

FIIA2 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Semestre 2008-1

Unidad 4: Estática

Preparada por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física

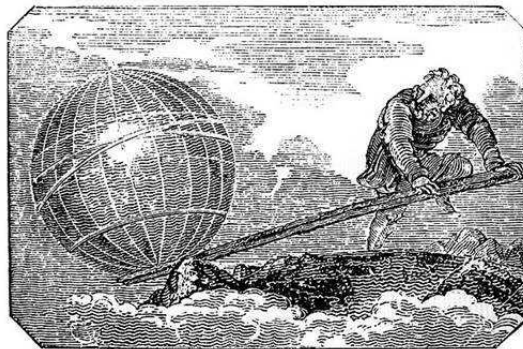
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

Indice

0.1. Producto vectorial y torques	2
0.2. El torque de una fuerza	3
0.3. El torque debido a la gravedad terrestre	4
0.4. Las leyes de la estática	4
0.5. Un ejemplo (tomado de un control de 2001)	5

La estática es uno de los conocimientos empíricos más antiguos de nuestra civilización. Este ha permitido la construcción de monumentos formidables que aún, con todos los recursos tecnológicos disponibles, nos sorprenden. El descubrimiento básico fue que era posible amplificar, mediante formas adecuadas, el efecto de una fuerza. De hecho, se le atribuye a Arquímedes haber dicho *"Dame un punto de apoyo y levantaré el Mundo"*.

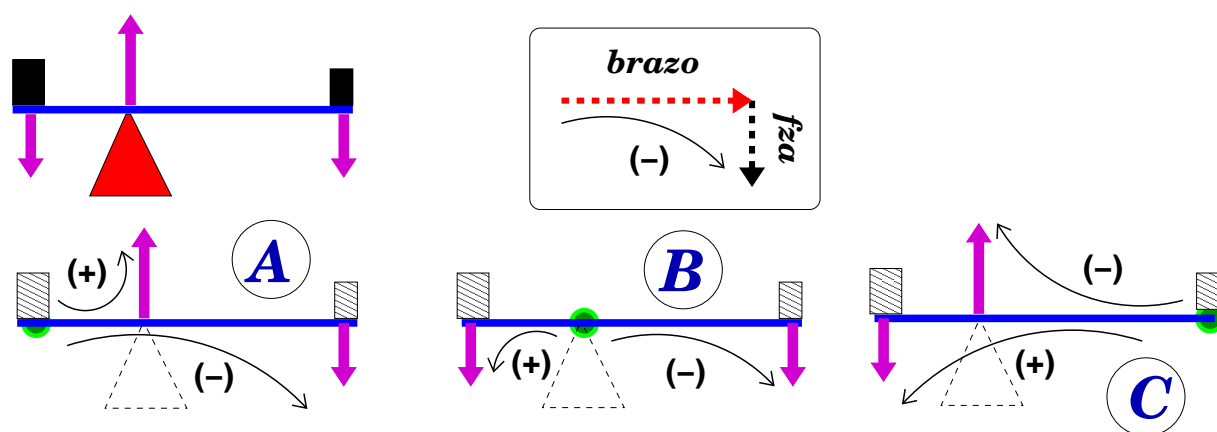


El carácter empírico de este conocimiento encuentra su fundamentación en las leyes de Newton, que como hemos visto se aplican a objetos puntuales. Veremos que las leyes de la estática aplicadas a un sólido se resumen en dos restricciones:

- Para que el centro de masas no se mueva se exige que la fuerza neta (suma de las fuerzas externas) sea nula.

- Para que el objeto no rote se exige que el *torque* neto (suma de los externos) sea nulo.

Si bien aún no hemos definido torque, algo que corregiremos enseguida, podemos describirlo como “fuerza de palanca” asociada a una fuerza. La idea es simple: consideremos un balancín equilibrado como el de la figura. Para simplificar la discusión supongamos que la barra horizontal no tiene masa (masa despreciable). Los bloques en los extremos forman parte de lo que denominaremos ‘sistema’, de modo que el contacto de ellos con la tabla constituye una fuerza interna. Las fuerzas externas al sistema son: 1) el peso del bloque izquierdo; 2) el peso del bloque derecho y; 3) la fuerza (normal) donde se apoya la tabla. La primera exigencia es que la suma vectorial de todas ellas sea nula.



Para que el sistema no gire debe existir una compensación entre las palancas –con respecto a un punto arbitrario– que hagan girar el sólido en un sentido contra las que lo harían girar en el sentido opuesto. Ello se ilustra en los esquemas A, B y C, en los cuales se indica la “tendencia a giro” debido al par *brazo-fuerza*. Hemos convenido en este caso que los giros en el sentido anti-horario tienen signo (+), mientras que los que giran en el sentido de los punteros del reloj tienen sentido de giro (-). Nótese que con respecto a los tres puntos considerados (denotados con los círculos verdes), los pares de fuerzas producen tendencia a girar en sentidos opuestos. La cuantificación de estos equilibrios requiere de la introducción de la noción de *producto cruz*.

0.1. Producto vectorial y torques

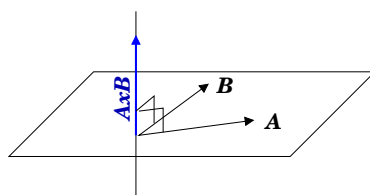
Como vimos anteriormente, el uso de palancas para levantar cuerpos es un hecho empírico en el cual, mediante una combinación de fuerza, puntos de apoyo y lugares donde se aplica la fuerza, podemos levantar cuerpos que mediante levantamiento directo sería imposible. Este hecho es explicado mediante las ecuaciones de Newton, para lo cual requeriremos de una nueva construcción vectorial que llamaremos *producto cruz*.

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores, entonces el elemento

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

es un vector cuya

- dirección es perpendicular a ambos, \vec{A} y \vec{B} ;
- tamaño $AB \sin(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} ; y
- sentido según la *regla de la mano derecha*¹.



Con esta definición surgen las siguientes propiedades:

1. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, para todo \vec{A} ;
2. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$;
3. $\vec{A} \times (\lambda \vec{B}) = \lambda(\vec{A} \times \vec{B})$; con λ un escalar;
4. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; y $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$;
5. $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta = A_{\perp} B = AB_{\perp}$, donde A_{\perp} es la magnitud de la componente de \vec{A} , perpendicular a \vec{B} .
6. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$;

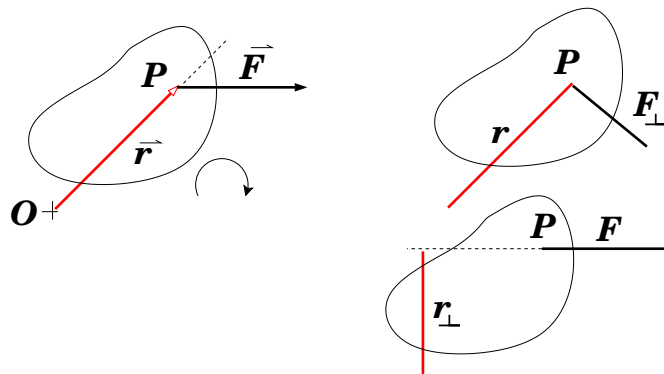
0.2. El torque de una fuerza

Se define el torque $\vec{\tau}$ de una fuerza \vec{F} aplicada en un punto P como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

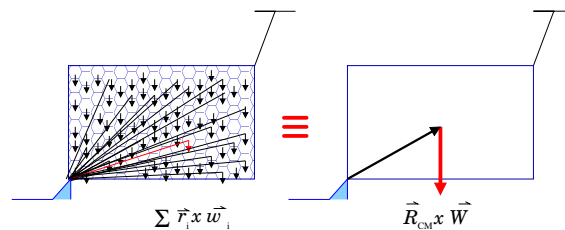
donde \vec{r} es el vector que une el origen O con el punto P . Físicamente, lo que este producto representa es la habilidad de la fuerza \vec{F} de inducir un giro del cuerpo en torno al origen O . Este origen es totalmente arbitrario; sin embargo, una vez es escogido, ha de mantenerse durante el desarrollo de las ecuaciones en cuestión.

¹En ella, ambos vectores se disponen con sus colas coincidentes. Luego, el dedo anular de la mano derecha toma la dirección y sentido de \vec{A} , con la palma orientada hacia \vec{B} . El sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ coincide con el del dedo pulgar.



0.3. El torque debido a la gravedad terrestre

Un caso de interés particular es el torque sobre un sólido debido a la gravedad. Definiendo el torque total como la suma de todos los torques, el torque debido a la gravedad lo calculamos representando el sólido como una superposición de N celdas muy pequeñas, cada una de ellas afectada por el peso $\vec{w}_i = m_i \vec{g}$.



El torque con respecto a un origen O resulta

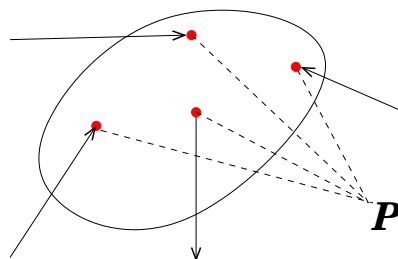
$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right)}_{M \vec{R}_{CM}} \times \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times (M \vec{g}),$$

donde hemos identificado \vec{R}_{CM} , el vector centro de masas del sólido con respecto a O . Este resultado nos permitirá una notable simplicidad en el estudio de sólidos.

0.4. Las leyes de la estática

En una primera etapa nos limitaremos a la aplicación de las leyes de la estática. Su demostración la dejaremos para más adelante.

Consideremos un sólido sobre el cual actúan N fuerzas externas: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$.



Entonces, para que el sistema esté en equilibrio estático es necesario que:

$$\text{I.- } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \vec{0};$$

$$\text{II.- } \vec{\tau}(\vec{F}_1) + \vec{\tau}(\vec{F}_2) + \cdots + \vec{\tau}(\vec{F}_N) = \vec{0}.$$

OBSERVACIONES:

1. La suma de fuerzas es vectorial, de modo que muchas veces resulta conveniente expresarla en términos de componentes ortogonales, usualmente según ejes 'x', 'y' y 'z' escogidos adecuadamente.
2. Los torques son calculados con respecto a un punto P arbitrario. Entonces, la recomendación es tomar torque con respecto a un punto donde se simplifique de mejor forma el cálculo.
3. En este curso nos centraremos en problemas en los cuales todas las fuerzas están contenidas en un plano. Si el punto P está en el mismo plano, entonces los torques serán perpendiculares a éste. Con ello, basta con especificar si el torque
 - sale del plano; o
 - entra al plano.

Uno puede convenir el signo (+) del torque para cualquiera de estos casos, quedando los torques en sentido opuesto con signo (-).

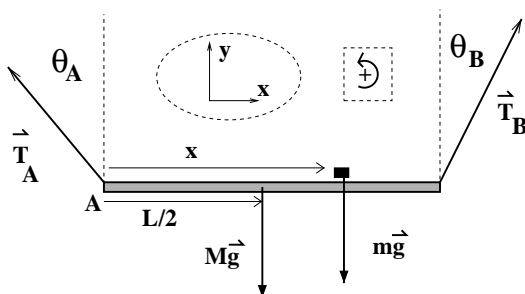
0.5. Un ejemplo (tomado de un control de 2001)

Una carga de masa \underline{m} posa sobre un tablón de longitud \underline{L} y masa \underline{M} distribuida uniformemente. El tablón es sostenido en sus extremos por dos cuerdas ideales las cuales forman ángulos θ_A y θ_B con respecto la vertical. La carga se ubica en una posición tal que permite que el tablón se mantenga en forma horizontal. a) Determine la ubicación de la carga con respecto al extremo A del tablón. b) Verifique e interprete concisamente su respuesta para el caso $\theta_A = \theta_B$.



SOLUCION:

- Las fuerzas sobre (tablón+carga): tensiones \vec{T}_A y \vec{T}_B , peso carga $m\vec{g}$ y peso tablón $M\vec{g}$.



- Estática bajo traslación del CM y proyecciones según \hat{x} e \hat{y} :

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B + m\vec{g} + M\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1)$$

$$-T_A \sin \theta_A + T_B \sin \theta_B + 0 + 0 = 0 \quad (\text{según } \hat{x}) \quad (2)$$

$$T_A \cos \theta_A + T_B \cos \theta_B - mg - Mg = 0 \quad (\text{según } \hat{y}) \quad (3)$$

- De lo anterior tenemos:

$$T_A \sin \theta_A = T_B \sin \theta_B \quad (4)$$

$$T_A \cos \theta_A + T_B \cos \theta_B = (m + M)g \quad (5)$$

- Estática bajo rotación (torques) c/r A y (torques positivos en sentido antihorario):

$$\vec{\tau}_A(\vec{T}_A) + \vec{\tau}_A(\vec{T}_B) + \vec{\tau}_A(m\vec{g}) + \vec{\tau}_A(M\vec{g}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (6)$$

$$0 + LT_B \cos \theta_B - xmg - (L/2)Mg = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{xmg = LT_B \cos \theta_B - MgL/2}} \quad (7)$$

- Buscamos x : reemplazar T_A de (4) en (5) y se obtiene

$$T_B(\cos \theta_A \sin \theta_B + \cos \theta_B \sin \theta_A) = (m + M)g \sin \theta_A \rightarrow \underline{\underline{T_B \sin(\theta_A + \theta_B) = (m + M)g \sin \theta_A}}$$

- Combinar con Ec. (7) para x y despejar...

$$\overline{\overline{x = \frac{L}{m} \left(\frac{(m+M) \sin \theta_A \cos \theta_B}{\sin(\theta_A + \theta_B)} - \frac{M}{2} \right)}}$$

- Caso límite $\theta_a = \theta_B \rightarrow$ (usar $\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta$)

$$x \rightarrow \frac{L}{m} \left(\frac{(m+M) \sin \theta_A \cos \theta_A}{2 \sin \theta_A \cos \theta_B} - \frac{M}{2} \right) \Rightarrow \overline{\overline{x \rightarrow \frac{L}{2}}}$$

vale decir, si los \angle 's son iguales, la carga debe ubicarse simétricamente en el tablón.

1. Conservación de la Energía para una Partícula

En el contexto de la mecánica Newtoniana el principio de Conservación de Energía para una partícula se deriva directamente de la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), de donde se obtiene el teorema del trabajo-energía: el trabajo neto realizado por las fuerzas externas actuando sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la propia partícula:

$$W_{neto} = K_f - K_i \quad (1)$$

donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética y el trabajo de una fuerza \vec{F} en un pequeño intervalo $d\vec{x}$ se evalúa como $dW = \vec{F}d\vec{x}$ (se emplea el producto punto). Los subíndices i y f se refieren a la una condición inicial y final, respectivamente. El trabajo neto corresponde a la suma de los trabajos individuales de cada fuerza.

La evaluación del trabajo neto requiere "integrar" (es decir, sumar con mucho detalle) los dW entre una posición inicial y otra final a lo largo de la trayectoria de la partícula. Sin embargo, existen fuerzas en que el trabajo neto NO depende del camino recorrido sino que exclusivamente de la posición inicial y final de la partícula. Estas fuerzas se denominan conservativas e incluyen al peso y la fuerza elástica. En contraste, la fuerza de roce entre una partícula y una superficie (usualmente escrita como $-\mu_c N$) no es conservativa.

Como para una fuerza conservativa, F_c , el trabajo efectuado es solo función de las coordenadas, se puede definir una función de energía potencial, U , tal que el trabajo realizado es igual a la disminución en la energía potencial:

$$W_c = \int \vec{F}d\vec{x} = -\Delta U = U_i - U_f \quad (2)$$

Consideremos que sobre una partícula solo actúa una fuerza conservativa \vec{F}_c . Entonces, combinando (1) y (2) obtenemos que $\Delta K = W_c = -\Delta U$, de donde:

$$\Delta(K + U) = 0 \quad (3)$$

que es una forma de escribir la ley de la conservación de la energía mecánica. Podemos además definir la energía mecánica total del sistema como $E \equiv K + U$.

Como E permanece constante a medida que la partícula se desplaza, cualquier cambio de la energía cinética ocurre a expensas de igual cambio (pero de signo opuesto) en la energía potencial. Si sobre el sistema actúa más de una fuerza conservativa y otras fuerzas no-conservativas (\vec{F}_{nc} , como el roce), obtenemos una ecuación más general:

$$\sum W(\vec{F}_{nc}) = \Delta(K + \sum U) \quad (4)$$

La ecuación (4) puede ser aplicada en la resolución de numerosos problemas de dinámica, en especial cuando $\sum W(\vec{F}_{nc}) \sim 0$. En estos casos debe conocerse completamente el estado de la partícula (posición y velocidad) en un instante y se desconoce una de las variables de estado en un instante posterior.

Como mencionábamos anteriormente, tanto el peso como la fuerza elástica son fuerzas conservativas, y sus energías potenciales son $U_g = mgy$ y $U_e = \frac{1}{2}k\delta^2$, respectivamente. Aquí y corresponde a la altura sobre un nivel de referencia (arbitrario pero fijo). Si la partícula está sobre (bajo) ese nivel $y \geq 0$ ($y \leq 0$). δ representa la deformación (compresión o deformación) de un resorte adherido a la partícula. g es la magnitud de la aceleración de gravedad y k la constante elástica del resorte.

Ejemplo: Un objeto se suelta desde una altura H , ¿A qué velocidad impacta contra el suelo?

Solución: Despreciando el roce con el aire, podemos aplicar la conservación de energía mecánica entre el instante inicial (objeto se suelta desde el reposo) y final (objeto impacta el suelo):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg0$$

de donde obtenemos directamente

$$v_f = (2gH)^{\frac{1}{2}}$$

2. Conservación de la Energía para un Cuerpo Rígido

Veamos ahora como se aplica el principio de conservación de energía a un cuerpo rígido. Recordemos aquí que el cuerpo rígido puede trasladarse y rotar pero no sufre deformaciones de su forma (por eso es rígido). En consecuencia, la posición relativa entre las partículas que lo forman no cambia en el tiempo.

Cada partícula esta sometida a fuerzas externas (por ejemplo, el peso) y fuerzas internas (por ejemplo, las fuerzas que ejercen las partículas vecinas). Se puede demostrar que las fuerzas internas no realizan trabajo (recordar que las posiciones relativas no cambian), por lo que cada partícula conserva su energía mecánica de acuerdo a la ecuación (4).

Consideremos el caso simple en que la única fuerza externa es el peso. Entonces, para la partícula n -ésima (n de un total de N) podemos escribir: $\Delta(K_n + m_n g y_n) = 0$. En este caso el subíndice es el identificador de la partícula. Podemos sumar la expresión anterior para las N partículas y obtenemos:

$$\Delta(\sum K_n + \sum U_{ng}) = 0 \quad (5)$$

Energía Cinética de Rotación Si el cuerpo esta rotando con respecto a un eje fijo, todas la partículas tienen igual velocidad angular, ω , y la velocidad (lineal) de la partícula n -ésima es $\rho_n \omega$, donde ρ_n es el radio de la orbita que describe la partícula entorno al eje de rotación. Entonces, la energía cinética del sistema resulta ser:

$$K = \sum K_n = \sum (\frac{1}{2}m_n v_n^2) = \frac{1}{2} \sum (m_n \rho_n^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (6)$$

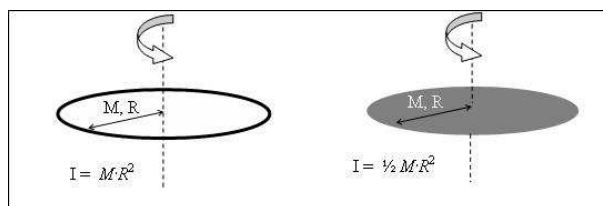


Figura 1: Momento de Inercia de un aro y un disco

La cantidad I se denomina Momento de Inercia, y es una propiedad del cuerpo que juega un papel de gran importancia en la dinámica de las rotaciones. Consideremos su definición $I = \sum(m_n \rho_n^2)$. Es claro que I crece con la masa total del cuerpo, pero depende críticamente de su forma y del eje de rotación. A igual masa, dos cuerpos pueden tener muy diferentes momentos de inercia en virtud de cuán cercana o lejana esté la masa del eje de rotación.

3. El momento de Inercia

En general podemos expresar $I = \gamma ML^2$, donde M es la masa total del cuerpo, L es una dimensión característica (radio de un disco, largo de una barra) y γ un valor numérico que depende de cada caso. El valor de I es dependiente del eje en torno al cual ocurre la rotación del cuerpo. Para un cuerpo cuya forma sea relativamente simple, el valor de I se obtiene empleando cálculo integral. Para cuerpos aun más simples, I puede obtenerse aplicando la sumatoria anterior.

Por ejemplo, el momento de inercia de un anillo de material uniforme, masa M y radio R en torno a un eje que pasa por su centro es: $I = \sum(m_i r_i^2) = \sum(m_i R^2) = MR^2$

¿Qué pasa si la misma masa M se distribuye ahora en un disco de radio R ? Muchas partículas que antes estaban en la periferia se mueven ahora hacia el centro del disco, haciendo disminuir el momento de inercia. De hecho, en este caso $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Propuesto: ¿Cuál es el valor de I si se trata de un cascarón cilíndrico o un cilindro sólido de radio R y masa M , que rota en torno a su eje de simetría?

Consideremos ahora el momento de inercia de una barra delgada de masa M y largo L que puede rotar en torno a uno de sus extremos. En este caso, el método de la sumatoria $I = \sum(m_i r_i^2)$ también funciona. Para eso la barra se divide en n trozos, cada uno de largo $d = \frac{L}{n}$ y masa $dm = \frac{M}{n}$. Al final de la sumatoria, se debe tomar el límite de $N \rightarrow \infty$ (con lo cual d y $dm \rightarrow 0$). En el libro Introducción a la Mecánica (Nelson Zamorano) se hacen estas sumatorias en forma explícita (pags. 298-299), de donde $I_o = \frac{1}{3}ML^2$

El valor anterior es el momento de inercia de una barra respecto a su extremo. Que pasa si queremos calcular I de una barra respecto a su punto central? Aquí podemos explotar el hecho de que I es una propiedad aditiva, así que este nuevo momento de inercia se calcula como la suma de dos momentos de inercia: uno de la barra al lado derecho del centro y la otra al izquierdo (en este caso ambas son idénticas)

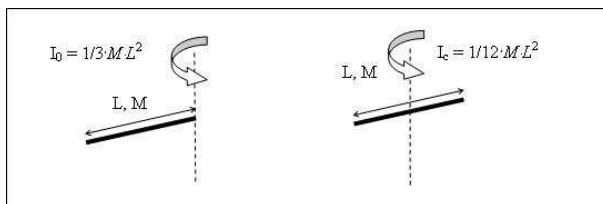


Figura 2: Momento de Inercia de una barra delgada

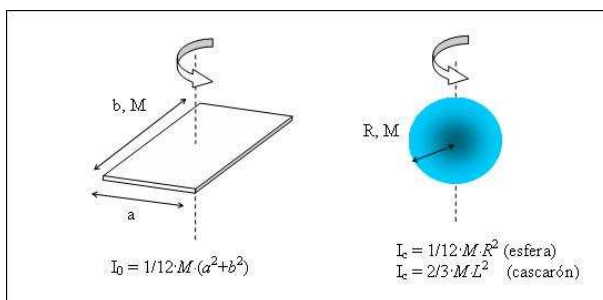


Figura 3: Momento de Inercia de una lámina, una esfera llena y un cascarón esférico

$$I_c = I_{izq} + I_{der} = 2I_o = 2\left[\frac{1}{3} \frac{M}{2} \frac{L^2}{2}\right] = \frac{1}{12} M L^2$$

Propuesto: Calcule el I de una barra en torno a un punto ubicado a $\frac{1}{4}$ de uno de sus extremos.

3.1. El centro de masa de un cuerpo rígido

Previamente definimos la posición del centro de masa de un sistema extendido como:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \quad (7)$$

Todos los vectores posición están referidos a un origen O de un sistema de referencia, por lo cual \vec{R} cambia de si el cuerpo se mueve o rota. Sin embargo, el centro de masa, como un punto singular del cuerpo en cuestión, no cambia para un sólido rígido.

También es conveniente recordar que al considerar un sistema compuesto por varios cuerpos, podemos calcular primero la posición del CM de cada cuerpo, y luego sumarlos para encontrar el CM del sistema. En otras palabras, cada cuerpo es tratado como una partícula con la masa concentrada en su propio CM y luego empleamos la ecuación (7).

Ejemplo: un sistema formado por una barra de largo L y masa M distribuída en forma uniforme, unida a una esfera pequeña de masa $2M$ en uno de sus extremos. En un cierto instante la barra está dispuesta en forma horizontal, pero luego rotará en torno a uno de sus extremos hasta quedar

en posición vertical. Pongamos nuestro sistema de referencia en el punto de rotación (aun cuando este permanece fijo).

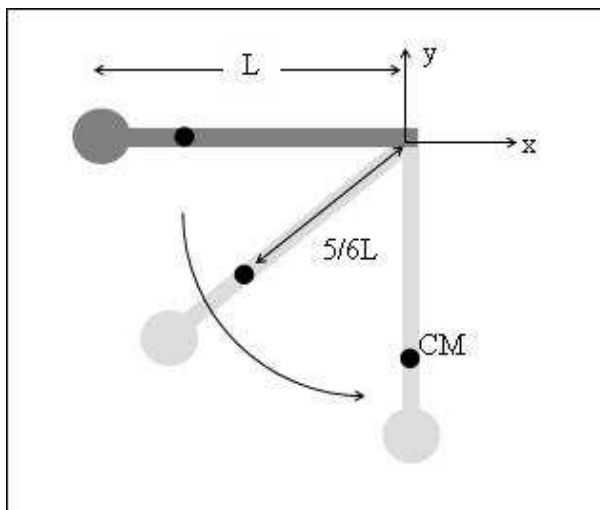


Figura 4: Centro de masa de una barra + esfera

Cuando la barra está horizontal, la posición del CM es:

$$\vec{R}_i = \frac{2M\vec{R}_{esfera} + M\vec{R}_{barra}}{3M} = -\frac{2ML + ML/2}{3M}\hat{i} = -\frac{5}{6}L\hat{i}$$

Notar que hemos empleado el hecho del que el centro de masa de una barra homogénea está en su centro (Unidad 3). El signo $-$ y el vector unitario \hat{i} en la posición del CM aparecen por la posición específica del sistema en este instante. Más importante, sabemos que el CM se ubica a $\frac{5}{6}$ del largo desde el extremo sin la esfera (o a $\frac{1}{6}$ de su largo desde la esfera).

¿Cuál es la posición del CM cuando el sistema está vertical? No necesitamos calcular la posición del CM nuevamente. Por simple inspección podemos escribir: $\vec{R}_f = -\frac{5}{6}L\hat{j}$

3.2. Teorema de Steiner, o de los Ejes Paralelos.

Cuando un cuerpo tiene algún tipo de simetría, es relativamente sencillo conocer el momento de inercia c/r a un eje que pasa por el centro de masa. El Teorema de Steiner nos permite encontrar fácilmente el momento de inercia c/r a cualquier eje paralelo al anterior, desplazado una distancia R . En su demostración empleamos la geometría y notación de la figura adjunta:

Por definición $I_O = \sum m_i x_i^2$, y $I_{CM} = \sum m_i r_i^2$. Expresamos el vector $\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$, luego

$$\vec{x}_i^2 = (\vec{R} + \vec{r}_i)^2 = \vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2$$

$$I_O = \sum m_i [\vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2]$$

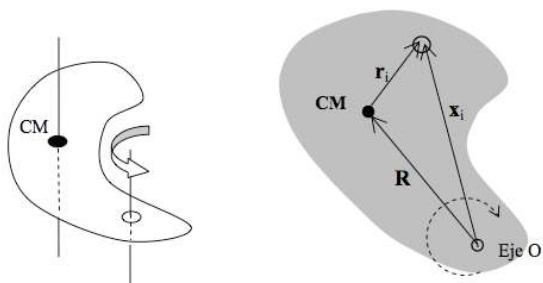


Figura 5: Geometría para Teorema de Ejes Paralelos.

pero por definición del centro de masa

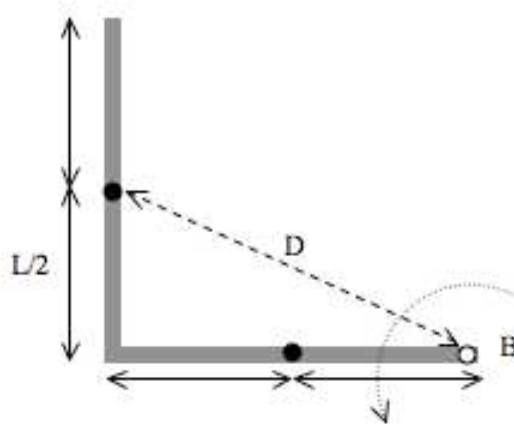
$$\sum m_i \vec{r}_i = 0$$

luego

$$I_O = \sum m_i [\vec{R}^2 + \vec{r}_i^2] = MR^2 + I_{CM}$$

Ejemplo: Consideremos una barra delgada en forma de L, con dos partes iguales cada una de masa M y largo L . Calcular el momento de inercia respecto su extremo B. Recuerde que el momento de inercia de una barra de largo L y masa M con respecto a su CM es $\frac{1}{12}ML^2$.

Aunque se trata de un cuerpo slido, haremos el cálculo descomponiendo la L en sus dos partes (vertical y horizontal): $I_B = I_H + I_V$. En cada caso aplicamos Steiner:



$$I_H = I_{CM} + M(L/2)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$I_V = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{5}{4}ML^2 = \frac{4}{3}ML^2$$

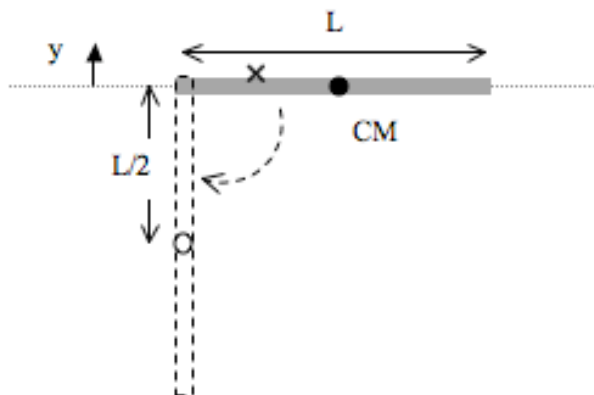
luego

$$I_B = \frac{5}{3}ML^2$$

Problema propuesto: Se tiene un disco homogéneo de radio R y masa M al cual se adhiere radialmente una barra de largo L y masa m . Calcule el momento de inercia del sistema c/r al centro del disco y a un extremo de la barra. Estudie los casos límites $L \ll R$, $m \ll M$, $m \gg M$.

4. Energía de Rotación de una barra en torno a un eje fijo.

Una barra uniforme de largo L y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta de la posición horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando esta pasa por la vertical? ¿Cuál es la velocidad del CM en ese instante?



Podemos resolver este problema fácilmente considerando la energía mecánica del sistema $E = K + U_g$. Para U_g tomemos como referencia el nivel donde la barra está horizontal. Como la rotación ocurre en torno a un extremo, $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$. Suponiendo que la barra es uniforme, su CM está en su centro geométrico. Si la barra parte del reposo se tiene $E_i = K_i + U_{gi} = 0 + 0$

$$E_f = \frac{1}{2}I_0\omega_f^2 + Mgy_f = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega_f^2 + Mg\left(-\frac{1}{2}L\right) = 0$$

$$\omega_f = (3g/L)^{1/2}$$

$$v_{CMf} = \frac{1}{2}L\omega_f = \frac{1}{2}(3gL)^{1/2}$$

¿Qué pasa si la barra rota en torno al punto marcado por una x ?

Consideremos un cuerpo rígido sobre el cual solo actúa el peso y que puede rotar en torno a un eje. Si el cuerpo se suelta desde el reposo, podemos evaluar la velocidad angular en cualquier otro instante (por ejemplo, cuando su CM pasa por su punto más bajo) empleando la conservación de la energía mecánica

$$\omega_f = \left(\frac{2Mg\Delta y}{I}\right)^{1/2}$$

donde Δy es el cambio en la posición del centro de masa. Como I es proporcional a M , el resultado anterior es independiente de la masa del cuerpo. De esta forma, la velocidad angular final crece

con el desplazamiento del centro de masa (se esta transformando energía potencial gravitacional en energía cinética) pero disminuye con I . Si realizamos el mismo experimento pero cambiamos su geometría, no es simple determinar si aumenta o disminuye ω_f , pues cambia tanto I como Δy . Por ejemplo, si hacemos que la masa quede más cercana al eje de rotación, disminuye I y Δy .

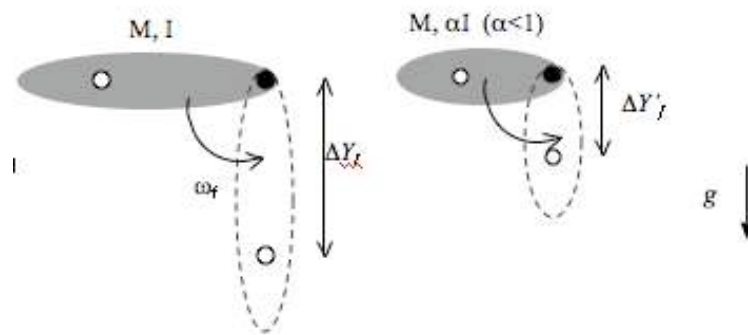


Figura 6: Dos cuerpos de igual masa pero distinta forma, ¿cuál cae más rápido?

Lectura Suplementaria

El material teórico de las Unidades 3 y 4A es lectura esencial para la materia de esta semana.

- *Física. Serway Tomo 1. McGraw Hill*
Secciones 10.4 y 10.5
- *Física para la ciencia y la tecnología. Tipler. Reverté*
Secciones 8.5 y 9.5
- *Introducción a la Mecánica* de Nelson Zamorano
Secciones VI.6.2 y VI.8
- Capítulo 9 *Rotación de un Cuerpo Rígido* de Massmann contiene la materia necesaria, pero con aplicación de cálculo integral sencillo.

FI1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Semestre 2008-1

Profesores: Hugo Arellano, Diego Mardones y Nicolás Mujica

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

Unidad 4C: Torque y momento angular

Preparada por Rodrigo Soto

Índice

1. Torque y momento angular para una partícula	1
1.1. Ejemplo	2
2. Momento angular de un sólido rígido	4
3. Ecuación de torque para un sólido rígido	6
4. Torque sobre un sólido rígido	7
5. Resumen	8
6. Ejemplos	8
6.1. Movimiento del péndulo físico	8
6.2. Polea con masa	10
7. Lecturas Recomendadas	12

1. Torque y momento angular para una partícula

Se sabe que la dinámica de una partícula está descrita por la ecuación de Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (1)$$

A partir de la ecuación de Newton se puede encontrar otra ecuación de movimiento, que a veces es más simple de estudiar pero que es más limitada en su aplicación. Para hacerlo consideremos la definición de *momento angular* \vec{L}

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (2)$$

donde \times es el producto cruz que se definió en la Unidad 3.

Se procede a calcular la derivada de \vec{L} . Para eso se recuerda que el producto cruz es una multiplicación de manera que se aplica la regla de la derivada del producto ($d(AB)/dt = (dA/dt)B + A(dB/dt)$). La masa es constante así que resulta

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} \quad (3)$$

pero $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ de lo que resulta que el primer término es $m\vec{v} \times \vec{v}$, que es nulo por las propiedades del producto cruz.

Además, el segundo término puede ser escrito como $\vec{r} \times m\vec{a}$ que, usando la ley de Newton queda

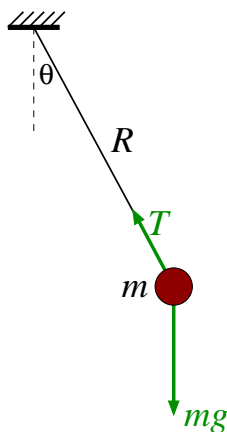
$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4)$$

Esta última es precisamente la definición de torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, obteniéndose la llamada *ecuación de torque* para una partícula.

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} \quad (5)$$

1.1. Ejemplo

Para ver cómo se usa esta ecuación consideremos un péndulo simple de masa m que cuelga de una cuerda ideal de largo R .



El momento angular se obtiene de la definición $L = m\vec{r} \times \vec{v}$. De acuerdo a lo visto en la Unidad 4A, el producto cruz se obtiene como:

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores, entonces el elemento

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

es un vector cuya

- dirección es perpendicular a ambos, \vec{A} y \vec{B} ;
- tamaño $AB \sin(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} ; y
- sentido según la regla de la mano derecha

La partícula está a una distancia R del origen y el módulo de la velocidad es $v = R\dot{\theta}$ por ser un movimiento circunferencial. Además, como la velocidad es perpendicular al vector posición se tiene $\sin\theta = 1$. Por último la dirección de \vec{L} es perpendicular a la posición y velocidad, es decir, sale del plano del papel hacia afuera. Si definimos el vector \hat{k} como el que es perpendicular al plano se tiene

$$\vec{L} = mR^2\dot{\theta}\hat{k} \quad (6)$$

Para calcular la derivada de \vec{L} notamos que todas las magnitudes son constantes salvo la velocidad angular $\dot{\theta}$. Luego

$$\dot{\vec{L}} = mR^2\ddot{\theta}\hat{k} \quad (7)$$

$$= mR^2\alpha\hat{k} \quad (8)$$

Donde se ha definido la *aceleración angular* $\alpha = \ddot{\theta}$.

Para calcular el torque notamos que sobre la masa actúa su peso $m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda \vec{T} . El torque es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{T} \quad (9)$$

Como \vec{T} es paralelo al vector posición su torque se anula y sólo queda el peso. Se debe notar que ésta es una de las comodidades del método de torque, pues se pueden eliminar algunas fuerzas del análisis (la tensión en este caso). El torque del peso se obtiene de la definición: la magnitud de \vec{r} es R y el ángulo que forman el peso con el vector posición es θ . Al aplicar la regla de la mano derecha se obtiene que el torque apunta perpendicular al plano, pero hacia adentro. Es decir

$$\vec{\tau} = Rmg \sin\theta(-\hat{k}) \quad (10)$$

Reemplazando todo en (5) se tiene

$$mR^2\ddot{\theta} = -mRg \sin\theta \quad (11)$$

que al simplificar queda

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta \quad (12)$$

que es la misma ecuación de movimiento que se vio en la Unidad 1.

Propuesto:

Considere que el mismo péndulo experimenta además una fuerza de roce viscoso $\vec{F}_v = -\gamma \vec{v}$. Determine, usando el método del torque, la ecuación de movimiento.

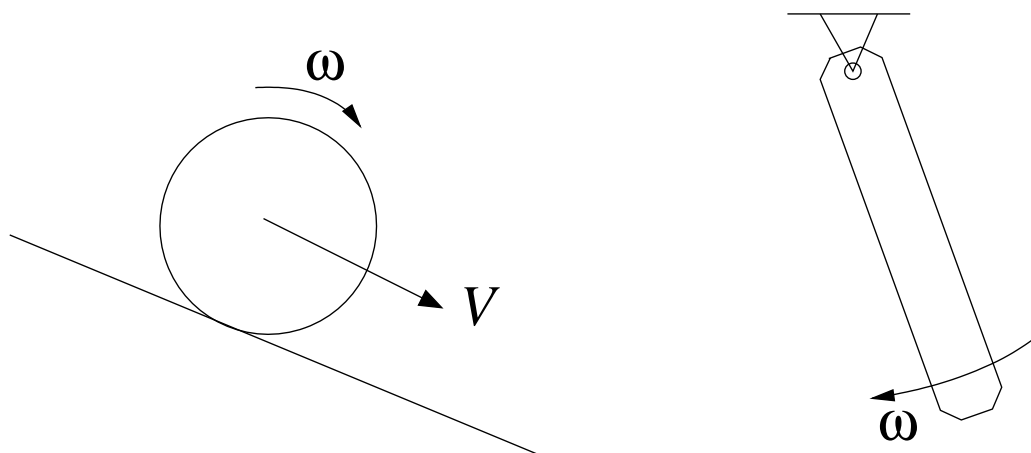
2. Momento angular de un sólido rígido

Si se tiene un sistema de partículas, de masas m_i , posiciones \vec{r}_i y velocidades \vec{v}_i , se define el momento angular del sistema como la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \quad (13)$$

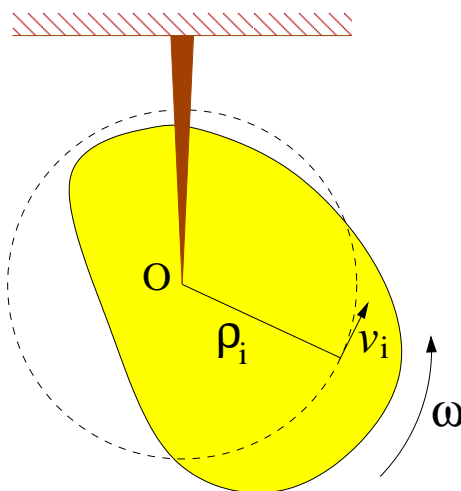
$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (14)$$

En lo que sigue vamos a considerar que el sólido tiene un *movimiento plano*. Es decir, la velocidad del sólido está en un plano (movimiento bidimensional) y la rotación ocurre con un eje perpendicular al plano de movimiento. Además, en este capítulo consideraremos sólo el movimiento de rotación en torno a un punto fijo.



Ejemplos de movimientos planos. En el ejemplo de la izquierda el sólido se traslada y el eje de rotación es perpendicular a la traslación. En el ejemplo de la derecha el movimiento es sólo de rotación en torno al punto fijo.

En el caso de tener un sólido rígido que gira en torno a un punto fijo O (tal como los descritos en la Unidad 3 y Unidad 4B), se puede descomponer el sólido en N partículas individuales y luego se hace tender $N \rightarrow \infty$. Como es un sólido rígido, la distancia de cada una de estas partícula al punto fijo es constante ρ_i , describiendo un movimiento circular de ese radio en torno al punto fijo.



Si la velocidad angular del sólido en torno a O es ω , entonces la rapidez de cada punto es $v_i = \rho_i \omega$, perpendicular al vector posición. Luego, se tiene

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \rho_i \rho_i \omega \hat{k} = \rho_i^2 \omega \hat{k} \quad (15)$$

De esta forma, el momento angular total del sólido que rota en torno a un punto fijo es

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (16)$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \omega \hat{k} \quad (17)$$

$$= \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega \hat{k} \quad (18)$$

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega} \quad (19)$$

donde se ha puesto el subíndice “O” para indicar explícitamente que se mide el momento angular respecto al punto fijo. Al pasar de la tercera a la cuarta línea se identificó el *momento de inercia* respecto al punto fijo O. Además, se definió la velocidad angular vectorial $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ como el vector que tiene la magnitud $\omega = \dot{\theta}$ y cuya dirección está dada por el eje de giro y sentido por la regla de la mano derecha.

Se obtiene entonece que el momento angular total de un sólido es proporcional a su momento de inercia, que es una propiedad intrínseca del cuerpo, y a la velocidad angular que mide el estado de rotación en cada instante. Esta relación es análoga a la del mometum lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, donde m es una propiedad intrínseca del cuerpo y \vec{v} mide el estado de traslación en cada instante.

3. Ecuación de torque para un sólido rígido

Se puede calcular la derivada del momento angular usando las expresiones (13) y (19). De acuerdo a la primera expresión se tiene

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i \quad (20)$$

$$= \sum_i \vec{\tau}_i \quad (21)$$

$$= \vec{\tau}_{\text{total}} \quad (22)$$

donde $\vec{\tau}_i$ es el torque sobre cada partícula y $\vec{\tau}_{\text{total}}$ es la suma de los torques.

Por otro lado usando la segunda expresión se tiene

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (I_O \vec{\omega}) \quad (23)$$

$$= I_O \dot{\vec{\omega}} \quad (24)$$

$$= I_O \ddot{\theta} \hat{k} \quad (25)$$

donde se ha usado que el momento de inercia es una propiedad del sólido y si éste es rígido, entonces es constante en el tiempo.

Igualando las dos expresiones se tiene

$$I_O \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_{\text{total}} \quad (26)$$

$$I_O \ddot{\theta} \hat{k} = \vec{\tau}_{\text{total}} \quad (27)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de Newton $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{total}}$ donde I_O juega el rol de la masa asociada al movimiento de rotación. La aceleración angular (cambio en la velocidad angular) es producida por los torques sobre el cuerpo. Dado un torque fijo, un cuerpo de mayor momento de inercia tendrá una menor aceleración angular. Es decir, el momento de inercia indica la dificultad para cambiar (acelerar o frenar) el estado de rotación de un cuerpo.

Propuestos:

Se tienen dos discos de masa M y radio R , uno de ellos con la masa distribuida uniformemente y el otro con la masa sólo en la circunferencia exterior. Si se aplica el mismo torque τ sobre ambos discos, cual acelerará más.

Para los mismos discos anteriores, si ambos están girando con velocidad angular ω . ¿Al cuál se le debe aplicar un mayor torque para que ambos se frenen en el mismo tiempo?

4. Torque sobre un sólido rígido

Para resolver la ecuación de movimiento recién encontrada se debe calcular el torque total sobre el cuerpo, el cual es la suma de los torques sobre cada una de las partículas $\vec{\tau}_i$. Vamos a ver que en general no es difícil de calcular. Para eso desarrollaremos la teoría general.

Sea un sólido que está descrito como sistema de N partículas de masas m_i y posiciones \vec{r}_i . En general sobre cada una de las partículas se ejercerán fuerzas provenientes de las otras partículas del sólido (por ejemplo, las fuerzas moleculares que lo mantienen rígido) y fuerzas que son ejercidas por otros cuerpos. A las primeras se les llamará *fuerzas internas* y se denotará por \vec{f}_{ik} la fuerza que la partícula k le ejerce a la partícula i . Al segundo tipo de fuerzas se les llama *fuerzas externas* y se les denotará por \vec{F}_i^{ext} . Así la fuerza total sobre la partícula i es

$$\vec{F}_i = \sum_k \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (28)$$

El torque sobre la partícula i es entonces

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (29)$$

$$= \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (30)$$

El torque total tiene una componente interna y otra externa. Calculemos primero la componente interna:

$$\vec{\tau}_{\text{total}}^{\text{int}} = \sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} \quad (31)$$

Como los índices son mudos, también se puede escribir

$$\vec{\tau}_{\text{total}}^{\text{int}} = \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ki} \quad (32)$$

$$= - \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik} \quad (33)$$

donde para pasar de la primera a la segunda línea se usó el principio de acción y reacción, $\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}$. Como (31) y (33) son válidas, el torque interno se puede escribir también como el promedio de las dos expresiones

$$\vec{\tau}_{\text{total}}^{\text{int}} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} - \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik} \right) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{f}_{ik} \quad (35)$$

El vector $\vec{r}_{ik} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_k$ es paralelo a la línea que une los centros de las partículas. Por otro lado, se sabe que las fuerzas fundamentales de la naturaleza (electromagnetismo, gravitación, fuerzas atómicas, fuerzas nucleares,...) cumplen con la propiedad que la dirección de la fuerza es paralela a la línea que une los centros de las partículas (por ejemplo, la fuerza de gravitación universal es $F_{ik} = -Gm_1m_2\hat{r}_{ik}/r_{ik}^2$). Debido a esa propiedad, los productos cruz en (35) son todos nulos.

En consecuencia, el torque total de las fuerzas internas es nulo. Esta propiedad es muy importante porque implica (de acuerdo a la ecuación (26)) que las fuerzas internas no provocan aceleración angular. Dicho de otra forma, un cuerpo no se pone a girar de manera espontánea.

Volviendo al torque total, sólo queda la componente externa

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (36)$$

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}} \quad (37)$$

donde se deja explícita la indicación que el brazo de los torques se mide respecto al punto fijo O.

5. Resumen

En resumen, la ecuación de torque para un sólido rígido respecto a un punto fijo O se escribe de las siguientes maneras

$$I_O \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}} \quad (38)$$

$$I_O \ddot{\theta} \hat{k} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}} \quad (39)$$

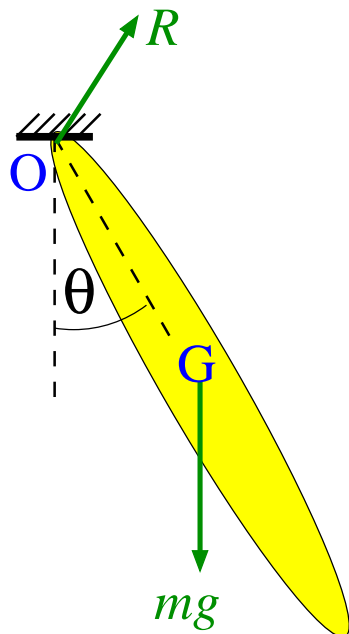
donde I_O es el momento de inercia del cuerpo respecto a su punto fijo y

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (40)$$

6. Ejemplos

6.1. Movimiento del péndulo físico

Se llama péndulo físico al caso de un sólido rígido que puede girar libremente respecto a un punto fijo bajo la acción de la gravedad.



En la figura se representa el péndulo físico que está sujeto del punto fijo O. El centro de masa del cuerpo está indicado por una G. Las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$ y la fuerza de sujeción en el punto fijo \vec{R} . Esta fuerza, también llamada de reacción es la que impide que el cuerpo caiga (por eso tiene una componente vertical), como también impide que el punto O se mueva hacia los lados (por eso, también tiene una componente horizontal). De esta forma, la fuerza de reacción tiene una magnitud y dirección en principio desconocidas que se deben determinar de las ecuaciones de movimiento.

La fuerza de reacción actúa en el punto O. Luego, su torque es nulo pues el brazo es nulo. Aquí nuevamente se ve la utilidad del método de torques porque permite describir el movimiento eliminando las fuerzas desconocidas.

El torque de las fuerzas externas se reduce entonces al torque del peso, que como se vio en la Unidad 4A, actúa sobre el centro de masa del cuerpo.

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \vec{\tau}_O^{mg} \quad (41)$$

$$= -mgR_G \sin \theta \hat{k} \quad (42)$$

donde R_G es la distancia del centro de masa al punto fijo y el signo se obtuvo de la regla de la mano derecha.

La ecuación de movimiento es entonces

$$I_O \ddot{\theta} = -mgR_G \sin \theta \quad (43)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{mgR_G}{I_O}\right) \sin \theta \quad (44)$$

ecuación que es muy parecida a la del péndulo simple, pero ahora depende de la forma del cuerpo a través del momento de inercia.

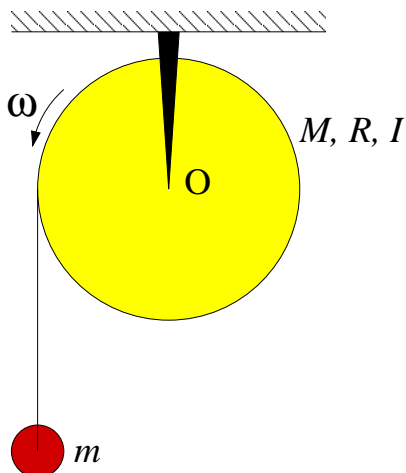
Propuesto:

Encuentre la ecuación de movimiento de un péndulo físico formado por una barra de largo L y masa m , que cuelga de un extremo.

¿La aceleración angular es mayor o menor que la un péndulo simple? ¿Por qué?

6.2. Polea con masa

Considere una polea de masa M , radio R y momento de inercia I que está sujeta por su centro en O . De la polea cuelga una cuerda ideal en cuyo extremo está sujeta una masa m . Se busca saber cómo gira la polea.



Sobre la polea actúan tres fuerzas externas: su peso $m\vec{g}$, la reacción del soporte en O \vec{R} y la tensión de la cuerda \vec{T} . Las dos primeras fuerzas no ejercen torque respecto al punto fijo O pues su brazo es nulo. La tensión se aplica en el extremo del círculo, a una distancia R del centro. Como el vector que va del punto O al punto de aplicación es perpendicular a la tensión, el brazo es simplemente R . Por último el sentido del torque es, de acuerdo a la regla de la mano derecha, un vector que sale del plano hacia afuera (según \hat{k}). Luego

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = RT\hat{k} \quad (45)$$

Se debe notar que si la cuerda hubiera estado sujeta en el borde derecho del círculo, el torque habría sido $-RT\hat{k}$.

Luego, la ecuación de movimiento de la polea es

$$I_O\alpha = RT \quad (46)$$

El movimiento de la masa m se determina de la ecuación de Newton. Tomando el eje y vertical hacia arriba se tiene

$$ma = T - mg \quad (47)$$

Se tiene, además, la relación cinemática

$$a = -R\alpha \quad (48)$$

donde el signo “-” aparece porque cuando la polea gira en su sentido positivo, la masa baja (es decir, se mueve en sentido negativo).

Reemplazando (48) en (47) se obtiene

$$T = mg - mR\alpha \quad (49)$$

que al reemplazar en (46) da

$$\alpha = \frac{mgR}{I_O + mR^2} \quad (50)$$

que muestra que la polea acelera debido al torque de la masa que cuelga. Un mayor momento de inercia provoca que la polea acelere más lentamente debido a que cuesta más hacer girar a la polea.

La aceleración de la masa m es

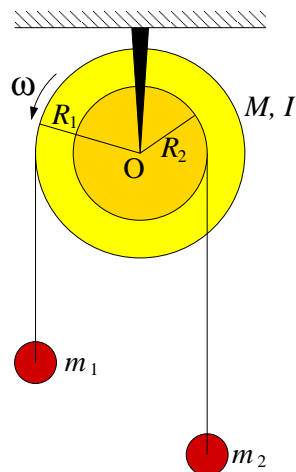
$$a = -R\alpha \quad (51)$$

$$= -\frac{g}{1 + I_O/MR^2} \quad (52)$$

lo que indica que acelera más lento que g . Nuevamente, esto es producto de la inercia de la polea.

Propuesto:

Determine la aceleración angular de una polea que tiene dos radios donde se enrollan las cuerdas y de la que cuelgan dos masas. Indique la condición crítica para que la polea gire en uno u otro lado.



7. Lecturas Recomendadas

Como los capítulos de los libros cambian de edición en edición, no es posible dar una indicación general de cual capítulo leer.

Sin embargo, para las ediciones que están en la biblioteca se recomienda.

- Serway, Secciones 10.6, 10.7, 11.1, 11.2, 11.3 y 11.4
- Tipler y Mosca, Física para la Ciencia y la Ingeniería, Secciones 9.3, 9.4, 9.5, 10.1 (opcionales 10.2 y 10.3)
- Cualquier libro de Física en los capitulos de Rotacion o Dinámica Plana de Sólidos Rígidos.

FIIA2 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Semestre 2008-1

Unidad 4D: Dinámica Plana III – Movimiento de Rodadura

Por: René D. Garreaud y Hugo F. Arellano

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

Indice

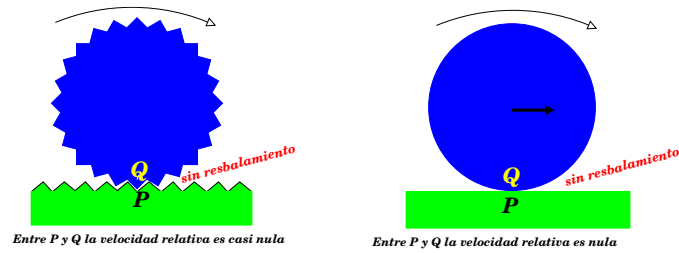
0.1. Rotaciones en torno a eje fijo	2
0.2. Rueda sobre plano inclinado	3
0.3. Consideraciones geométricas	4
0.4. Energía en rodadura perfecta	5
0.5. Comentarios sobre la relación $\vec{r} = I\vec{\alpha}$	7
0.6. Apéndice	8

En una primera caracterización del movimiento de cuerpos sólidos, en relación a sus contactos con elementos externos, podemos identificar dos casos de interés particular:

- aquellos movimientos de *rotación pura* en torno a un eje fijo; y
- aquellos movimientos de rodadura sin resbalamiento.

Ciertamente estos no son los únicos casos concebibles. Podemos agregar movimientos compuestos de rotación y traslación (como un boomerang en el aire), y de rotación con resbalamiento (como el neumático de un vehículo al partir resbalando).

Si pensamos específicamente en una rueda, en la figura de más abajo ilustramos una rueda dentada que gira, sin deslizar, sobre una superficie igualmente dentada. Cuando los dientes P y Q entran en contacto no hay deslizamiento mutuo, de modo que la velocidad *instantánea* relativa entre ellos es nula. Puesto que el engranaje inferior está en reposo, entonces Q necesariamente está en reposo instantáneo. Esta idea se extiende a la rueda que no resbala de la derecha, donde observamos que el punto Q de la rueda en contacto con el plano está en reposo instantáneo.



0.1. Rotaciones en torno a eje fijo

En la unidad anterior abordamos el estudio de la *Máquina de Atwood*, consistente en un disco de dos cantos que gira en torno a un eje fijo debido a cargas dispuestas asimétricamente. Si I_o es el momento de inercia del disco con respecto a su eje de rotación ('o'), entonces el torque externo con respecto a ese eje ($\vec{\tau}_o$) induce una aceleración angular $\vec{\alpha}$ (alfa), determinada por

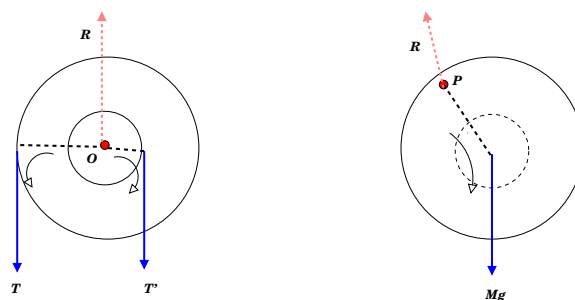
$$\vec{\tau}_o = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_o \vec{\alpha}. \quad (1)$$

Recordar que esta es una relación vectorial. Sin embargo, para cuerpos planos (y si 'o' es escogido en el plano del papel), entonces los torques resultantes son perpendiculares a este plano. Si \hat{k} es un vector unitario saliendo del (o entrando al) papel, entonces podemos expresar

$$\vec{\tau}_o = \tau_o \hat{k}; \quad \vec{\alpha} = \alpha \hat{k},$$

con lo cual obtenemos la relación para las componentes

$$\tau_o = I_o \alpha.$$



En la figura de más arriba se ilustran dos casos de rotación en torno a un eje fijo: el de la máquina de Atwood (izquierda) y el de una rueda que puede girar (a modo de péndulo) en torno al eje P. Ambas se rigen por la misma ecuación del movimiento $\tau_{fijo} = I_{fijo} \alpha$, donde el eje fijo se ubica en O y P, respectivamente.

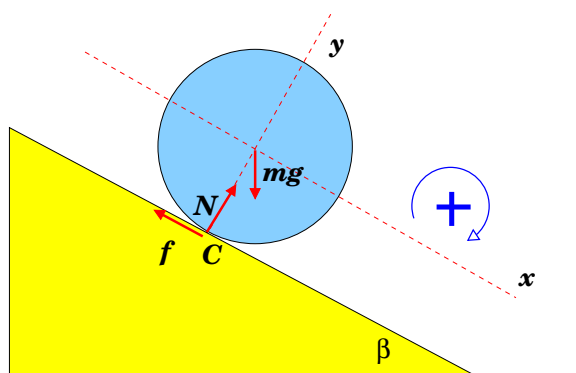
De forma muy general, la ecuación de torques (1) es válida cuando ellos se evalúan con respecto a un eje instantáneamente en reposo (*eje instantáneo de rotación*), siendo el momento de inercia

evaluado con respecto a ese eje. Por lo tanto podemos aplicarla a una rueda que rota sin resbalar, donde el punto de contacto está instantáneamente en reposo. Así,

$$\vec{\tau}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_C \vec{\alpha} . \quad (2)$$

0.2. Rueda sobre plano inclinado

Estudiemos el caso de una rueda de masa M y radio R rodando sobre un plano inclinado con roce. No hay resbalamiento (gracias al roce), de modo que el punto de la rueda en contacto con el piso está instantáneamente en reposo. Denotamos ese punto por 'C'. Denominando 'objeto' a la rueda, entonces las fuerzas externas actuando sobre ella son:



1. Peso (magnitud Mg hacia abajo)
2. Fuerza de contacto, que descomponemos en normal (componente $N \perp$ al plano inclinado) y fuerza de roce (componente f a lo largo del plano).

Podemos escribir la ecuación para el movimiento traslacional del centro de masas (CM), $\vec{F} = M\vec{a}$, donde \vec{a} representa la aceleración del centro de masas de la rueda. Para este ejemplo específico,

$$M\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} = M\vec{a} ,$$

que proyectadas según los ejes \hat{x} e según \hat{y} conducen a

$$Mg \sin \beta - f = Ma_x \quad (3)$$

$$-Mg \cos \beta + N = 0 \rightarrow N = Mg \cos \beta , \quad (4)$$

quedándonos 2 incógnitas (f y a_x), pero sólo 1 ecuación.

ADVERTENCIA: la igualdad $f = \mu N$ es válida sólo en el límite del resbalamiento. Cuando ello no se especifica, entonces se está en el régimen $f < \mu N$. Se trata de una desigualdad, por lo que f y N se deben manejar como variables independientes.

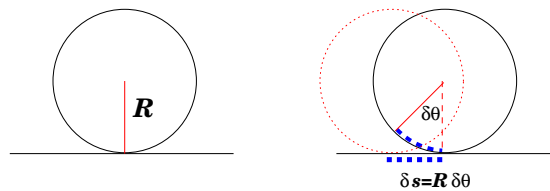
Ahora, si aplicamos la ecuación de torques con respecto al punto de contacto, es fácil verificar

$$\tau_C(M\vec{g}) + \tau_C(\vec{f}) + \tau_C(\vec{N}) = I_C\alpha \quad \rightarrow \quad MgR \sin \beta = I_C\alpha$$

0.3. Consideraciones geométricas

En el caso de una rueda que rota sin resbalar sobre una superficie, el desplazamiento de su centro se relaciona de forma muy simple con la rotación angular que experimenta. Para fijar ideas, en la figura de más abajo se ilustra una rueda de radio R en contacto con una superficie rectilínea. Al desplazar el centro de la rueda en δx , esta rota angularmente en $\delta\theta$. La huella impresa sobre la superficie coincide con el arco $R\delta\theta$. Así,

$$\delta x = R\delta\theta$$



Si estas variaciones transcurren en un lapso δt , entonces

$$\frac{\delta x}{\delta t} = R \frac{\delta\theta}{\delta t},$$

de modo que al tomar el límite $\delta t \rightarrow 0$,

$$v = R\omega.$$

La velocidad v (instantánea) corresponde a la de traslación de su centro. Derivando ambos términos de la igualdad obtenemos

$$a = R\dot{\omega} = R\alpha$$

RESOLUCION DEL PROBLEMA DE LA RUEDA.

Resumimos para el ejemplo de la rueda de masa M y radio R , que rueda sin resbalar sobre un plano inclinado en un ángulo β con respecto a la horizontal. Hemos encontrado cuatro relaciones que determinan completamente su movimiento:

$$Mg \sin \beta - f = Ma_x \quad \text{movimiento según } x \quad (5)$$

$$-Mg \cos \beta + N = 0 \quad \text{movimiento según } y \quad (6)$$

$$MgR \sin \beta = I_C \alpha \quad \text{movimiento de rotación} \quad (7)$$

$$a_x = R\alpha \quad \text{restricción de no resbalamiento} \quad (8)$$

Si queremos obtener a_x , de la Ec. (7) se tiene que $\alpha = MgR \sin \beta / I_C$, que sustituida en la Ec. (8) nos da para a_x

$$a_x = g \frac{MR^2}{I_C} \sin \beta .$$

Recordar que I_C es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el punto de contacto. Si denotamos por I_{CM} al momento de inercia que pasa por el centro de masas de la rueda, entonces el teorema de Steiner nos permite afirmar que $I_C = MR^2 + I_{CM}$. Con lo anterior,

$$a_x = \frac{g \sin \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} .$$

Un par de alcances destacables sobre este resultado

- Notar que la aceleración del centro de masas es constante, de modo que su velocidad asociada se relaciona con el desplazamiento mediante

$$v^2 - v_o^2 = 2a_x \Delta x .$$

- Notese que si $I_{CM} = 0$, se obtiene el resultado conocido para un cuerpo resbalando sin roce: $a_x = g \sin \beta$. ¿Es esto razonable?.
- La ecuación (5) para el roce f sugiere una aceleración límite (¿máxima o mínima?) que garantice no resbalamiento. Se deja propuesto determinar el ángulo β máximo que garantice que la rueda no resbala.
- Una esfera maciza tiene un momento de inercia $2MR^2/5$ con respecto a un eje que pasa por su centro. Verifique que en tal caso

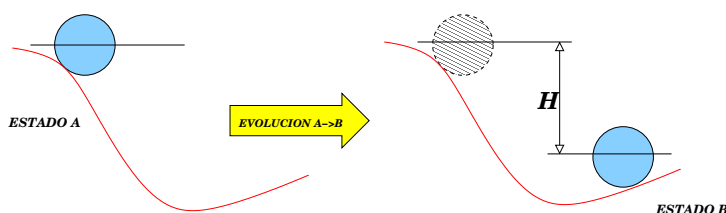
$$a_x = (5/7)g \sin \beta \approx 0.71g \sin \beta .$$

Se deja propuesto comparar este resultado con un disco y un aro.

- La caída de un 'yo-yo' es una extensión natural del problema de la rueda: hacer $\beta \rightarrow \pi/2$, sustituir $f \rightarrow T$, la tensión del cordel del yo-yo. En este caso se propone calcular la tensión del cordel.

0.4. Energía en rodadura perfecta

Si la rueda está en una configuración A y evoluciona a otra B, entonces la diferencia de energía cinética entre los dos estados es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas en la evolución.



Considerando la energía mecánica E como la suma de la cinética K y potencial gravitacional U_g , entonces

$$(K + U_g)_B = (K + U_g)_A + W_{A \rightarrow B}(\text{resto de las fuerzas})$$

donde $W_{A \rightarrow B}(\text{resto de las fuerzas})$ corresponde al trabajo en la evolución $A \rightarrow B$ de todas las fuerzas que no sean gravitatorias. En el caso particular de la rueda sobre el plano inclinado hay tres fuerzas a considerar:

- El peso: ya incluido en el término de energía potencial;
- La normal: no trabaja, es decir $W_{A \rightarrow B}(\text{normal}) = 0$;
- El roce: no trabaja puesto que no hay deslizamiento mutuo entre la rueda y el piso, con lo cual $W_{A \rightarrow B}(\text{roce}) = 0$.

Con lo anterior podemos escribir

$$K_B = K_A + Mgh \quad (9)$$

La energía cinética en cada caso se puede obtener considerando el movimiento de la rueda como de rotación pura en torno al punto de contacto, es decir

$$K = \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

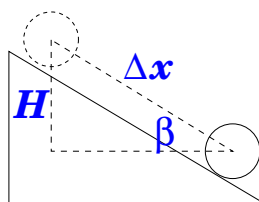
Podemos obtener I_C utilizando el teorema de Steiner, $I_C = MR^2 + I_{CM}$, con lo cual

$$\omega_B^2 = \omega_A^2 + \frac{2Mgh}{MR^2 + I_{CM}}.$$

Nuevamente imponemos la condición de rodadura sin resbalamiento, $v_B = \omega_B R$, $v_A = \omega_A R$, con lo cual

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2Mgh}{MR^2 + I_{CM}} = v_A^2 + 2 \left(\frac{g \sin \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} \right) \Delta x.$$

En esta ultima hemos usado $H = \Delta x \sin \beta$ (ver figura de más abajo).



De esta última relación inferimos por simple inspección que la aceleración lineal del centro de la rueda es

$$a_x = \frac{g \sin \beta}{1 + I_{CM}/MR^2},$$

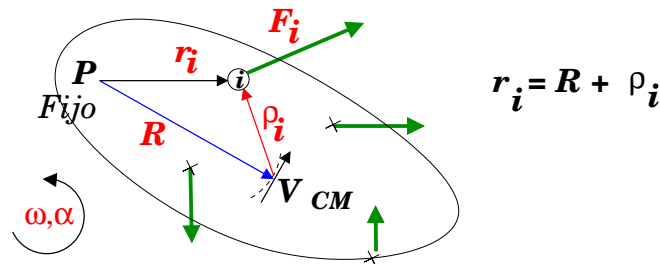
coincidente con la obtenida mediante la aplicación directa de las leyes de Newton. Era un resultado exigible, dado que la relación energía-trabajo se obtiene de las mismas leyes.

0.5. Comentarios sobre la relación $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Hasta ahora hemos aplicado la relación $\vec{\tau}_P = I_P\vec{\alpha}$ a todo punto P instantáneamente en reposo. Sin embargo, como veremos a continuación, esta relación también se puede aplicar cuando P coincide con el centro de masas del sólido. Por lo tanto,

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha}.$$

En la figura de más abajo se esquematiza un sólido con eje instantáneo de rotación en P . Las N fuerzas externas se representan por los vectores de color verde y se rotulan mediante subíndices i , con $i = 1, \dots, N$.



1. Denotamos por \vec{R} la ubicación del CM con respecto a P .
2. En torno a P , el CM describe un arco infinitesimal de circunferencia. Su velocidad \vec{V} es perpendicular a \vec{R} . Se comprueba que $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$.
3. Puesto que el centro de masas describe (entre t y $t + \delta t$) un arco de circunferencia, su aceleración tendrá dos componentes: una radial (según $-\hat{R}$) proporcional a V^2/R , y otra tangencial (perpendicular a \hat{R} y a ω) de valor αR . Entonces,

$$\vec{a} = -\frac{V^2}{R}\hat{R} + \vec{\alpha} \times \vec{R}. \quad (10)$$

4. Si rotulamos con $\{1, \dots, i, \dots, N\}$ los puntos de aplicación de las N fuerzas externas sobre el sólido, y por \vec{R} al vector que une P con CM, entonces

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i.$$

Aquí \vec{r}_i localiza i con respecto a P , y $\vec{\rho}_i$ al mismo punto con respecto a CM.

5. La ecuación de torques, con respecto a P , se escribe

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots = I_P \vec{\alpha} \quad (11)$$

6. Sustituyendo $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i$, y reagrupando términos,

$$\vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots) = I_P \vec{\alpha}$$

7. Claramente $\vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots = \vec{\tau}_{CM}$, el torque neto con respecto a CM. Además de lo anterior, reconocemos $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = M\vec{a}$, con \vec{a} la aceleración del CM. Sustituyendo en (11) obtenemos

$$\vec{\tau}_{CM} + \vec{R} \times (M\vec{a}) = I_P \vec{\alpha}.$$

8. Al reemplazar \vec{a} de la Ec. (10), usando que $\vec{R} \times \hat{R} = 0$, se tiene

$$\vec{\tau}_{CM} + \vec{R} \times (M\vec{\alpha} \times \vec{R}) = I_P \vec{\alpha}.$$

9. Se pide que verifique la identidad $\vec{R} \times (M\vec{\alpha} \times \vec{R}) = MR^2\vec{\alpha}$, con la cual

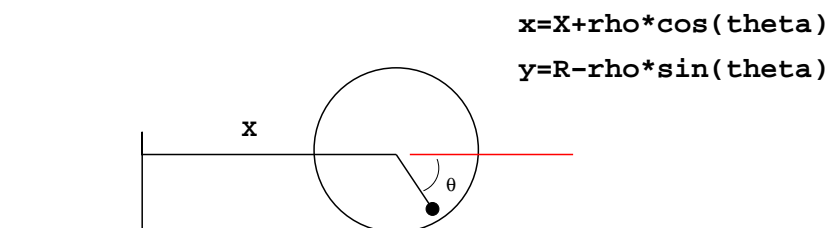
$$\vec{\tau}_{CM} = \underbrace{(I_P - MR^2)}_{I_{CM}} \vec{\alpha},$$

vale decir,

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM} \vec{\alpha}.$$

0.6. Apéndice

Una aplicación MatLab interesante es dibujar la trayectoria de los puntos de una rueda cuando este rueda sin resbalar.



Si tomamos el eje x la dirección del movimiento del centro de la rueda, y el ángulo θ creciente en el sentido horario, entonces podemos decir que las coordenadas (X, Y) del centro del disco quedan descritas mediante

$$X = R\theta, \quad Y = R.$$

Esta construcción garantiza que para $\theta = 0$, el centro de la rueda se ubica en $(0, R)$. Las coordenadas (x, y) de un punto P en la rueda está dada simplemente por

$$x = X + \rho \cos \theta \quad (12)$$

$$y = R - \rho \sin \theta . \quad (13)$$

Si dividimos ambas igualdades por R y denotamos $h \equiv \rho/R$, entonces

$$x_R \equiv x/R = \theta + h \cos \theta \quad (14)$$

$$y_r \equiv y/R = 1 - h \sin \theta , \quad (15)$$

con $0 \leq h \leq 1$. Juegue con la siguiente rutina MatLab, modificándola a gusto, para visualizar lo que resulta. Al hacer $h = 0$ se está identificando el centro de la rueda, cuya trayectoria debiera ser recta. Al hacer $h = 1$ se identifica un punto en la periferia de la rueda. Cualquier valor intermedio identificará puntos al interior de la rueda.

```
theta_a=0; theta_b=6*pi; dtheta=pi/30;
theta=theta_a:dtheta:theta_b;
h=1;
xr=theta+h*cos(theta);
yr=1-h*sin(theta);
plot(xr,yr)
axis([0,theta_b,0,3]);
```

Referencias:

La rodadura perfecta de un cuerpo rígido se presentan en

- Sección 11.1 del libro *Física* de Serway, Tomo I, 3ra edición.
- Secciones 9.7 del libro *Física para la Ciencia y Tecnología* de Tipler.
- Secciones VI.7 del libro *Introducción a la Mecánica* de N. Zamorano.