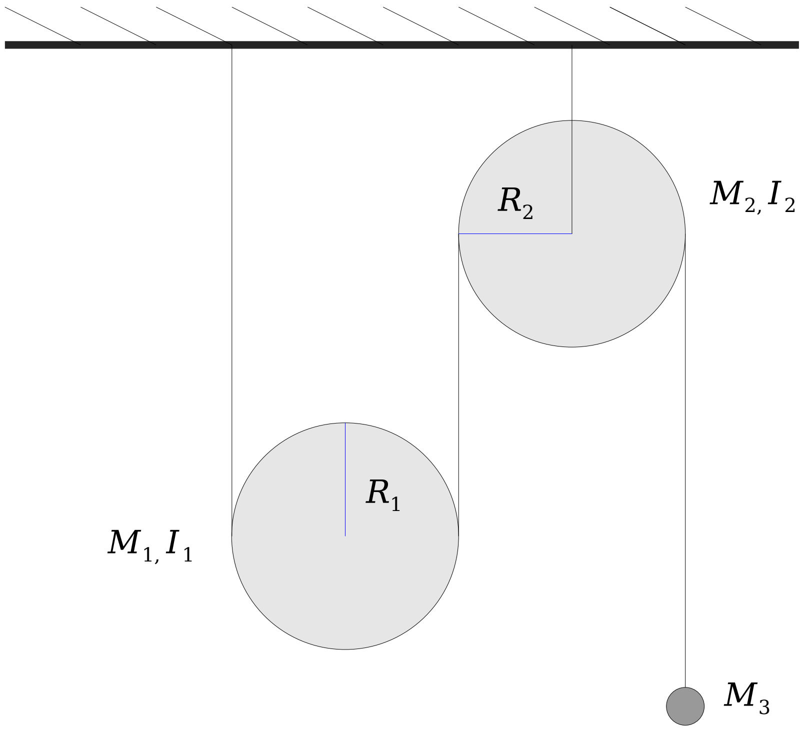
Auxiliar 6

Ejercicio Nº15, 2006-2, Rodrigo Soto

César Casanova Morales

Considere el siguiente sistema de la figura, donde una cuerda ideal que está unida al techo, pasa por una polea móvil de masa M_1 y momento de inercia I_1 , luego por una polea de masa M_2 y momento de inercia I_2 , que está fija al techo por otra cuerda ideal y finalmente está unida a una masa M_3 . Calcule la aceleración de la masa M_3 y la tensión de la cuerda en cada uno de los trozos.



Solución : Como se vio en la clase auxiliar las tensiones en cada trozo de la cuerda son las mismas, sin embargo al pasar por la polea éstas cambian, así podemos "simplificar" nuestro DCL hecho en clases, considerando sólo el módulo de la fuerza que actúa por cada trozo, recuerde que por no tener masa, las tensiones en la cuerda se equilibran, esto se encuentra indicado por los diferentes colores, luego sumamos los torques y fuerzas para cada masa:

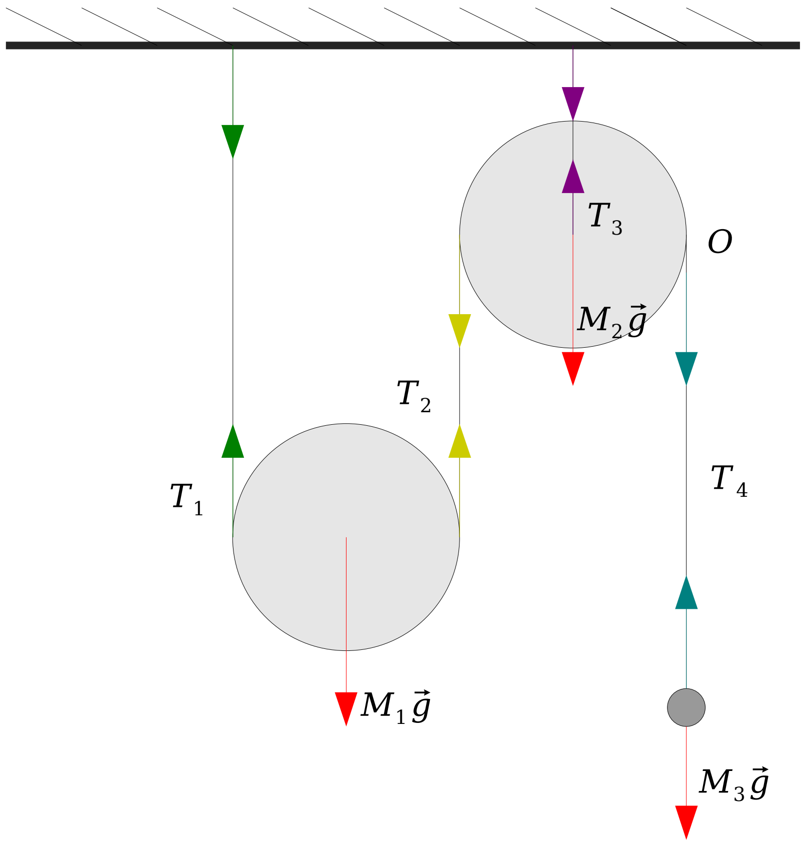
Para la masa M_1 : $$T_1+T_2-M_1 g=M_1 a_1$$

$$-T_1 R_1+T_2 R_1=\alpha_1 I_1$$

Para la masa M_2 : $$T_3-T_2-T_4-M_2 g=M_2 a_2$$

$$T_2 R_2-T_4 R_2=-\alpha_2 I_2$$

Para la masa M_3 : $$T_4-M_3 g=-M_3 a_3$$



Recuerde que a_1 , a_2 y a_3 son las aceleraciones de los respectivos centros de masa, por lo tanto a_2 es nula, no necesariamente α_2 como dije erróneamente en clases, esto se debe a que esta polea es fija, entonces no existe una relación entre su traslación y su rotación directamente, no como se verá más adelante que sí ocurre para las poleas móviles.

<u>Aceleraciones angulares :</u>

Cuando la masa M_3 "cae" una altura h , la masa M_1 sube sólo $h/2$, por lo tanto la aceleración a_3 es el doble de la aceleración a_1 , formalmente la relación angular que involucra los arcos, en ambas poleas es :

$$\theta_2 = \frac{h}{R_2} \quad \text{y} \quad \theta_1 = \frac{h}{2R_1} \quad \text{reemplazando} \quad \theta_1 = \frac{\theta_2 R_2}{2R_1}$$

Para obtener las aceleraciones de debe derivar ésta relación dos veces, y además se considera que el punto O tiene la misma aceleración que la masa M_3 que cae, así :

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2 R_2}{2R_1} \quad \text{y} \quad \alpha_2 R_2 = a_3 \quad \text{por lo tanto} \quad \alpha_1 = \frac{a_3}{2R_1}$$

Por último se desea encontrar la relación entre la aceleración del centro de masa a_1 y la aceleración angular α_1 en una polea móvil, para esto analizaremos al igual que antes la relación entre lo que sube la polea con lo que gira ésta misma.

Si el centro de masa de la polea sube verticalmente una distancia y , entonces el ángulo que gira la polea será:

$$\theta_1 = \frac{y}{R_1} \text{ , luego derivando dos veces } \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{R_1}$$

<u>Alcances con respecto a los signos :</u>

Se ha supuesto desde el inicio, que todo el sistema baja por efecto de la masa M_3 , luego la aceleración a_3 es hacia abajo, no así la aceleración a_1 que es contraria a ésta, es por esto que en las ecuaciones de movimiento tienen signos opuestos.

Para las aceleraciones angulares se considera de acuerdo a la convención anti-horaria, así α_1 es positivo pues al “subir”, la polea gira en sentido anti-horario, el caso contrario es la polea fija donde α_2 gira en el sentido opuesto.

<u>Resumiendo se tienen las siguientes ecuaciones :</u>

Aceleraciones angulares, en función de la aceleración de M_3 : $\alpha_1 = \frac{a_3}{2R_1}$ y $\alpha_2 = \frac{a_3}{R_2}$

Aceleraciones de los centros de masa respectivos : $a_1 = \frac{a_3}{2}$ y $a_2 = 0$

Además la inercia de un disco es : $I = \frac{MR^2}{2}$

Para la masa M_1 :

$$T_1 + T_2 - M_1 g = M_1 \frac{a_3}{2}$$

$$-T_1 R_1 + T_2 R_1 = \frac{a_3}{4} M_1 R_1$$

Para la masa M_2 :

$$T_3 - T_2 - T_4 - M_2 g = 0$$

$$T_2 R_2 - T_4 R_2 = \frac{-a_3}{2} M_2 R_2$$

Para la masa M_3 :

$$T_4 - M_3 g = -M_3 a_3$$

Así la aceleración de la masa es :

$$a_3 = \frac{4g(2M_3 - M_1)}{3M_1 + 4M_2 + 8M_3}$$

Encuentre las tensiones respectivas.