tirón violento. Desde nuestro punto de vista, lo que hacen es aplicar toda su fuerza repentinamente y, además suman toda la energía cinética acumulada con la velocidad de la mano, para gastarla en trabajo y estirar suficientemente el hilo hasta cortarlo.

En el último párrafo usamos los términos: Energía Cinética y Trabajo. En la siguiente sección explicamos el significado físico de estos dos conceptos.

### V.3. TRABAJO

Comencemos definiendo en forma matemática el concepto de *trabajo*.

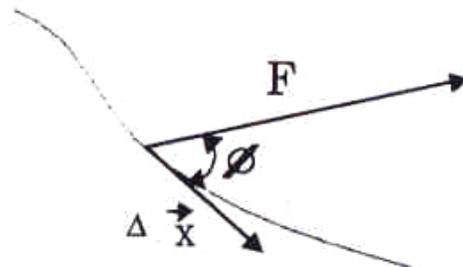
#### Definición:

El trabajo realizado por una fuerza es el **producto escalar** entre el vector desplazamiento de un punto y la fuerza que actúa sobre dicho punto.

$$W \Big|_x^{x+\Delta x} \equiv \Delta W = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trabajo}}}{\Delta W} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fuerza}}}{\vec{F}(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desplazamiento}}}{\Delta \vec{x}}$$

Unidad:  $[W] = \text{newton} \times m \equiv \mathbf{Joule}$ .

El esfuerzo que se debe realizar para arrastrar un objeto sobre una superficie rugosa nos da una idea intuitiva de lo que es el trabajo  $W$ .



Veremos en este capítulo, que el trabajo se transforma en energía y viceversa. La simetría entre trabajo y energía se rompe cuando cuando existe *roce*. En este último caso, parte del trabajo realizado sobre el cuerpo se transforma en calor, que también es una forma de energía, pero que no se puede recuperar directamente en forma de trabajo.

### Ejemplo

Encontrar el trabajo realizado para trasladar un bloque desde  $A$  hasta  $B$ , aplicando una fuerza constante  $F_0$ , en la forma como se indica en la Figura.

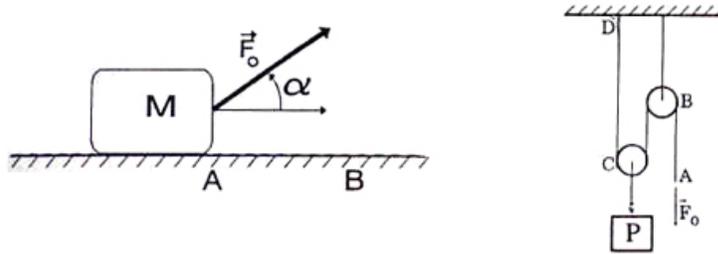


Figura V.7: El trabajo realizado en dos situaciones distintas: un bloque que está siendo desplazado por una fuerza y un objeto que es levantado lentamente mediante un sistema de poleas.

El trabajo realizado para trasladar el objeto hasta  $B$  es por definición:

$$W|_A^B = \vec{F}_0 \cdot \Delta\vec{x} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A).$$

$W|_A^B$  es el trabajo realizado por el agente que aplica la fuerza  $\vec{F}_0$  sobre el objeto. Recordemos que  $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ :

$$W|_A^B = |\vec{F}_0| \cdot |\vec{x}_B - \vec{x}_A| \cdot \cos \alpha.$$

Trabajo es lo mismo que energía. Ambos se confunden. Por ejemplo si la masa  $M$  estaba inicialmente en reposo, se acelera debido a la fuerza  $F_0$  y adquiere otra forma de energía: la energía cinética.

Otra forma de energía es el calor que se manifiesta en el aumento de temperatura entre las superficies en contacto de dos cuerpos que se deslizan uno sobre otro. No es posible recuperar esta forma de energía. Este hecho establece una diferencia importante con la energía cinética, puesto que esta última es posible recuperarla realizando trabajo sobre otro objeto, por ejemplo empujando a otro bloque o, como se señaló al final de la sección anterior utilizándola para cortar un hilo en el empaque de una tienda. En este

último caso, el empleado le comunica velocidad a su mano y se la aplica repentinamente al hilo, éste se estira, sobrepasa su límite elástico (si el impulso inicial es suficiente) y el hilo se corta.

### Ejemplo

En el sistema de poleas de la Figura, calcule el trabajo realizado al desplazar el extremo A una distancia  $\ell$ . El peso de la polea C es  $P$ , y no existe roce entre ninguno de los elementos del sistema.

Esta configuración ilustra el principio de funcionamiento de las grúas.

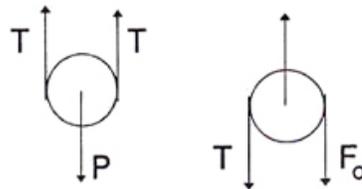
En este mecanismo existe una *conservación del trabajo* que nos conducirá al descubrimiento de la conservación de la energía más adelante. La energía tiene las mismas dimensiones que el trabajo y puede adquirir distintas formas, como energía cinética (asociada al movimiento), energía potencial (asociada a la posición), calor y otras.

Estudie la estática del sistema de poleas más simple: incluye sólo dos de ellas.

En esta configuración no existe roce en las poleas. La polea  $B$  está fija al techo, mientras que  $C$  puede subir o bajar.

Analicemos el equilibrio de este sistema haciendo los diagramas de cuerpo libre relevantes:

$$\begin{aligned} 2T &= P, & T &= \frac{1}{2}P \\ F_0 &= T = \frac{1}{2}P \\ F_0 &= \frac{1}{2}P & & \text{(V.15)} \end{aligned}$$



En resumen, para soportar el peso  $P$  sólo se necesita aplicar una fuerza  $F_0 = P/2$ . Para disminuir aún más la fuerza, basta multiplicar el número de vueltas de la cuerda sobre las poleas. La regla para encontrar el valor de la fuerza requerida en este caso es:

$$F_0 = \frac{P}{n},$$

donde  $n$  es el número de cuerdas que resisten el peso, sin contar la cuerda donde  $F_0$  actúa directamente. El caso estudiado corresponde a  $n=2$ . En resumen, un niño puede levantar un peso tan grande como quiera, usando el número adecuado de poleas, o el número correcto de vueltas de la cuerda sobre un par de poleas.

Estudiemos este mismo problema desde el punto de vista del trabajo. Volvamos al sistema más simple de poleas. Si están en equilibrio, un pequeño empujón desplazará el punto  $A$  hacia abajo (por elegir una dirección).

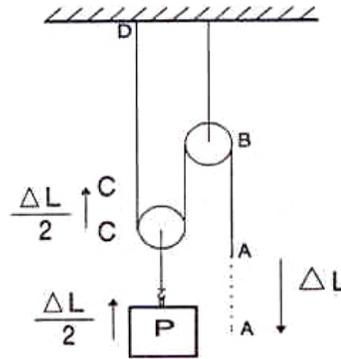
$$W_A = F_0 \cdot \Delta x_A = \frac{1}{2} \omega_0 \Delta x_A \quad (\text{Trabajo efectuado en A})$$

$$W_C = P \cdot \Delta x_C = \quad ? \quad (\text{Trabajo efectuado en C})$$

¿Cómo se relaciona  $\Delta x_C$  con  $\Delta x_A$  ?

Se puede ver que si  $A$  baja una distancia  $\Delta \ell$ ,  $C$  sube  $(\Delta \ell/2)$ , puesto que  $C$  se ubica justo en el punto medio de cada una de sus ramas  $\overline{CD}$  y  $\overline{CB}$  y el largo de la cuerda  $\overline{BCD}$  se ha acortado en  $\Delta \ell$ .

$$W_C = P \frac{1}{2} \Delta x_A = W_A \Rightarrow W_C = W_A \quad (\text{V.16})$$



El trabajo efectuado sobre el punto  $A$  y aquél sobre el punto  $C$ , es el *mismo*. Como el desplazamiento en  $A$  es el doble, la fuerza necesaria es la mitad del peso  $P$ .

Este es un fenómeno similar a la multiplicación de fuerzas que se verifica con las *palancas*. Estudiaremos este caso al introducir el torque, más adelante.

### V.3.1. Cálculo del trabajo realizado por un resorte

Esta conservación del trabajo que encontramos en el ejemplo anterior no es un resultado casual, es una ley de conservación que se cumple cuando no existe roce.

El caso de un resorte es más complejo porque la fuerza depende de su alargamiento. Sin embargo, veremos a continuación que es posible resolver este problema con herramientas matemáticas ya conocidas.

#### Ejemplo

¿Cuál es el trabajo necesario para alargar *lentamente* un resorte? Suponga que el resorte descansa sobre una mesa sin roce, de manera que sólo actúa su fuerza de restitución.

La ley de fuerza es  $F(x) = -kx$ , donde  $x$  indica la variación de la longitud del resorte medida a partir de su largo natural.

Suponemos que al alargar el resorte lo hacemos en la misma dirección de su longitud y por lo tanto el problema es unidimensional y no necesitamos usar explícitamente vectores.

Lo novedoso en este problema radica en la dependencia de la fuerza en la posición y, por lo tanto, para calcular el trabajo es necesario sumar pequeños desplazamientos y en cada uno de ellos usar un valor *constante* de la fuerza, que represente su valor promedio en dicho intervalo.

De esta forma, el trabajo necesario para dar un pequeño desplazamiento al resorte es:

$$\begin{aligned} \Delta W &= F(x) \Delta x, \\ &\quad \uparrow \\ &F(x) = +kx. \end{aligned}$$

El signo (+) de la segunda línea de la última ecuación, se debe a que estamos calculando el trabajo que realiza el *agente externo*, que estira el resorte y que a cada instante debe aplicar una fuerza *contraria* a la fuerza con que el resorte se resiste a ser alargado.

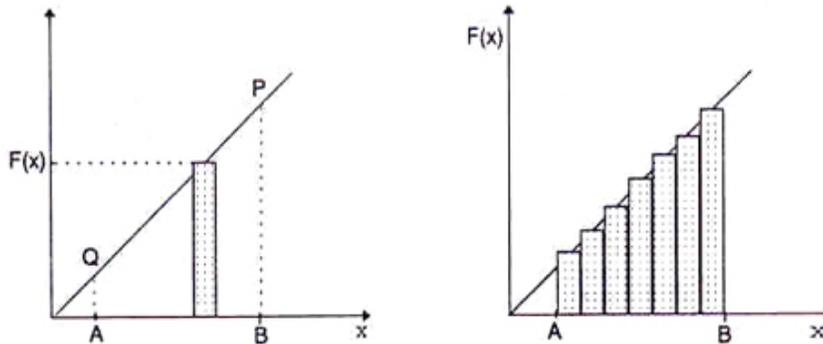


Figura V.8: El trabajo realizado es igual al área encerrada bajo la curva de  $F(x)$  por  $\Delta x$  alrededor del punto  $x$ . El valor medio de  $F(x)$  asociado a cada uno de los intervalos  $\Delta x$  lo representamos, en este caso, por el valor de  $F(x)$  evaluado en el punto medio del intervalo.

Si estiramos (*lentamente*) el resorte desde  $A$  hasta  $B$  el trabajo total será:

$$\begin{aligned}
\Delta W|_A^B &= \sum_{x_A}^{x_B} \Delta x_i F(x_i) = \text{Area bajo el trapecio ABPQ}, \\
&= (AB) \cdot \left\{ k x_A + \frac{1}{2} k(x_B - x_A) \right\}, \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
\Delta W|_A^B &= (x_B - x_A) \cdot \frac{k}{2} (x_A + x_B) = \frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_A^2. \\
\Delta W|_A^B &= \frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2). \tag{V.17}
\end{aligned}$$

Este resultado se puede obtener sumando cada uno de los trapecios desde A hasta B. Es un proceso más largo, sin embargo es de utilidad porque es una forma de enfrentar los casos donde la función  $f(x)$  no es una línea recta.

Sumemos cada uno de estos términos:

$$W|_A^B = \sum_A^B (k x_i) \cdot \Delta x_i = k \sum_{n=1}^N \left[ x_A + \left( n - \frac{1}{2} \right) \Delta \right] \Delta,$$

donde el significado de cada uno de los signos se detalla a continuación:

$$\Delta x_n \equiv x_{n+1} - x_n = \Delta, \quad \text{constante,}$$

$$x_n = x_A + \left( n - \frac{1}{2} \right) \Delta,$$

$$x_{n+1} = x_A + \left( n + 1 - \frac{1}{2} \right) \Delta.$$

en el gráfico,  $k x_i$  representa la altura del rectángulo cuya base es  $\Delta$ . De paso mencionamos que conviene usar el valor  $x_n = x_A + \left( n - \frac{1}{2} \right) \Delta$  para la altura, puesto que de esta forma el resultado obtenido para el área será el valor exacto, sin aproximaciones.

$$\begin{aligned}
W|_A^B &= k \left[ \sum_{n=1}^N x_A \right] \Delta + \Delta^2 \left[ \sum_{n=1}^N n \right] - \Delta^2 \left[ \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2} \right) \right], \\
&= k \left\{ N \Delta x_A + \Delta^2 (N+1) \frac{N}{2} - \Delta^2 \frac{N}{2} \right\},
\end{aligned}$$

pero  $\Delta \cdot N \equiv [x_B - x_A]$ , y tomando el límite  $\Delta \rightarrow 0$  simultáneamente con  $N \rightarrow \infty$ , de forma que el producto de ambas cantidades permanezca constante e igual al valor ya indicado, se tiene:

$$W|_A^B \equiv W_A^B = k \left\{ x_A (x_B - x_A) + \frac{1}{2} (x_B - x_A)^2 + 0 - 0 \right\}.$$

$$W|_A^B = k x_A (x_B - x_A) + \frac{k}{2} (x_B^2 - 2x_B x_A + x_A^2),$$

y finalmente reobtenemos el mismo valor de la ecuación [V.17],

$$W_A^B = \frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2). \quad (\text{V.18})$$

Esta expresión representa el trabajo realizado para estirar lentamente un resorte desde  $x_A$  hasta  $x_B$ . El trabajo puede ser positivo (el agente externo debe realizar el trabajo) o negativo (si el resorte arrastra lentamente al agente externo). El signo depende del valor relativo de  $x_A$  y  $x_B$ .

#### V.4. ENERGIA

Estirar un resorte lentamente *no* es, sin duda, un proceso natural. Es sólo un truco que nos ha servido para tratar un problema por partes, comenzando por la más simple. Veamos ahora que sucede si estiramos un resorte y luego lo soltamos, de modo que el sistema oscile libremente. En este caso, la segunda ley de Newton  $F = m a$  debe cumplirse en cada instante y, *suponemos*, que la expresión  $F = -k x$ , sigue siendo válida aun cuando fue descubierta al estirar el resorte *lentamente*. Si los resultados teóricos obtenidos con esta suposición coinciden con lo que se observa al realizar el experimento bajo estas otras condiciones, ésta aproximación es considerada aceptable. Dentro del error experimental, las observaciones *coinciden* con los resultados teóricos obtenidos a partir de esta suposición.

De esta forma, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\begin{aligned} m a &= -k x \\ m \frac{\Delta v}{\Delta t} &= -k x. \end{aligned}$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración de la masa en cada punto de la trayectoria depende de la coordenada  $x$  de dicho punto,  $a = a(x)$ .

Para resolver este problema, continuamos con el mismo procedimiento empleado al calcular el trabajo necesario para estirar un resorte *lentamente*. Multiplicamos ambos lados de la última ecuación por el desplazamiento  $\Delta x$  que ocurre en el punto  $x$  y sumamos esta expresión a lo largo de la trayectoria. Escribimos la aceleración como  $a \equiv \Delta v / \Delta t$ .

La suma se lleva a cabo entre dos puntos arbitrarios de la trayectoria:  $x_B$  y  $x_A$ :

$$m \sum_{x_B}^{x_A} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta x = (-1) k \left( \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta x \right), \quad (\text{V.19})$$

como todo estos intervalos  $\Delta t, \Delta x$ , son muy pequeños pero finitos, podemos intercambiar el orden,

$$m \cdot \left[ \sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = -k \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta x,$$

usando  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , y asociándolo con la velocidad en el punto medio del intervalo  $v_n$  y  $v_{n-1}$ ,

$$m \cdot \left[ \sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot v \right] = -k \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta x.$$

Los resultados de esta sumatoria no pueden depender del nombre asignado a las variables. Por lo tanto, la sumatoria de los términos  $v \cdot \Delta v$ , debe dar el mismo resultado que el obtenido en la sumatoria [V.17], donde aparece  $x \cdot \Delta x$ . En ambos casos se calcula el área bajo una línea recta (ver Figura).

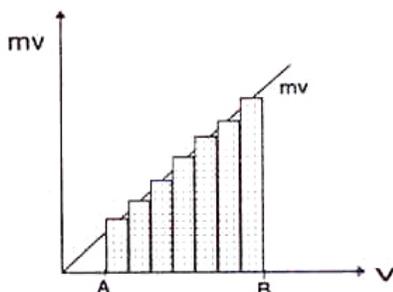


Figura V.9: En este caso,  $m \cdot v$ , corresponde al eje vertical (ordenada) y la velocidad  $v$ , cuyos valores se marcan en el eje horizontal (abcisa). El área bajo la recta es claramente el área del trapecio sombreado de la Figura.

La operación donde se reemplazó la aceleración por  $\Delta v/\Delta t$ , tenía precisamente este objetivo: transformar una sumatoria cuyo valor no conocíamos, en otra que nos era familiar. El resultado es:

$$\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot v = \frac{1}{2}(v_A^2 - v_B^2). \quad (\text{V.20})$$

Reemplazando a la izquierda de la igualdad esta última expresión y a la derecha de la igualdad el resultado de la ecuación [V.17], tenemos:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -\frac{1}{2} k x_A^2 + \frac{1}{2} k x_B^2.$$

Agrupando los términos con el mismo subíndice a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k x_B^2 \quad (\text{V.21})$$

A la izquierda de la ecuación tenemos una cantidad evaluada en el punto  $x_A$ , y a la derecha, tenemos *la misma expresión* pero ahora evaluada en el punto B. El signo igual nos señala que la suma de los dos términos ubicados a la izquierda de la igualdad tienen el mismo valor, donde quiera que esta suma se evalúe, puesto que el punto A y el punto B son arbitrarios.

La expresión que se repite en ambos lados de la igualdad se denomina ENERGIA. Al evaluar esta expresión en cualquier punto de la trayectoria se obtiene el mismo número: es una cantidad conservada, no cambia su valor:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad (\text{V.22})$$

El primer término se denomina energía cinética y el segundo, energía potencial del resorte. La suma de ambos permanece constante durante el movimiento.

Existe entonces una componente de la energía proveniente del movimiento, la energía cinética y una energía debida al estiramiento del resorte, la energía potencial.

Ambas pueden ser transformadas en trabajo. Por ejemplo, al martillar un clavo estamos transformando la energía cinética del martillo en el trabajo que se requiere para hundir el clavo en la madera. De igual forma, se puede comprimir un resorte para que al liberarlo imprima una cierta velocidad a una masa. Eventualmente esta energía puede transformarse en trabajo en la forma indicada.

Si son equivalentes entonces la *Energía* debe tener las dimensiones de *Trabajo*, es decir:

$$[\text{Energía}] \equiv [\text{fuerza}] \times [\text{distancia}] \equiv [\text{newton} - m].$$

Con la letra  $\mathbf{T} \equiv m v^2/2$  designamos a la energía cinética y la letra  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} k x^2$  señala la energía potencial. La conservación de la energía se escribe como:

$$E = T + V.$$

**Ejemplo**

Dos masas  $M$  y  $m$  descansan sobre un piso sin roce y están *apoyadas (no unidas)* al resorte de constante  $k$  y largo natural  $L_0$ .

Inicialmente el resorte se comprime un largo  $x_0$  manteniendo las masas pegadas a su extremo. Repentinamente se libera el sistema y las masas  $M$  y  $m$  salen disparadas en direcciones opuestas.

Calcular la velocidad final de cada una de las masas.

Como no existe roce en el piso y se trata de un resorte ideal, se conserva la energía.

**Nota:** El peso *no* realiza trabajo, porque:

$$\Delta W|_A^B = M \vec{g} \cdot \Delta \vec{x} = 0, \quad \text{puesto que,}$$

$$\Delta \vec{x} \cdot \vec{g} = |\Delta \vec{x}| \cdot |\vec{g}| \cos 90^\circ = 0.$$

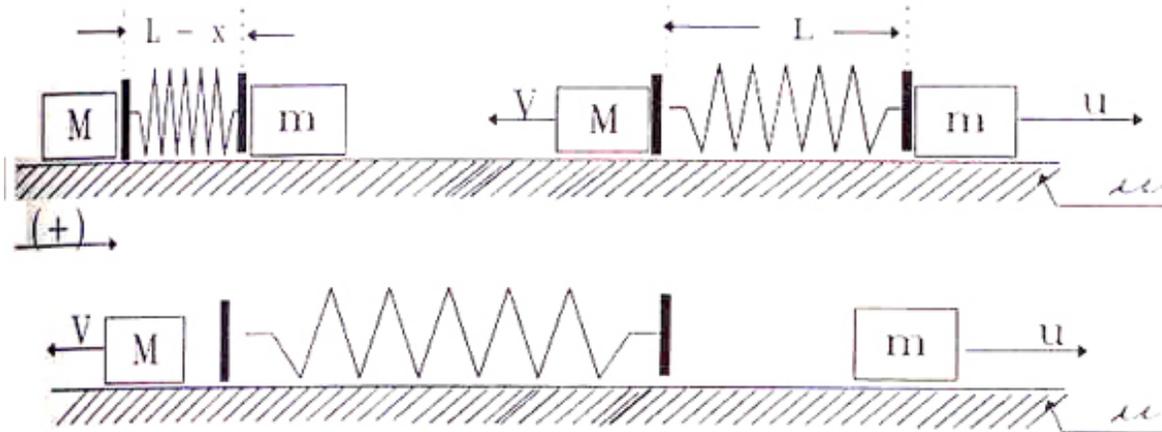


Figura V.10: El resorte está inicialmente comprimido, al soltarlo empuja ambas masas con la misma fuerza, por lo tanto aquella con menor masa adquiere más velocidad. El resorte y las placas que empujan a la masa tienen una masa despreciable comparada con  $m$  y  $M$ .

De esta forma, aquí co-existen sólo dos tipos de energía, la energía cinética de cada una de las masas  $M$  y  $m$  y la energía potencial del resorte.

Si la energía del sistema se conserva, debemos calcularla en algún instante en que sea particularmente fácil.

En este caso conviene evaluar la constante  $E_0$ , justo en el momento en que se liberan las masas. Su valor es:

$$E_i = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2 = E_0,$$

ya que en ese instante ambas están en reposo. Como  $E_0$  se conserva a lo largo de la trayectoria, es válido considerar el otro punto de referencia donde más nos convenga. Este punto resulta ser el instante cuando el resorte adquiere por primera vez su largo natural  $L_0$ . En ese punto los extremos del resorte tienen su máxima velocidad, puesto que en el instante siguiente el largo será mayor que el natural y aparece instantáneamente una fuerza  $(-kx)$  que comienza a frenar el extremo del resorte. Por otra parte las masas  $M$  y  $m$  *no están atadas* al resorte y por lo tanto una vez que adquieren la velocidad máxima del resorte, *continúan* con la misma velocidad, porque no hay roce con el piso.

En el instante en el cual el resorte alcanzó su largo natural  $L_0$  la energía  $E_f$  es [V.17]

$$E_f = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m u^2 + 0, \text{ pero como:}$$

$$E_i = \frac{1}{2} k x_0^2,$$

$$\text{y la energía se conserva } \Rightarrow E_i = E_f,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m u^2.$$

Tenemos dos incógnitas  $V$  y  $u$ , y una sola ecuación. La otra ecuación que necesitamos proviene de la segunda y tercera ley de Newton. En la dirección horizontal se cumple:

$$M \frac{\Delta V}{\Delta t} = F_1, \quad \text{segunda ley de Newton para la partícula M,}$$

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = F_2, \quad \text{segunda ley de Newton para la partícula m,}$$

$$m_{\text{resorte}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_1 - F_2, \quad \text{segunda ley de Newton para el resorte.}$$

En la última ecuación, pusimos  $-F_1$ , y  $-F_2$ , como las fuerzas actuando sobre el resorte, utilizando el principio de acción y reacción en cada uno de los puntos de contacto con las masas  $m$  y  $M$ .

Como la masa del resorte es despreciable comparada con las masas  $m$  y  $M$ , esta última ecuación se transforma en:

$$0 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv 0 = F_1 + F_2.$$

Sumando las dos ecuaciones de movimiento de  $m$  y  $M$  y reemplazando este último resultado, obtenemos:

$$M \frac{\Delta V}{\Delta t} + m \frac{\Delta u}{\Delta t} = 0.$$

Como esta ecuación es válida en todo instante, designemos  $A$  y  $B$  como dos instantes de tiempo arbitrarios, con  $\Delta t = t_B - t_A$ , entonces:

$$M \frac{[V_B - V_A]}{\Delta t} + m \frac{[u_B - u_A]}{\Delta t} = 0,$$

$$M [V_B - V_A] + m [u_B - u_A] = 0, \quad \text{ordenando,}$$

$$M V_B + m u_B = M V_A + m u_A, \quad \text{para cualquier punto A y B,}$$

de este modo se tiene que:

$$M V + m u = \text{constante.}$$

Como en nuestro caso, ninguna de las masas tenía velocidad en el instante inicial, entonces la constante es igual a cero:

$$M V + m u = 0.$$

Esta es la segunda ecuación que necesitábamos para resolver el problema.

**Nota:**

Este es un resultado general y como tal tiene un nombre: se denomina *conservación del momentum*. Cada vez que no existan fuerzas externas actuando sobre el sistema, la siguiente expresión permanece constante:

$$\sum_{i=1}^N M_i V_i = \text{constante}, \quad (\text{V.23})$$

$M_i$  identifica a cada una de las masas del sistema y  $V_i$  su velocidad respectiva.  $\square$

Volviendo a nuestro problema inicial, los datos eran:  $M$ ,  $m$ ,  $x_0$  y  $k$ , las incógnitas  $V$

y  $v$ . Disponemos de dos ecuaciones:

$$M V^2 + m u^2 = k x_0^2, \quad (1)$$

$$M V + m u = 0. \quad (2)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones se obtiene:

$$u = \pm \sqrt{\frac{M}{m(M+m)}} k x_0^2, \quad (\text{V.24})$$

$$V = \mp \sqrt{\frac{m}{M(M+m)}} k x_0^2. \quad (\text{V.25})$$

Si  $u$  se desplaza en el sentido positivo del eje horizontal, entonces  $V$  se mueve en el sentido negativo. De esta forma elegimos los signos correspondientes a cada uno de los movimientos de  $M$  y  $m$ .

Podemos verificar estos resultados comparando con una situación real de la vida diaria: supongamos que la masa  $M$  es muy grande, por ejemplo, que este ejercicio representa en realidad un resorte apoyado en una pared de masa  $M$ , en cuyo extremo opuesto hemos comprimido una masa  $m$ . Por experiencia sabemos que al soltar el resorte la masa  $m$  sale disparada y  $M$  se queda en su mismo lugar. En las ecuaciones, este caso se representa como  $M \rightarrow \infty$ . Reemplazando este valor en las expresiones de la velocidad tenemos:

$$u^2 \approx \frac{1}{m} k x_0^2, \quad V^2 \approx \frac{m}{M^2} k x_0^2 \approx 0.$$

#### V.4.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico

En muchos modelos físicos se supone que el potencial depende exclusivamente de las coordenadas espaciales. Si este es el caso, entonces podemos graficar el potencial en función de estas coordenadas y de esta forma, obtener directamente algunas propiedades del movimiento sin necesidad de resolver las ecuaciones.

Para un oscilador armónico, la ecuación de la energía es:

$$E_0 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

$$E_0 = V(x) + T, \quad \text{donde:}$$

$V \equiv$  Energía Potencial,

$T \equiv$  Energía Cinética.

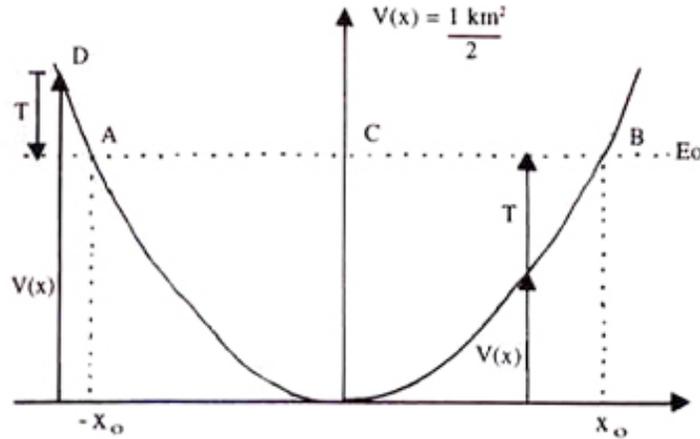


Figura V.11: Por convención la flecha de la energía cinética *siempre* debe apuntar en el sentido positivo de la ordenada  $V(x)$ . La energía potencial puede ser positiva o negativa.

Como la energía  $E_0$  es constante, la diferencia  $[E_0 - V(x)]$  nos da el valor de  $T$ , la energía cinética del sistema. En los puntos donde  $T$  se hace cero, sabemos que el cuerpo está momentáneamente en reposo. En el caso del oscilador armónico, este punto marca el cambio de sentido en la dirección de su movimiento.

Donde  $V(x)$  es un mínimo,  $T$  es un máximo y allí el cuerpo adquiere su máxima velocidad.

En los puntos  $A$  y  $B$  del gráfico  $V(+x_0) = V(-x_0) = E_0$ , la energía cinética se anula y el cuerpo permanece momentáneamente en reposo. En este caso  $A$  y  $B$  corresponden a los puntos de máxima elongación y compresión del resorte.

$$V(x_0) = V(-x_0) = E_0 \Rightarrow T = 0 \begin{cases} v_A = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

En el punto  $C$ ,  $V(0) = 0 \Rightarrow E_0 = T \Rightarrow v_C = v_{\max}$ .

La partícula *no* puede alcanzar el punto  $D$  porque allí la energía cinética es negativa. Al dibujar las flechas correspondientes en ese punto, vemos que la única posibilidad de cumplir la ecuación de la energía  $E = T + V$  es que  $T$  sea negativo, lo que está prohibido en este contexto, puesto que implicaría una velocidad imaginaria.

$$T < 0, \quad T = \frac{1}{2} m v_D^2 < 0,$$

como  $m > 0 \Rightarrow v_D^2 < 0$ , lo que constituye una contradicción puesto que la velocidad en cada punto debe ser un número real.

## V.5. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE

Estudiaremos el efecto de las fuerzas de roce sobre el movimiento de la partícula.

Incluyendo la fuerza de roce en la ecuación [V.19], se tiene:

$$m \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta x = (-1)k \left( \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} x \cdot \Delta x \right) - \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} f_{\text{roce}} \cdot \Delta x, \quad (\text{V.26})$$

realizando la suma de la misma forma que se hizo anteriormente y definiendo:

$$W_i^f \equiv \sum_{x_i}^{x_f} f_{\text{roce}} \cdot \Delta x, \quad \text{se tiene:}$$

$$T_f - T_i = -[V_f - V_i] - W_i^f, \quad \text{y ordenando los términos:}$$

$$W_i^f = E_i - E_f. \quad (\text{V.27})$$

La energía *no* es una constante de movimiento bajo estas circunstancias. La diferencia en el valor de la energía inicial y final es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce. Este trabajo se transforma en calor y no es posible reincorporarlo a los cuerpos en la forma de energía cinética o potencial.

En estos casos, el roce permanentemente degrada la energía mecánica, transformándola en calor. Este es un proceso irreversible, el calor no se puede transformar directamente en energía mecánica. En consecuencia, la energía final –la suma de la energía cinética y potencial–, será menor que la energía total inicial.

### Ejemplo

Una masa  $m$  se encuentra a una distancia  $D$  del extremo de un resorte de constante  $k$  que, por simplicidad, suponemos que tiene masa nula. La masa  $m$  se desliza por un piso horizontal cuyo coeficiente de roce cinético es  $\mu_c$  y el de roce estático es  $\mu_e$ .

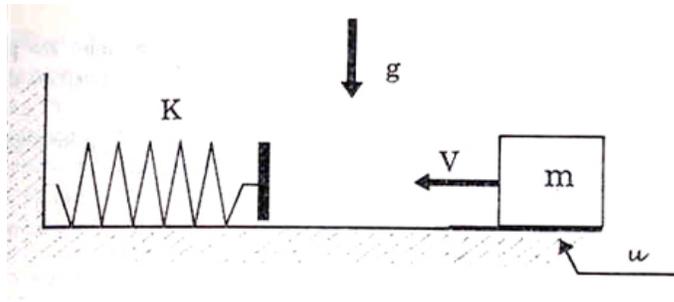


Figura V.12: El resorte está inicialmente con su largo natural y la masa  $m$  se acerca con velocidad  $V$ . La energía no se conserva debido a la existencia de roce entre el piso y la masa. La energía disipada es igual al trabajo que realiza la fuerza de roce.

a) Suponga que la masa  $m$  tiene una velocidad  $V$  cuando se encuentra a la distancia  $D$  del extremo del resorte. Calcule el acortamiento del resorte, suponiendo que la velocidad  $V$  es suficiente para alcanzar a comprimirlo.

b) ¿Qué valor debe tener la velocidad  $V$  para que debido a la fuerza de roce,  $m$  se detenga justo al tocar el resorte?

c) Calcule el valor de  $V$  para que la masa  $m$  se detenga justo en el momento que el resorte alcanza su máxima compresión.

a) La energía del resorte en el momento de su máxima compresión es:

$$E_{\text{compresión}} = \frac{1}{2} k x^2,$$

$$\text{y la energía inicial de la partícula m: } E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m V^2.$$

La diferencia entre estas energías corresponde al trabajo realizado por la fuerza de roce que transforma la energía mecánica en energía calórica. Este trabajo es el siguiente:

$$\sum_A^B (-f_{\text{roce}} \cdot \Delta x) = E_f - E_i,$$

ordenando los términos y definiendo:

$$W_{\text{fricción}} \equiv \sum_A^B (f_{\text{roce}} \cdot \Delta x), \quad \text{llegamos a:}$$

$$W_{\text{fricción}} = [\mu_c m g][x + D] = E_{\text{inicial de m}} - E_{\text{compresión}}.$$

Si reemplazamos las expresiones correspondientes a cada una de las energías se llega a una ecuación de segundo grado para la incógnita  $x$ :

$$x^2 + \frac{2\mu_c m g}{k} x - \frac{2}{k} \left[ \frac{1}{2} m V^2 - \mu_c m g D \right] = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\mu_c m g}{k} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{k}{(\mu_c)^2 m g^2} (V^2 - 2\mu_c g D)} \right].$$

De acuerdo a la convención de signos usada (ver Figura),  $x$  debe ser positivo para representar al resorte comprimiéndose, por lo tanto sólo el signo positivo del paréntesis cuadrado tiene sentido físico y es la respuesta buscada.

b) Si queremos usar el resultado anterior entonces debemos imponer que una de las raíces de la ecuación cuadrática en  $x$  sea nula. Esto se logra si:

$$(V^2 - 2\mu_c g D) = 0.$$

La explicación física de este resultado es la siguiente: toda la energía cinética de la masa  $m$  se disipó al recorrer la distancia  $D$  que la separa del extremo del resorte. Esto se puede verificar directamente escribiendo la ecuación correspondiente y comprobando que se obtiene el mismo resultado:

$$W_{\text{fricción}} \equiv [\mu_c m g] \cdot [x + D] = E_{\text{inicial de m}} \equiv \frac{1}{2} m V^2.$$

Si ponemos  $x=0$ , obtenemos  $V$ .

c) En este caso, el resorte comenzó a comprimirse desacelerando la masa  $m$ . Logró detenerla comprimiéndose una distancia tal, que la fuerza de restitución del resorte en esa posición, es menor que la fuerza de roce estático necesaria para poner en movimiento, nuevamente, a la masa  $m$ . En el caso crítico, se comprime lo suficiente como para igualar el máximo valor de la fuerza de roce estático.

La ecuación extra que debemos imponer es, entonces, la correspondiente al equilibrio estático:

$$k x_{\text{crítico}} = \mu_e m g,$$

reemplazando este valor en la expresión de  $x$ , obtenemos la velocidad  $V$ :

$$V^2 = \mu_c g D \left[ 2 + \frac{m g \mu_e}{k D} \left( 2 + \frac{\mu_e}{\mu_c} \right) \right]. \square$$

Este valor de la velocidad corresponde al que produce un máximo de compresión del resorte. Es claro que el resorte pudo haberse detenido antes con el mismo resultado:

quedarse estático en dicha posición debido a que la fuerza de restitución del resorte es menor que el máximo de la fuerza de fricción del piso.

Este resultado se puede leer en la última ecuación: allí el término  $2\mu_c g D$  corresponde al valor de la velocidad para la cual el resorte no alcanza a comprimirse. El término extra representa el máximo valor *adicional* que puede tener  $V^2$  antes de comprimir el resorte más allá de lo que puede resistir el roce estático.

Cualquier valor de  $V^2$  entre ambos límites produce el mismo efecto: el resorte se detiene después de comprimirse,

$$2\mu_c g D < V^2 < 2\mu_c g D + \frac{m g^2 \mu_e \mu_c}{k} \left( 2 + \frac{\mu_e}{\mu_c} \right). \square$$

En este último ejemplo no hemos analizado lo que sucede al ponerse en contacto la masa  $m$  con el extremo del resorte. Como la masa trae una cierta velocidad y el resorte está en reposo, lo que ocurre es un *choque* entre estos dos objetos. Como se estableció que la masa del resorte era despreciable, bajo esas circunstancias no hay nada que analizar. Sin embargo, una masa finita para la placa ubicada al final del resorte, cambia el problema y, en ese esquema, debemos analizar más cuidadosamente el problema. Este tipo de fenómenos, que incluyen choques, lo estudiaremos en una sección posterior.

## V.6. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Estudiemos ahora el caso de un sistema masa-resorte que oscila verticalmente incorporando además la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa  $m$ . La ecuación de movimiento es,

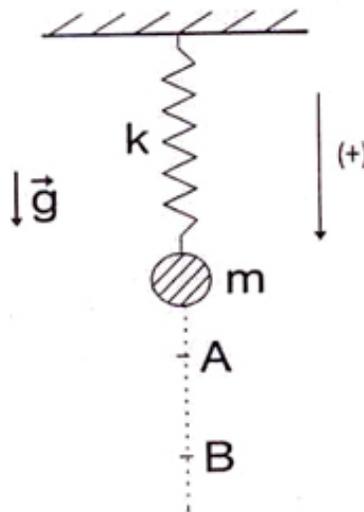
$$\sum F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Tomando como positivo el sentido que apunta hacia el centro de la Tierra, tenemos:

$$+m g - k x = m \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (+) \downarrow \quad (\text{V.28})$$

Repitiendo el mismo proceso usado anteriormente: multiplicar cada uno de los miembros de esta ecuación por  $\Delta x_i$  y posteriormente sumar estas expresiones a lo largo de la trayectoria, (es decir, integrar las ecuaciones de movimiento), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_A^B (+m g \Delta x_i - k x_i \Delta x_i) &= \\ &= \sum_A^B m \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \Delta x_i \end{aligned}$$



En esta última ecuación, el primer término establece el trabajo que realizan las fuerzas externas sobre la masa. A la derecha de la igualdad aparece la energía cinética de la masa  $m$ . Para ponerla en la forma usual, [V.22], necesitamos trabajar un poco.

Reescribiendo la sumatoria y usando los resultados obtenidos en [V.22] tenemos:

$$+m g \sum_A^B \Delta x_i - \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - m v_A^2, \quad (\text{V.29})$$

La sumatoria del primer término es fácil de evaluar, la suma de los  $\Delta x_i$  es el camino total recorrido:  $(x_B - x_A)$ . Incorporando este resultado, se tiene:

$$+m g x_B - m g x_A - \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Reordenando en la forma usual, es decir, todos los términos con el mismo índice en el mismo lado de la ecuación, llegamos a:

$$-m g x_A + \frac{1}{2} k x_A^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 = -m g x_B + \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

Energía	Energía	Energía
Potencial	Potencial	Cinética
Gravitacional	Resorte	

Vemos que la suma de la energía potencial del campo gravitacional, la energía potencial del resorte más la energía cinética de la masa  $m$  toma el mismo valor en cualquier punto

de la trayectoria. Ya sabemos que esta propiedad es precisamente una ley de conservación. Indica que hay una cantidad  $E_0$ , que no varía a lo largo de la trayectoria:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \text{constante.} \quad (\text{V.30})$$

Hemos derivado la expresión que toma la conservación de la energía para el caso de un resorte oscilando en un campo gravitacional uniforme. Esta fórmula se obtuvo tomando el eje vertical como positivo cuando apunta hacia el centro de la Tierra. Al definir el sentido opuesto como positivo, sólo debe cambiar el signo frente al término  $mgx$ .

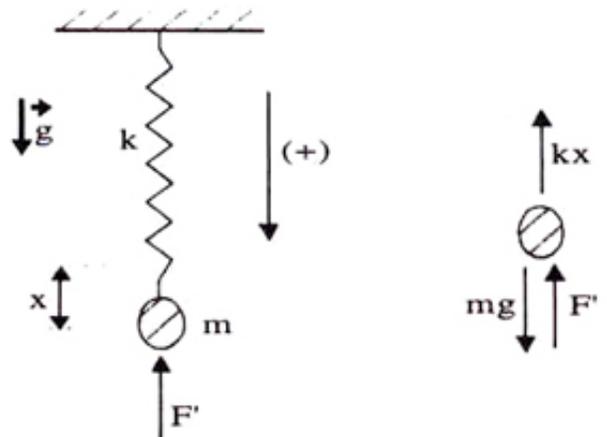
### Ejemplo

Mencionamos la diferencia que existe entre soltar súbitamente una masa que cuelga de un resorte y depositarla suavemente de forma que no quede oscilando. En este último caso es fácil encontrar la elongación máxima del resorte, se trata de aplicar una fuerza  $F'$  (por parte de la persona que coloca la masa) de forma que mantenga un pequeño desequilibrio del sistema en cada punto.

A continuación calculamos la elongación máxima en las dos situaciones usando el método de la energía.

a) Caso en que la masa se deposita **lentamente** en el resorte.

El resorte tiene inicialmente su largo natural y depositamos la masa  $m$  aplicando una fuerza  $F'$  que sea un poco menor que el peso de la masa  $m$ . Con esto el resorte se estira un poco para aportar la fuerza que falta, enseguida, se disminuye la fuerza  $F'$  aplicada, de esta forma el resorte necesita alargarse un poco más para soportar la masa y así el proceso se vuelve a repetir hasta que la fuerza que aporta el resorte cancela exactamente el peso del objeto que se ha colgado.



En ese instante el sistema está en equilibrio, y se cumple:

$$mg - kx_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}. \quad (\text{V.31})$$

*Esta es la elongación máxima alcanzada si la masa se deposita suavemente.*

b) Veamos cuál es la elongación máxima del resorte si, estando inicialmente en reposo con su largo natural, unimos la masa  $m$  a su extremo y la soltamos súbitamente.

Designamos como origen de coordenadas al punto extremo del resorte en el instante que éste adopta su largo natural.

En el instante  $t = 0$ , justo cuando *soltamos* la masa, su *velocidad es nula* y también su coordenada  $x$ ,  $x(t = 0) = 0$ , puesto que el resorte aún no comienza a alargarse. (Si le hubiésemos dado un impulso inicial, su velocidad sería distinta de cero en ese instante). Su aceleración no es nula y por lo tanto en un instante posterior comenzará a moverse.

Al soltar la masa  $m$  el sistema comienza a oscilar y no hay disipación de energía por efecto del roce, por lo tanto  $E_0$  se conserva en la forma que aparece en la ecuación [V.30].

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx, \quad (\text{V.32})$$

Al evaluar  $E_0$  en  $t = 0$ , obtenemos:

$$E_0 = 0 + 0 - 0 = 0,$$

de forma que en cualquier otro instante:

$$E_0 = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx. \quad (\text{V.33})$$

Nos interesa el punto de elongación máxima, porque allí se *detiene* momentáneamente el resorte, y entonces  $v(x = x_{\text{máximo}}) = 0$ .

$$0 = \frac{1}{2}k\bar{x}_0^2 - mg\bar{x}_0 \quad \bar{x}_0 \equiv \text{elongaciones extremas del resorte,}$$

$$0 = \bar{x}_0(\bar{x}_0 - 2\frac{mg}{k}), \quad \rightarrow \text{Se obtienen dos soluciones.}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_0 = 2\frac{mg}{k} \quad \rightarrow \text{Máxima elongación del resorte al soltar súbitamente la masa } m.$$

$$\Rightarrow \bar{x}_0 = 0 \quad \rightarrow \text{Máxima altura que alcanza la masa } m \text{ en su rebote.}$$

Ambas soluciones tienen una interpretación física:  $\bar{x}_0=0$  corresponde a la máxima altura que puede alcanzar esta masa al oscilar alrededor del punto de equilibrio  $mg/k$ .

La elongación asociada a la otra solución es el *doble* de la obtenida al depositar lentamente la masa  $m$ . Si nuestro objetivo es alcanzar el punto de rotura del resorte

(o la cuerda!), podemos forzar aún más el alargamiento del resorte si inicialmente le imprimimos una cierta velocidad  $v_0$  a la masa  $m$ .

Se deja propuesto como ejercicio calcular el valor de la máxima amplitud,  $\bar{x}_0$  en este caso.  $\square$

Usando la misma ecuación de energía podemos recuperar algunos resultados ya conocidos. Usando esta ley de conservación y eliminando el resorte, es decir haciendo  $k = 0$  en las ecuaciones, podemos reobtener una fórmula de cinemática.

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 - m g x, \quad \text{con } k = 0.$$

En su forma original, esta ecuación es:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - m g x_f = \frac{1}{2} m v_i^2 - m g x_i.$$

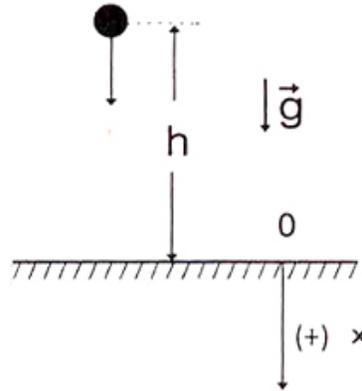
Reescribiéndola, se obtiene:

$$v_f^2 - v_i^2 = +2g(x_f - x_i), \quad (\text{V.34})$$

Esta es la misma expresión encontrada en el Capítulo II.

Veamos un ejemplo de este tipo.

Con las siguientes condiciones iniciales en  $t = 0$ :  $v = 0$  y  $x = -h$ , la constante  $E_0$  toma el valor  $E_0 = m g h$ .



Al tocar el suelo,  $x = 0$ . De aquí tenemos:

$$E = m g h = m g 0 + \frac{1}{2} m v^2, \quad \text{entonces,} \quad v^2 = 2 g h.$$

Esta expresión corresponde a la conservación de la energía para el caso de una *fuerza constante* actuando sobre la masa  $m$ . (Note la definición del sentido positivo del eje  $x$  usada en este ejemplo).

## V.7. PENDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Anteriormente demostramos que para oscilaciones pequeñas la ecuación de movimiento de un péndulo en un campo gravitacional podía ser resuelta y su solución correspondía a la de un oscilador armónico.

Resolver las ecuaciones de movimiento significa encontrar  $\theta = \theta(t)$ .

Haciendo uso de la definición de trabajo podemos encontrar una relación entre la velocidad angular  $\dot{\theta}$  y la posición  $\theta$  del péndulo para una oscilación de amplitud arbitraria, no sólo de oscilaciones pequeñas como se hizo anteriormente.

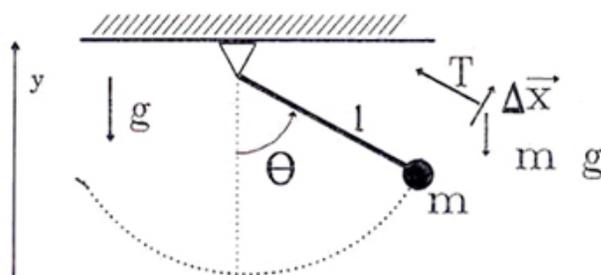


Figura V.13: En el movimiento del péndulo la tensión no realiza trabajo. Sólo la componente vertical del desplazamiento lo hace debido a la fuerza gravitacional.

Calculemos el trabajo necesario para desplazar el péndulo entre los puntos  $A$  y  $B$ , arbitrarios. Definimos  $\Delta x$  como un pequeño desplazamiento que experimenta la masa que cuelga en el extremo de la cuerda:

$$W_A^B = \sum_A^B [-m \vec{g} \cdot \Delta \vec{x}] + \sum_A^B \vec{T} \cdot \Delta \vec{x} = \sum_A^B m \vec{v} \cdot \Delta \vec{v},$$

como la tensión es perpendicular al desplazamiento  $\Delta \vec{x}$  de la masa  $m$  del péndulo en cualquier punto de la trayectoria, entonces:

$$\vec{T} \cdot \Delta x = 0, \quad \text{en todo instante,}$$

de esta forma, sólo permanece un término en la expresión del trabajo y, a mano derecha aparece la energía cinética, como es habitual en todos estos casos:

$$W_A^B = \sum_A^B m \vec{g} \cdot \Delta \vec{x} = \frac{1}{2} (m \vec{v}_B^2 - m \vec{v}_A^2).$$

Como se puede apreciar de la Figura [V.13],  $\vec{g} \cdot \Delta \vec{x} = -g \Delta y$ , el trabajo realizado para llevar el péndulo de  $A$  a  $B$  es proporcional a la diferencia de altura  $y_B - y_A$ , entre las

dos posiciones. De esta forma, el valor de la energía entre ambos puntos es:

$$-m g y_B + m g y_A = \frac{1}{2} (m \vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2).$$

Ordenando en la forma usual, obtenemos la conservación de la energía para el caso de un péndulo moviéndose en un campo gravitacional constante:

$$E_o = m g y + \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2, \quad (\text{V.35})$$

donde hemos definido la velocidad tangencial como  $\ell \dot{\theta}$ .

## V.8. MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

Muchos fenómenos naturales presentan aproximadamente las características de un movimiento armónico simple. La diferencia entre las oscilaciones armónicas que ocurren en la naturaleza y aquéllas que se observan en un oscilador ideal radican en la conservación de la energía. La energía de un oscilador real disminuye en forma perceptible al cabo de algunas oscilaciones. Este efecto tiene su origen en el trabajo que realizan las fuerzas disipativas presentes en el sistema. La disminución de energía, en estos casos, se materializa en el decrecimiento gradual que experimenta la amplitud de la oscilación. Esto es lo que se denomina *Amortiguamiento* de la oscilación.

Un modelo matemático simple, que sin embargo introduce los ingredientes esenciales del proceso de amortiguamiento, incluye la disipación de energía a través de una fuerza proporcional a la velocidad instantánea del sistema pero que se opone al movimiento.

Para ilustrar este modelo, consideremos el movimiento de una masa unida a un resorte de constante de rigidez  $k$  sometida a una fuerza de roce del tipo  $f = -bv(t)$ . En esta expresión  $b$  es una constante positiva y  $v(t)$  es la velocidad instantánea de la partícula. De acuerdo a la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$F = m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$$

donde,

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad ; \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$$

El problema ahora consiste en encontrar la función  $x(t)$  que satisface la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{V.36})$$

En este libro nos limitaremos a presentar la solución y a discutir brevemente las tres familias de soluciones que caracterizan a este modelo.

Al cambiar la dependencia de las fuerzas disipativas en la velocidad, por ejemplo, hacerla proporcional al *cuadrado de la velocidad*, se obtienen otras soluciones, más complejas que las tratadas aquí.

La solución de la ecuación [V.36] es:

$$x(t) = A \exp(-bt/2m) \cos(\omega_f t + \phi) \quad (\text{V.37})$$

donde  $\omega_f$  es igual a: 
$$\omega_f = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

Dependiendo del valor de  $\omega_f^2$  se pueden distinguir tres familias de soluciones, cuya representación gráfica se incluye en la Figura [V.14]. Estas son:

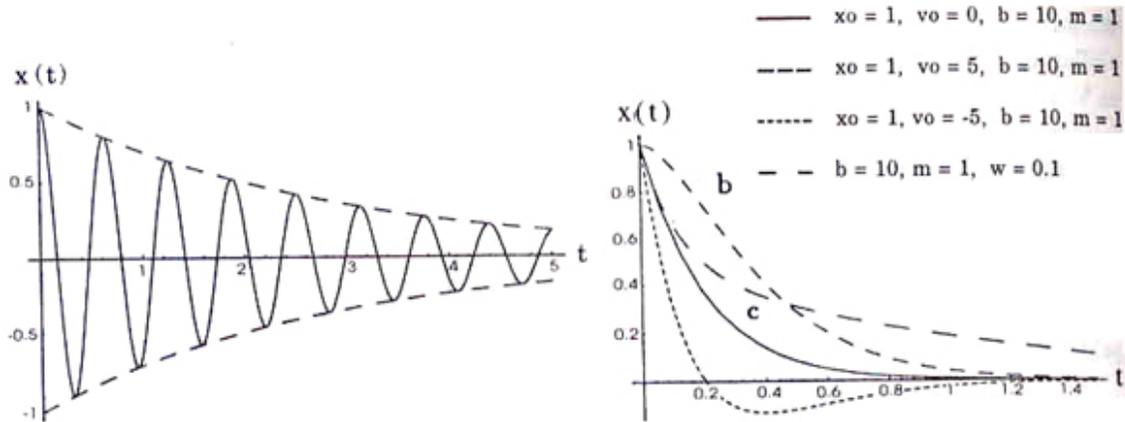


Figura V.14: Se incluye una clasificación de los movimientos amortiguados en tres tipos: (a) Amortiguamiento normal, (b) Caso crítico y (c) Sobreamortiguamiento

a) Movimiento Amortiguado:  $\omega_f^2 > 0$

Gráfico (a) de la Figura [V.14 a)].

b) Movimiento Sobreamortiguado:  $\omega_f^2 < 0$

La función  $\cos(\omega_f t + \phi)$  se transforma en una función hiperbólica,  $\cosh(\omega_f t + \phi)$ . Este caso representa un movimiento *sobreamortiguado* Figura [V.14 b)]. El sistema no oscila y la amplitud decrece monótonicamente en el tiempo.

c) Caso Crítico:  $\omega_f = 0$

En el caso (c) la solución de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = C_1 (1 + C_2 t) \exp(-bt/2m)$$

El gráfico de esta función se muestra en la Figura [V.14 c)]. El sistema *no oscila* y disipa su energía más rápidamente que en los casos anteriores.

## V.9. MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO

Existen muchas situaciones donde un oscilador armónico oscila con una frecuencia impuesta por un mecanismo externo, por ejemplo: la membrana de un micrófono es *forzada* a oscilar con la frecuencia de la onda de sonido que incide sobre ella. Esta frecuencia externa, en general, no coincide con la frecuencia de oscilación propia.

Las características del movimiento armónico forzado las podemos estudiar en el sistema más simple: un resorte unido a una masa sobre la cual se aplica una fuerza externa que varía periódicamente con frecuencia angular  $\omega$  ( $f = f_0 \cos \omega t$ ). Simultáneamente supondremos que actúa una fuerza de roce de magnitud proporcional a la velocidad instantánea de la masa y que apunta en dirección contraria a ésta.

La ecuación de movimiento es similar a la ecuación del movimiento armónico simple, excepto por la aparición de un término adicional debido a la fuerza armónica externa:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = f_0 \cos(\omega t) \quad (\text{V.38})$$

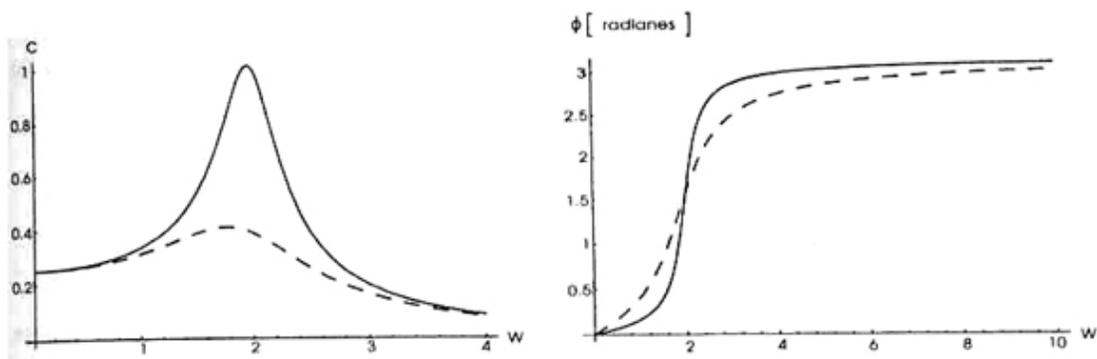


Figura V.15: Amplitud y fase de la oscilación forzada en función de la frecuencia de la fuerza aplicada. La línea punteada muestra el efecto de aumentar el valor de la constante de amortiguamiento  $b$ , manteniendo fijos el resto de los parámetros.

La evolución de este sistema, desde el instante en que se conecta la fuerza externa se compone de una superposición de dos movimientos armónicos de distinta frecuencia. Supongamos que inicialmente el sistema estaba en reposo y que en  $t = 0$  comienza a actuar la fuerza armónica. El sistema tarda un cierto tiempo en adecuarse a esta situación –denominada etapa transiente–, cuyo largo depende de los parámetros propios del sistema ( $m, k, y b$ ). Pasado ese tiempo, que en general es muy corto comparado con el período de oscilación de la fuerza externa (siempre que el término de fricción sea pequeño), el sistema evoluciona de acuerdo a la expresión:

$$x(t) = C \cos(\omega t - \phi), \quad \text{donde:}$$

$$C = \frac{f_0}{\left[ m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2 \right]^{1/2}},$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad y, \quad \tan \phi = \frac{b \omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La Figura [V.15] muestra como cambia la amplitud de la oscilación forzada,  $C$ , en función de la frecuencia de la fuerza armónica aplicada:  $\nu (\omega \equiv 2\pi\nu)$ . Allí se aprecia que la amplitud crece rápidamente en la vecindad de  $\omega = \omega_0$ , alcanza el valor máximo para esa frecuencia, y luego decrece rápidamente para valores mayores que  $\omega_0$ . Cuando  $\omega = \omega_0$  decimos que el sistema está en *resonancia*. Note que, de no existir el término disipativo (i.e., si  $b$  fuera cero), la amplitud de la oscilación forzada tendería a infinito en la condición de resonancia.

La Figura [V.15] muestra, además, cómo varía la constante de fase  $\phi$  en función de la frecuencia angular  $\omega$ .

## V.10. CHOQUES

### V.10.1. Choques elásticos

Al desarrollar el ejemplo de dos masas que se encuentran inicialmente comprimiendo un resorte (sección [V.4]), demostramos que el *momentum total* de las dos masas, se mantenía constante. Destacamos que éste era un resultado general, que no estaba limitado a dicho problema.

Existe otra situación donde ocurre algo similar: en los choques entre dos o más partículas. Por choque entendemos que dos partículas están en contacto por un tiempo muy corto. Durante ese intervalo, el movimiento relativo de las partículas es despreciable y, aun cuando existan fuerzas externas, como gravitación, fricción,...etc., ellas no afectarán lo que suceda durante el choque. De esta forma en el intervalo en que transcurre el choque, *el momentum del sistema de partículas se conserva*.

Pensemos concretamente en la colisión de dos esferas de acero: durante el choque estas esferas se deforman y posteriormente recuperan su forma original, después de un tiempo muy corto, en el cual la energía de las vibraciones que sufren las esferas, son disipadas totalmente.

De la tercera ley de Newton se desprende que durante la deformación, la fuerza ejercida por una de las esferas sobre la otra, es la misma –salvo el sentido–, que la fuerza que ejerce la otra esfera sobre la primera. De este modo, durante dicho intervalo la suma de las fuerzas externas es nula en la dirección del choque, y por lo tanto se conserva el momentum, como explicamos en la sección [V.4].

Pero además existe otra consecuencia, tan importante como la anterior: al chocar las esferas quedan vibrando (por esta razón es posible escuchar el instante en que se produce el choque). Si suponemos que estas vibraciones *no consumen una parte importante de la energía inicial de los objetos* y aún más, que cada una de ellas recupera finalmente su forma original, afirmamos que la energía también se conserva y a este tipo de choques se le denomina *choque elástico*.

Esta última propiedad se basa en la suposición, gratuita de nuestra parte, que la energía disipada durante el choque es despreciable. Es claro, entonces, que se nos debe advertir de un comienzo que el *choque es elástico* y que por lo tanto, la energía se conserva durante su transcurso, puesto que ésta, más que una consecuencia que se desprende de primeros principios, es una aproximación, válida sólo en ciertos casos.

No sucede lo mismo con la conservación del momentum: proviene directamente del principio de acción y reacción establecido en la tercera ley de Newton y *necesariamente se conserva*.

*El momentum siempre se conserva durante los choques.*

$$\text{CHOQUE ELASTICO} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ CONSERVACION DE LA ENERGIA} \\ \bullet \text{ CONSERVACION DEL MOMENTUM} \end{array} \right.$$

En la resolución de un problema, la existencia de un choque elástico se traduce en las siguientes condiciones:

- a) La posición de los objetos no cambia durante el choque.
- b) La conservación de la energía se reduce a la conservación de la energía cinética solamente, puesto que la posición de los objetos no cambia durante el choque.

c) La velocidad de los objetos puede variar abruptamente como consecuencia del choque.

d) La palabra *abruptamente* indica que todo sucede en un intervalo muy pequeño comparado con cualquier otra escala de tiempo que caracterice naturalmente al sistema estudiado.

### Ejemplo

Suponga un choque *perfectamente elástico* entre la masa  $m$  que se acerca por la izquierda con velocidad  $V_0$  y la esfera, idéntica en tamaño, pero de masa  $M$  que se encuentra detenida antes del choque.

Calcule la velocidad de ambas después del choque.

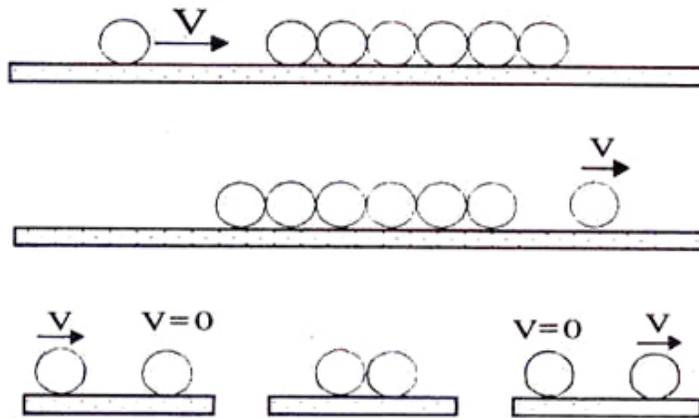


Figura V.16: Todas las masas son iguales y perfectamente elásticas. Al chocar, la bola que avanza por la izquierda queda en reposo y la última recupera la velocidad incidente. En el texto se analiza el caso más simple del choque de dos bolas en una dimensión.

El afirmar que el choque es perfectamente elástico es otra forma de decir que la energía se conserva en este proceso.

Como se conserva la energía y el momentum, tenemos dos ecuaciones. A la izquierda de estas ecuaciones escribimos el momentum (y la energía) justo antes del choque y a la derecha justo después del choque:

$$m V_0 = m u_0 + M v \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 + \frac{1}{2} M v^2. \quad (2)$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación y reemplazándola en la segunda, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(u_0 + \frac{M}{m} v\right)^2 &= u_0^2 + \frac{M}{m} v^2, \\ u_0^2 + 2\frac{M}{m} v u_0 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 v^2 &= u_0^2 + \frac{M}{m} v^2, \\ 2 u_0 + \left(\frac{M}{m}\right) v &= v, \\ u_0 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{m}\right) v. \end{aligned}$$

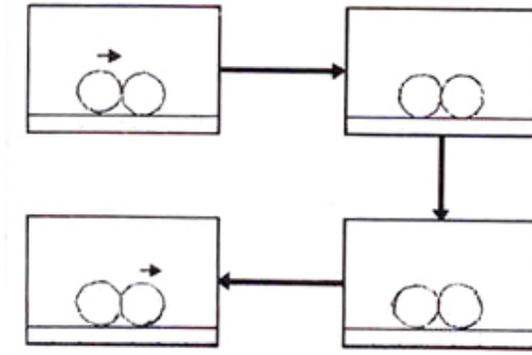


Figura V.17: El diagrama indica cualitativamente cómo se transmite el momento. La fuerza de acción empuja a su vecina y la de reacción frena a la incidente. Como la energía se conserva las esferas no vibran, no aumentan su temperatura ni quedan deformadas.

Finalmente notamos que si  $m = M$ , entonces  $u_0 = 0$ : es decir, la masa que venía con velocidad  $V_0$  se detiene y la masa  $M$ , que se encontraba inicialmente en reposo, adquiere toda la velocidad  $V_0$ .

### V.10.2. Choque inelástico

Ocurre cuando la energía no se conserva durante el choque.

En este caso es posible calcular, mediante un experimento, la cantidad de energía disipada y así conocer la energía final mediante un factor numérico que denominamos  $e$ , tal que  $e < 1$  siempre. Con este dato empírico, la ecuación de la energía se expresa como:

$$E_{\text{inmediatamente después del choque}} = e E_{\text{... antes del choque}}, \quad \text{con } e < 1. \quad (\text{V.39})$$

De este modo, al conocer  $e$  tenemos una ecuación adicional a la conservación del momentum para resolver el problema de los choques entre partículas.

Existe un tipo de choque que se aparta del caso anterior, se caracteriza porque ambas partículas permanecen unidas después de colisionar. Cuando esto ocurre, existe sólo una velocidad por determinar en el problema y ésta se puede calcular a partir de la conservación de momentum que, como hemos enfatizado, siempre se conserva .

Este último tipo de choque se denomina *totalmente inelástico*. Queda caracterizado por provocar una *deformación permanente* de uno (o ambos) de los objetos participantes. Para ilustrar esta idea analizaremos el caso del choque totalmente inelástico de dos bloques, infinitamente rígidos, separados por un trozo de plastilina. El comportamiento final es que ambos cuerpos continúan viajando unidos. La plastilina se encarga de absorber la deformación mencionada y también de evitar la separación de las dos masas después del choque.

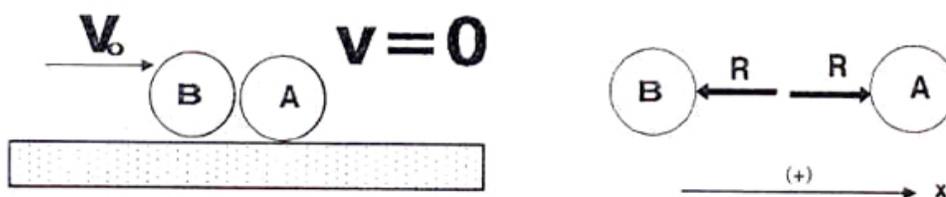


Figura V.18: Durante el choque sólo actúan fuerzas internas, de acción y reacción entre las dos masas que se anulan mutuamente. A partir de este resultado se demuestra que la suma del momentum de cada una de las partículas permanece constante durante la colisión.

En la Figura [V.18], la fuerza  $-R$  indica la reacción de la masa  $M_A$  sobre  $M_B$  y  $R$  la acción de  $M_B$  sobre  $M_A$ . El sentido que se les dió a los vectores, obedece la tercera ley de Newton. Aplicando, la segunda ley de Newton y considerando sólo el eje  $x$ , tenemos:

$$M_A \cdot a_A = +R,$$

$$M_B \cdot a_B = -R,$$

sumando ambas ecuaciones:

$$M_A \cdot a_A + M_B \cdot a_B = 0. \quad (\text{V.40})$$

Suponiendo ambas masas iguales ( $M_A = M_B$ ), con el único objeto de simplificar el algebra, tenemos que  $a_A + a_B = 0$ .

La aceleración de uno de los cuerpos es exactamente igual a la desaceleración del otro durante el choque. Como uno de ellos tiene velocidad inicial distinta de cero ( $v_0$ ), el cuerpo B avanza más rápidamente que A. Esto es posible sólo si la plasticina comienza a deformarse, como se aprecia en el gráfico de velocidad *versus* tiempo de cada una de las partículas.

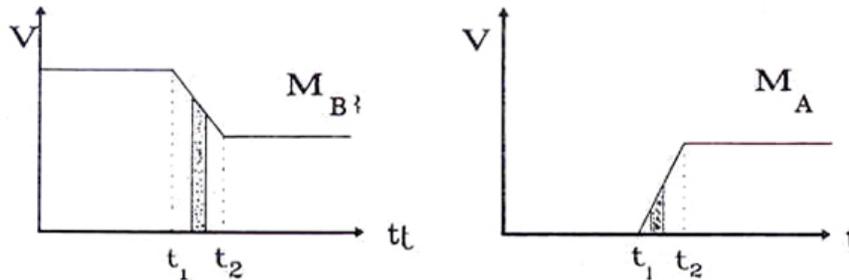


Figura V.19: El área achurada corresponde al camino recorrido, en el mismo intervalo de tiempo, por ambos objetos durante el choque. La diferencia en el valor del área corresponde a la deformación que sufren los cuerpos.

Hemos achurado el área velocidad vs. tiempo en el primer intervalo  $\Delta t$ . Como sabemos, esta área representa el espacio recorrido por cada uno de los objetos.

Se ve de inmediato que  $M_B$  recorre una distancia mayor que  $M_A$  y por lo tanto la plasticina se deforma. Esta se debe deformar hasta el instante  $t_2$ , a partir del cual las distancias recorridas por ambos cuerpos son las mismas y por lo tanto viajan a la misma velocidad.

Calculemos el valor de la velocidad  $\bar{v}$  del sistema  $M_A$  y  $M_B$ . La masa  $M_B$  avanza con velocidad  $v_0$  sobre  $M_A$ . El piso **no** tiene roce y por lo tanto no existe ninguna fuerza horizontal (dirección  $x$ ).

Reformulamos la ecuación [V.40] de forma que aparezca el momentum de ambas partículas explícitamente:

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} \equiv \frac{P_f|_x - P_i|_x}{\Delta t} = 0,$$

donde  $P_x \equiv (P_A + P_B)$ . El momentum total del sistema es la suma del momentum de cada una de las partículas. Esta es una suposición que no parece contradecir los resultados experimentales.

$P_f|_x$  representa el valor del momentum de ambas partículas después del choque:  $P_f|_x = P_{A+B}$ , puesto que viajan juntas.

De esta última ecuación obtenemos:

$$\Delta P_x \equiv [P_f|_x - P_i|_x] = 0. \tag{V.41}$$

Antes del choque, la cantidad de movimiento era:

$$(P_i)_x = M_B \cdot v_0 + M_A \cdot 0.$$

Después del choque,

$$(P_f)_x = [M_B + M_A] \bar{v}.$$

Usamos la definición de un choque *totalmente inelástico*: las dos partículas quedan unidas en el choque y posteriormente se mueven con la misma velocidad. Esta situación es un caso especial. Lo usual es que las partículas después del choque se separen y viajen a velocidades diferentes.

Por la conservación del momentum,

$$M_B \bar{v} + M_A \bar{v} = M_B v_0$$

$$\bar{v} = \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot v_0.$$

Si  $M_B \rightarrow \infty$ , entonces  $\bar{v} = v_0$ , como era de esperar de acuerdo a lo que se observa en la vida diaria. Si un camión muy pesado colisiona con un auto pequeño, el primero casi no se afecta por el choque.

Otro caso límite ocurre cuando  $M_B \rightarrow 0$ , la velocidad  $\bar{v} \rightarrow 0$ , que es lo que sucede al tirar un pedazo de plasticina contra un objeto mucho más pesado. En realidad, cuando indicamos que  $M_B$  tiende a cero, físicamente estamos indicando que  $M_A$  es mucho mayor que  $M_B$ . El concepto de grande o pequeño en física es relativo.

Analicemos lo que sucede paso a paso durante el choque totalmente inelástico.

### Choques de Masas Idénticas

Absolutamente Inelástico



Elástico

Las dos masas viajan unidas después del choque.



Una masa se detiene y la otra obtiene la velocidad de la primera.

### V.10.3. Choques en dos dimensiones

Analicemos brevemente qué sucede con un choque de dos partículas puntuales en un plano. El desarrollo en este caso es idéntico al realizado anteriormente salvo una diferencia: las ecuaciones son vectoriales.

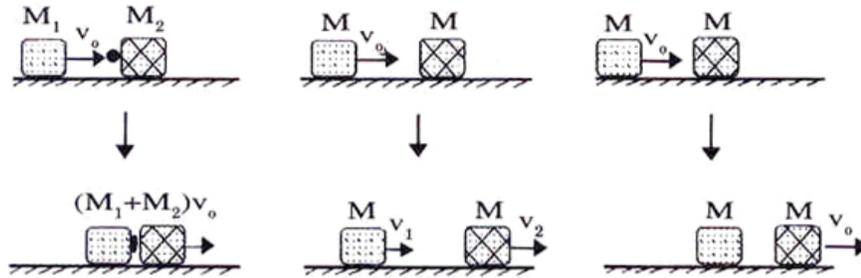


Figura V.20: Se ilustra la diferencia entre un choque elástico y uno inelástico entre dos masas iguales. La línea superior indica la situación antes del choque y la inferior el movimiento después del choque. El momentum se conserva siempre, en todos los choques.

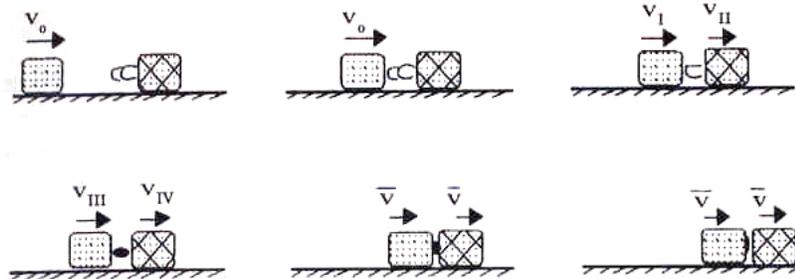


Figura V.21: Aquí se intenta explicar, en cámara lenta, lo que sucede durante un choque inelástico. En este choque hay un material que se deforma permanentemente absorbiendo parte de la energía del sistema. En consecuencia no hay conservación de la energía en este tipo de choques.

La conservación del momentum genera dos ecuaciones. La conservación de la energía, una ecuación adicional. En total, para el *choque elástico* tenemos tres ecuaciones, de esta forma podemos calcular una velocidad con sus dos componentes y una componente de la otra velocidad, o sólo su dirección, por ejemplo, pero no su magnitud.

Supongamos ahora un *choque inelástico*. Del párrafo anterior, sabemos que hay dos ecuaciones a nuestra disposición. Para poder resolver un problema de este tipo (choque entre dos partículas) debemos conocer, además de los vectores velocidad de las dos partículas con su dirección y magnitud, el vector velocidad de una de las partículas *después del choque*.

A continuación, procedemos a calcular el valor de la velocidad de la partícula restante, con estos datos.

El momentum se conserva en cada una de las dimensiones en forma independiente.

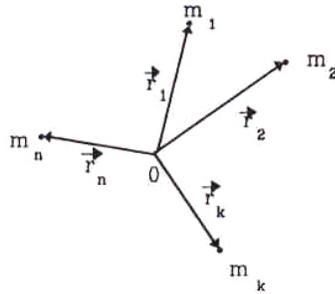


Figura V.22:

Esto es:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_3 + m_2 \cdot \vec{v}_4,$$

la cantidad a la izquierda del signo igual, representa  $\vec{P}_i$ , el momentum inicial.  $\vec{P}_f$  representa el momentum final, después del choque. De aquí tenemos:

$$\vec{v}_4 = \frac{1}{m_2} [m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_3) + m_2 \cdot \vec{v}_2]$$

#### V.10.4. Fuerzas impulsivas

A veces es conveniente referirse a la fuerza promedio que actúa durante un choque. En realidad la variación de la magnitud de las fuerzas durante el choque es muy difícil de analizar. Por esta razón, es más práctico *suponer* que durante el choque existe una *fuerza promedio*, supuestamente constante que aparece y desaparece abruptamente.

Si analizamos lo que sucede con la segunda ley de Newton en este caso, tenemos:

$$\vec{F}_{\text{impulsiva}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}. \quad (\text{V.42})$$

Es conveniente referirse al cambio de momentum generado por la fuerza impulsiva porque esta estrategia se utiliza para resolver problemas de masa variable y en esos casos conviene utilizar al momentum en lugar de la velocidad.

Otra forma que puede tomar la ecuación anterior es la siguiente:

$$\text{Impulso} \equiv \vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p} \equiv \vec{p}_{\text{después del choque}} - \vec{p}_{\text{antes del choque}}. \quad (\text{V.43})$$

#### Ejemplo

En una correa transportadora se están depositando  $Q$  kg/s. ¿Cuál es el valor de la fuerza que debemos aplicar en los extremos para mantener constante la velocidad  $V$  de esta correa?

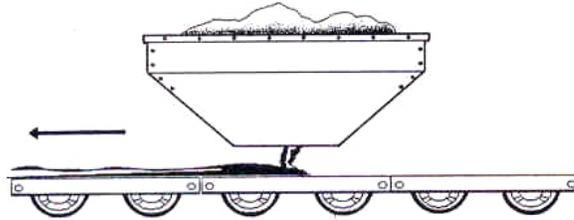


Figura V.23: Suponemos que la correa es plana y que constantemente está aumentando el material depositado sobre ella. La correa se desplaza hacia la izquierda.

Usamos la expresión para la fuerza impulsiva [V.43]:

$$F = \frac{p_{\text{después del choque}} - p_{\text{antes del choque}}}{\Delta t},$$

como la velocidad  $V$  de la correa, permanece constante, la variación del momentum proviene del aumento de masa en la correa. La diferencia entre el momentum final e inicial es:

$$\{m + \Delta m\} V - m V = \Delta m V = Q \Delta t V,$$

reemplazando en la primera ecuación y simplificando por  $\Delta t$ , tenemos:

$$F = Q V. \square$$

## V.11. EJERCICIOS

- 1.- Un cuerpo de masa  $m$  se lanza desde la base de un plano inclinado con velocidad  $V_0$ . Si el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano es  $\mu$ . Calcular:
  - a) La distancia recorrida hasta que  $m$  alcanza su altura máxima.
  - b) La velocidad con que vuelve al punto de partida.
- 2.- Una partícula de masa  $m$  parte del reposo y se desliza sobre la superficie de una esfera sólida de radio  $R$ . Midiendo el ángulo  $\varphi$  desde la vertical, y suponiendo que no existe fricción:
  - a) Determine la energía cinética de la partícula en función de  $\varphi$ .
  - b) Las aceleraciones radial y tangencial de la partícula en función de  $\varphi$ .

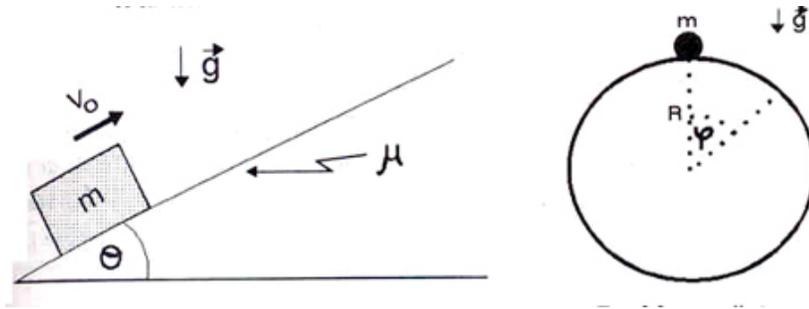


Figura V.24:

**Problema # 1****Problema # 2**

- c) Determine el valor del ángulo  $\varphi$ , para el cual la partícula pierde contacto con la superficie de la esfera.
- 3.- Una partícula de masa  $m$  está unida al extremo de una cuerda ideal de largo  $L$ , cuyo otro extremo está fijo en C. La partícula parte del reposo, desde la posición  $\phi = 0$ . Si la máxima tensión que puede soportar la cuerda sin cortarse es  $(3mg)/2$ , determine el valor de  $\phi$  para el cual se corta la cuerda.
- 4.- Un bloque de masa  $M$  descansa sobre una superficie horizontal, con coeficiente de roce estático  $\mu_e$ . Otro bloque de masa  $m$  se encuentra atado a él, mediante una cuerda ideal de largo  $L$ . Inicialmente este bloque se instala a la misma altura que  $M$  y a una distancia  $d$  del anillo A, indicado en la Figura. En esta posición la cuerda se encuentra extendida pero sin tensión. En un cierto instante se libera la masa  $m$ , la cual cae por gravedad, permaneciendo atada a la cuerda. Si  $M=2m$  y  $\mu_e=1$ , calcule el valor del ángulo  $\phi$  para el cual el bloque sobre la superficie horizontal comienza a deslizar.

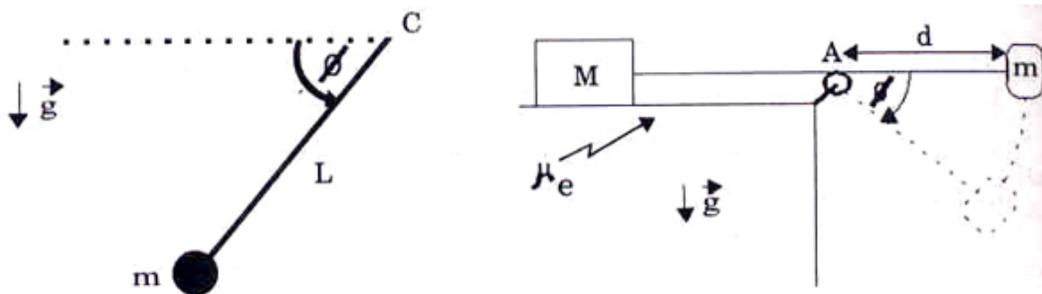


Figura V.25:

**Problema # 3****Problema # 4**

- 5.- En el sistema de la Figura, la masa  $m_1$  está unida a un resorte de constante elástica

$k$  y largo natural  $L_o$  y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa  $m_1$  existe un coeficiente de roce dinámico  $\mu$ .

Si en  $t=0$  el resorte tiene su largo natural y la masa  $m_2$  tiene una velocidad  $V_o$ , determine la velocidad de la masa  $m_2$  en el instante en que ha descendido una altura  $h$  con respecto a su posición inicial.

- 6.- Considere un bloque de masa  $M$  colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de constante  $k$  y largo natural  $L_o$ . Sobre el bloque se coloca una partícula de masa  $m$ . Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia  $d$  con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa  $m$  una vez que se libera el resorte.

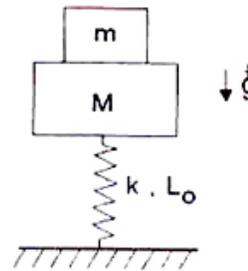
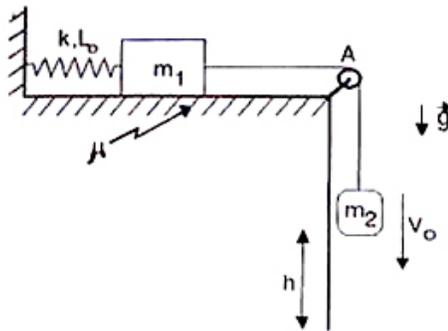


Figura V.26:

Problema # 5

Problema # 6

- 7.- Un resorte, de constante  $k$ , se encuentra inicialmente comprimido una distancia  $x_o$ , por medio de un hilo. En los extremos del resorte se han apoyado dos masas  $M$  y  $m$ , que se mantienen inmóviles por estar unidas por el hilo.

En cierto instante se corta el hilo y el resorte se expande. La partícula  $m$  sale disparada hacia la derecha y se desliza sin roce sobre una pista, que más adelante forma un círculo vertical de radio  $R$ . Conocidos  $M$ ,  $k$ ,  $x_o$  y  $R$  encuentre el máximo valor que puede tener  $m$  para que esta partícula no deje la pista. Analice el límite  $M \rightarrow \infty$ .

- 8.- En la Figura se muestra un riel fijo, vertical, pulido y que termina en un arco de circunferencia  $BC$  y de radio  $R$ . Una partícula de masa  $m$  se abandona en reposo en el punto  $A$ , y desliza hasta pasar por el extremo del arco  $C$ . Con estos datos, calcule:

a) La altura máxima –medida desde el punto  $C$ –, que alcanza la partícula.

b) Si al caer, la partícula pasa por el punto  $D$ , calcule el valor de  $CD$ . (El punto  $C$  está a la misma altura que el punto  $D$ ).

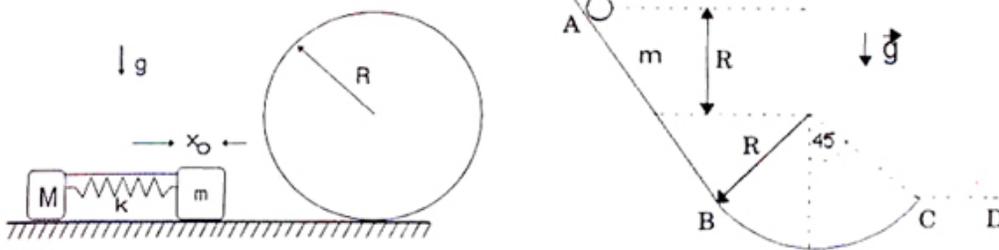


Figura V.27:

Problema # 7

Problema # 8

- 9.- Una partícula de masa  $m$  que se desliza sin roce sobre un anillo de radio  $R$ , se libera en el punto  $A$ . El anillo está unido a un resorte de constante  $k$ , cuyo otro extremo está fijo al punto  $P$ , a una distancia  $d$  del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con los otros largos. Si la partícula parte desde  $A$ , con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto  $B$  no ejerce ninguna fuerza sobre el aro. Calcule el valor de la distancia  $d$ . ¿Puede alcanzar  $d$  un valor nulo o negativo? Explique.
- 10.- El péndulo ideal está formado por una esfera  $E$  de masa  $m$ , unida a un extremo de una cuerda ideal cuyo otro extremo  $O$  está fijo a la Tierra. La esfera se suelta, a partir del reposo, desde la posición horizontal mostrada en la Figura. Al llegar al punto más bajo de su trayectoria choca con el bloque  $B$ , de masa desconocida, que se encuentra en reposo. Suponga que este choque puede ocurrir de sólo dos formas: puede ser perfectamente elástico o perfectamente inelástico.
- Determine cuál debe ser el valor de la masa  $B$ , para que después del choque el péndulo alcance la misma altura en cualquiera de los dos casos posibles.
- Note que en uno de ellos, ambas masas viajan separadas después del choque y en el otro, el choque inelástico, ambas se elevan unidas.
- 11.- Un anillo de masa  $2m$  se desliza por un aro circular pulido, de radio  $R$  ubicado en un plano vertical fijo. Inicialmente parte del reposo desde el punto más alto  $A$ . Al llegar a  $B$ , choca elásticamente con una partícula de masa  $m$ .
- Calcular el ángulo  $\theta$  que alcanza a subir la masa  $2m$ , después del choque.
- 12.- Un sujeto de masa  $M$  desliza con velocidad  $V_0$  sobre una superficie horizontal lisa ( $\mu = 0$ ), en dirección a una pared contra la que se estrellará. Cuando se encuentra

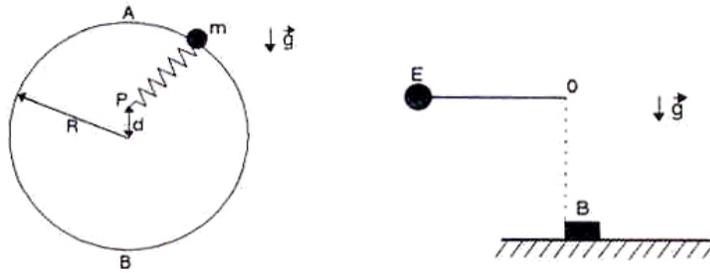


Figura V.28:

Problema # 9

Problema # 10

a una distancia *apropiada*, lanza una pelota de masa  $m$  que lleva consigo, en un desesperado intento por aminorar el impacto. Este infortunado logra lanzar la pelota con una *velocidad*  $u_o$ , con respecto a su persona. La pelota rebota elásticamente de modo que el sujeto alcanza a atraparla antes de estrellarse.

- a) Determinar la velocidad con que se estrella.
- b) Determinar el valor mínimo que debería tener  $u_o$  para evitar el impacto con la pared.

**Nota:** Suponga que la pelota, al ser lanzada viaja en línea recta en ambos tramos: ida y vuelta. Recuerde que la velocidad  $u_o$  está referida al sujeto y no al piso.

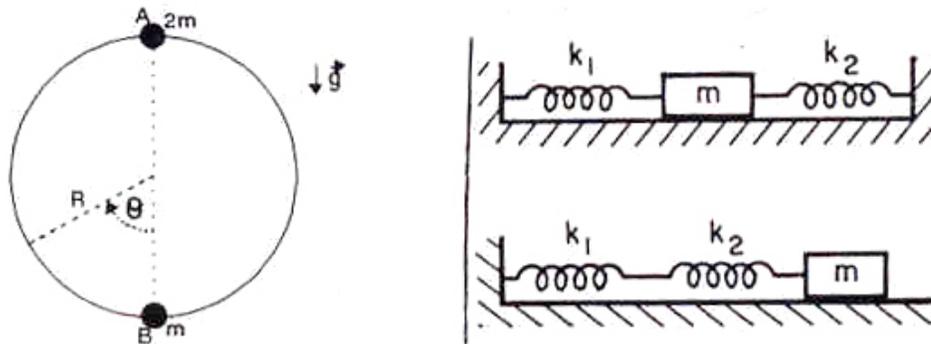


Figura V.29:

Problema # 11

Problema # 13

- 13.- Derive las ecuaciones de movimiento y encuentre los períodos de oscilación para los dos sistemas que aparecen en la Figura.  $m$  se mueve en la línea recta, en un plano horizontal sin roce y bajo la influencia de los dos resortes de rigidez  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente.

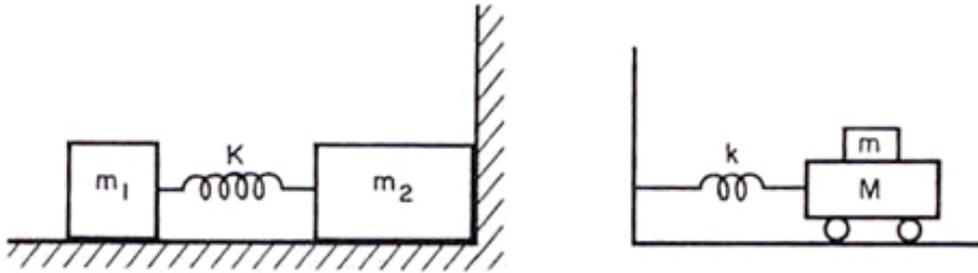


Figura V.30:

Problema # 14

Problema # 15

- 14.- Dos masas distintas  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ , descansan sobre una mesa sin roce. Si un resorte de constante  $k$  es comprimido una distancia  $d$ , con  $m_2$  pegado a la pared y entonces el sistema es abandonado desde el reposo, encontrar qué distancia viaja  $m_1$  antes que  $m_2$  comience a moverse.
- 15.- Dado el oscilador mecánico mostrado en la Figura. Encontrar la amplitud máxima de oscilación para que la masa superior no resbale sobre  $M$ . El coeficiente de fricción entre las masas es  $\mu$ .
- 16.- En el sistema de la Figura, la masa  $m$  realiza *pequeñas oscilaciones* alrededor de la posición de equilibrio –la línea vertical–, con una velocidad angular  $\omega$ .
- Encuentre el valor de la frecuencia de oscilación  $\omega$ , sin considerar la aceleración de gravedad.
  - Considere ahora el efecto de la aceleración de gravedad  $g$ , debido a las pequeñas variaciones que se producen en la altura de la masa  $m$  durante la oscilación.

