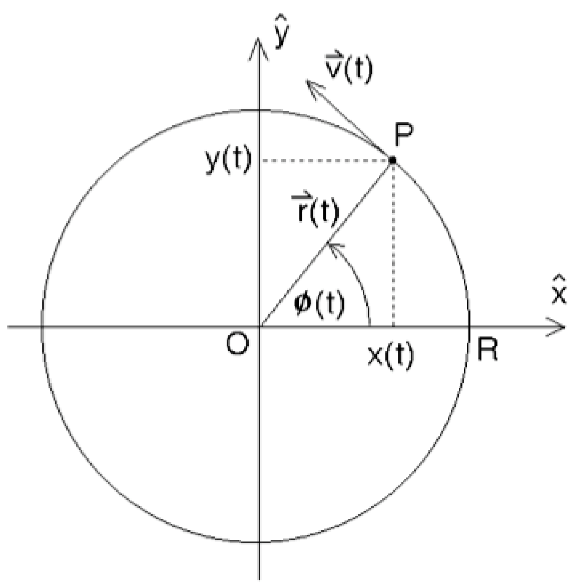
GUIA TEORICA
Unidad 5A: Oscilaciones
Profs: H. Arellano, D. Mardones, N. Mujica
Semestre 2008-1

1. Introducción: Movimiento Circular Uniforme

Antes de iniciar el estudio de pequeñas oscilaciones, o de movimiento periódico en general, es ilustrativo recordar el movimiento circular uniforme. El movimiento circular de un móvil se caracteriza por tener un radio r constante. Debido a esto es muy cómodo describir el movimiento a utilizando como parámetro el ángulo entre el vector posición y el eje de las abcisas (x). La posición queda entonces completamente definida por el ángulo ϕ a través de

$$\vec{r} = R\cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}$$



Si la posición del cuerpo cambia en el tiempo, entonces podemos expresar un pequeño cambio en la posición como

$$\vec{d\phi} = \frac{ds}{r}\hat{z} \approx \frac{dr}{r}\hat{z}$$

donde hemos utilizado la regla de la mano derecha para expresar el ángulo de forma vectorial; ds es la longitud del arco de circumferencia entre ambas posiciones, considerado positivo si el ángulo aumenta. Naturalmente $d\phi$ es adimensional (cuociente entre cantidades con las mismas unidades), para mayor claridad se define el radián como una dimensión angular.

Si el movimiento circular es uniforme, entonces por definición la tasa de cambio del ángulo θ en el tiempo es constante y se denomina velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \text{constante, luego}$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t \tag{1}$$

Notamos que las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ del vector posición oscilan entre $\pm R$ y las podemos escribir como

$$x(t) = R\cos(\phi_0 + \omega t)\ ;\ y(t) = R\sin(\phi_0 + \omega t).$$

R representa entonces la *amplitud* del movimiento en x o en y. Al ángulo $\phi(t)$ lo llamamos *fase*, y al ángulo inicial ϕ_0 lo llamamos *constante de fase*. El movimiento es periódico, repitiéndose cuando la fase cambia en 2π. El período del movimiento lo obtenemos de imponer $\omega t = 2\pi$:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

En el caso de movimiento circular, ω representa la velocidad angular, que podemos relacionar con la velocidad tangencial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Sin embargo, es muy común poder expresar movimientos periódicos a través de funciones trigonométricas. En estos casos el ángulo ϕ puede no representar la posición de un cuerpo en una circumferencia, pero siempre representa la fase del movimiento, como veremos a continuación.

2. Movimiento Armónico Simple

Un resorte ideal sin masa representa una muy buena aproximación a una gran cantidad de fenómenos físicos, no sólo relacionados con la elasticidad de sólidos. Ya en el siglo XVII se caracterizó estos fenómenos a través de la conocida *Ley de Hooke*: la fuerza que ejerce un resorte es proporcional al módulo del desplazamiento y en sentido opuesto.

$$\vec{F}_e = -k\Delta\vec{x} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

donde $\vec{x}_0$ es la posición de equilibrio, que corresponde al largo natural del resorte en el caso de no haber otras fuerzas presentes, y k es una constante de proporcionalidad positiva (constante del resorte, unidades N/m).

Eligiendo el origen del sistema de coordenadas en el largo natural del resorte y orientando el eje x a lo largo del resorte podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$F = -kx = ma$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

donde los puntos sobre la x representan derivadas c/r al tiempo. Para encontrar las soluciones a esta ecuación, suponemos soluciones del tipo exponencial, es decir $x = ae^{bt}$. Al reemplazar en al ecuación anterior obtenemos una ecuación algebraica para la constante b:

$$b^2 + \frac{k}{m} = 0$$

cuyas soluciones son imaginarias. Para simplificar la notación, definimos la constante $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ de modo que podemos expresar

$$b_\pm = \pm i\omega_0$$

Vemos que efectivamente funciones exponenciales son soluciones de la ecuación (3). Sin embargo, estas son exponenciales de exponente imaginario:

$$x_\pm = a_\pm e^{\pm i\omega_0 t} = a_\pm[\cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t)], \tag{4}$$

donde $a_\pm$ son constantes y en la última igualdad hemos utilizado la expresión para la función exponencial compleja. La solución general de la ecuación (3) es una combinación lineal de las dos soluciones $x_\pm$. Esta solución incluye dos constantes de integración ($a_\pm$) que dependen de las condiciones iniciales del problema. Esta solución general se puede expresar de una variedad de formas, siempre con dos constantes de integración, dejamos al lector verificar las siguientes expresiones:

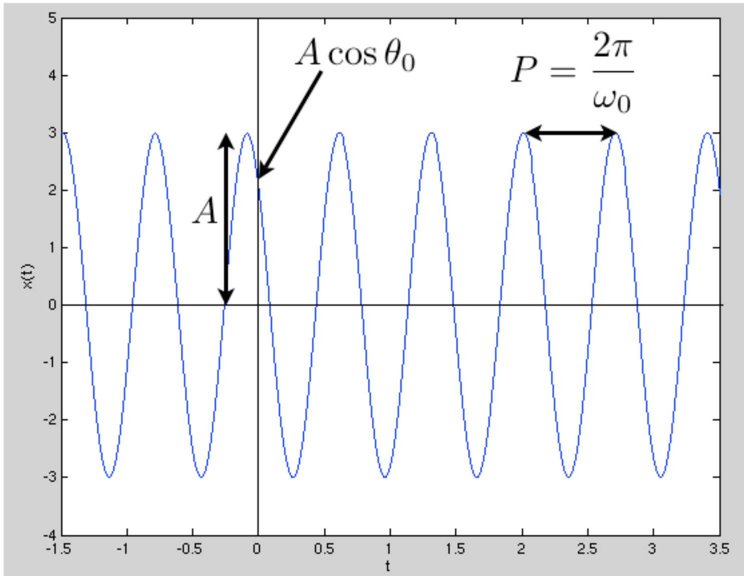
$$\begin{aligned} x(t) &= a_+ e^{+i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t} && (5) \\ &= a_c \cos(\omega_0 t) + a_s \sin(\omega_0 t) && (6) \\ &= B \sin(\omega_0 t + \theta_s) && (7) \\ &= A \cos(\omega_0 t + \theta_0) && (8) \end{aligned}$$

Donde la última expresión es la que utilizaremos frecuentemente. En este caso las constantes de integración son la *amplitud* A y la *constante de fase* θ_0. La cantidad $\omega_0 = 2\pi/P$ la llamamos *frecuencia angular*; P es el período del movimiento. Las unidades de la frecuencia angular son [rad/s]. Notamos que ω_0 tiene unidades de frecuencia, pero NO corresponde a una velocidad angular como en el caso de movimiento circunferencial uniforme, ya que no hay ningún ángulo en la definición del problema.

En resumen, el movimiento armónico simple se puede caracterizar a través de

- variable $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ que representa posición en el caso de un resorte ideal, pero puede representar cualquier cantidad física que oscile de forma periódica: ejemplos ángulo para el movimiento de un péndulo, corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna.
- Amplitud del movimiento A con las mismas unidades que x.
- Frecuencia angular $\omega_0 = 2\pi/P$ donde P es el período.
- Fase $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$ varía entre 0 y 2π.
- Constante de fase θ_0.

Esta es una ecuación muy sencilla, pero al no ser polinomial puede tener un comportamiento no intuitivo para los alumnos. Les recomendamos graficar la función (8) jugando con los parámetros para explorar el efecto que tienen las variaciones de cada parámetro en la función $x(t)$.



2.1. Resorte Ideal

Para un resorte ideal (que satisface la ley de Hooke) la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ sólo depende de la constante del resorte k y la masa m del cuerpo en contacto con el resorte; ω_0 es independiente de las condiciones iniciales del problema. A menudo se agrega el subíndice ω_0 a la frecuencia angular para hacer notar que es constante y para distinguirla de la velocidad angular en caso de que se preste a confusión.

Dada la solución para la posición en función del tiempo $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ podemos encontrar la velocidad derivando c/r al tiempo:

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0).$$

La rapidez es máxima cuando $\omega_0 t + \theta_0 = \pm\pi/2$ lo que sucede cuando el cuerpo está en el origen $x = 0$ (largo natural del resorte). En los extremos del movimiento $x = \pm A$ se tiene que $\omega_0 t + \theta_0 = 0, \pm\pi$ y la rapidez instantánea es nula.

Si las condiciones iniciales del movimiento son $v = v_0$ y $x = x_0$ en $t = 0$ entonces las constantes de integración vienen dadas por

$$\tan\theta_0 = \frac{-v_0}{x_0\omega_0}$$

$$A^2 = x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2$$

Por último es importante encontrar expresiones para la energía de un movimiento armónicos simple.

La energía mecánica es la suma de la energía potencial elástica y la energía cinética:

$$E = U_e + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{9}$$

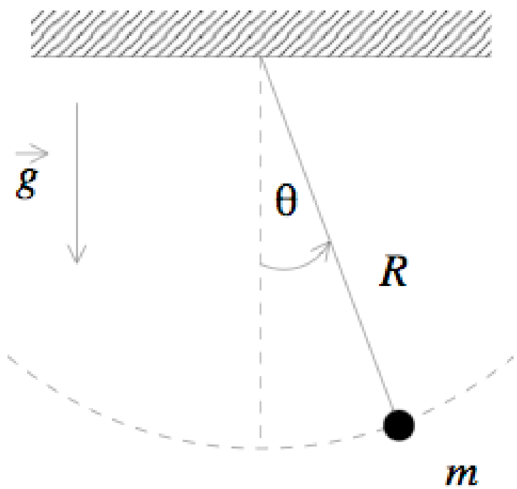
$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta_0) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \tag{11}$$

es constante (en la última expresión reemplazamos $m\omega_0^2 = k$).

3. Péndulo Simple

Un péndulo simple consiste en un cuerpo puntual de masa m colgando de un hilo ideal inextensible y sin masa fijo al cielo sobre la superficie terrestre (ver figura). Las cantidades R, m, y g son constantes, y la única cantidad variable en el tiempo es el ángulo θ entre el hilo y la vertical del lugar.



Para encontrar una solución para la posición definida por el ángulo $\theta(t)$ lo más sencillo es utilizar la ecuación de torque c/r al punto de apoyo del hilo ya que la tensión no realiza torque. La velocidad angular es $\omega = \dot{\theta}$ y la velocidad tangencial $v = R\omega$. El momento angular de la partícula c/r al punto de apoyo del hilo es $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ cuyo módulo es

$$l = mR^2\dot{\theta}$$

y su derivada temporal

$$\frac{dl}{dt} = mR^2\ddot{\theta}$$

El torque del peso c/r al punto de apoyo del hilo es $\tau_g = -Rmg\sin\theta = \frac{dl}{dt}$, luego la ecuación que describe el movimiento del péndulo se puede expresar como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \tag{12}$$

Esta ecuación es aparentemente muy similar a la ec. (3) sin embargo el que aparezca la función $\sin\theta$ en vez del ángulo θ puede introducir diferencias sustanciales en sus soluciones. Afortunadamente para el caso en que el péndulo oscila con ángulos pequeños, podemos aproximar la función $\sin\theta \approx \theta$ si $\theta << 1$ rad. Notamos también que las constantes g y R son ambas positivas, luego podemos definir la constante

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R} \tag{13}$$

obteniendo la siguiente ecuación para describir el movimiento del péndulo

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{14}$$

donde es evidente ahora la similitud con la ecuación (3) que describe el movimiento de una masa pegada a un resorte ideal. Podemos adivinar inmediatamente la solución de esta ecuación:

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{15}$$

donde la amplitud $A = \theta_{max}$ es un ángulo. Es muy importante distinguir en este caso la constante $\omega_0 = \frac{g}{R}$ que representa la frecuencia angular del movimiento de la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ que para empezar no es constante y tiene un significado físico distinto. El período del movimiento es

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{16}$$

recuperando la expresión conocida.

3.1. Péndulo Físico

Un péndulo físico es cualquier péndulo real que no pueda ser bien aproximado por una masa puntual atada a un hilo ideal. Es decir, cualquier caso en que el momento de inercia del sistema c/r al punto de apoyo difiera de mR^2. Para distinguirlo del péndulo simple, utilizaremos M para la masa, d para la posición del centro de masa c/r al punto de apoyo, I para el momento de inercia del sistema c/r al punto de apoyo. El torque del peso c/r al punto de apoyo es ahora

$$\tau_g = -dMg\sin\theta = I\alpha = I\ddot{\theta}$$

donde α es la aceleración angular y la derivada del momento angular c/r al tiempo es $\frac{dL}{dt} = I\alpha$ dado que I es constante. Para pequeñas oscilaciones de un péndulo físico podemos reemplazar de nuevo $\sin\theta \sim \theta$ y obtenemos la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0 \tag{17}$$

que describe un movimiento armónico simple con frecuencia angular

$$\omega_0^2 = \frac{Mgd}{I}$$

Ejemplo: barra homogénea de longitud L y masa M oscilando en torno a un extremo. En este caso la posición del centro de masa es $d = L/2$, y el momento de inercia c/r a su extremo es $I = \frac{1}{3}ML^2$ con lo cual obtenemos el período del movimiento como

$$P_{\text{fisico}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Si consideramos el mismo sistema como un péndulo simple de masa M concentrada en su centro de masa y utilizamos el período de la expresión (16) obtenemos

$$P_{\text{simple}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

En general notamos que el período de un péndulo físico es mayor que el período de un péndulo simple con la misma masa concentrada en su centro de masa y menor que el período de un péndulo simple de la misma longitud.

3.2. Pequeñas Oscilaciones

Notamos que la solución general para cualquier amplitud del movimiento de un péndulo (simple o físico) no representa un movimiento armónico simple (M.A.S.) que se reproduce bien por la ecuación (8). Sin embargo el movimiento *si es periódico* y tiene período y frecuencia angular bien definidos. Su solución general, sin embargo es matemáticamente mucho más compleja.

Lectura Suplementaria

El capítulo 13 "Movimiento Armónico Simple"de los apuntes de Massmann son ligeramente avanzados para este curso. Contiene abundantes ejercicios, algunos de ellos resueltos. Las ecciones 13.1 y 13.2 son apropiadas como material docente de esta semana.

El capítulo 15 del libro de Serway y capítulo 14 del Tipler contienen la materia necesaria para la unidad 5 (A, B, y C).