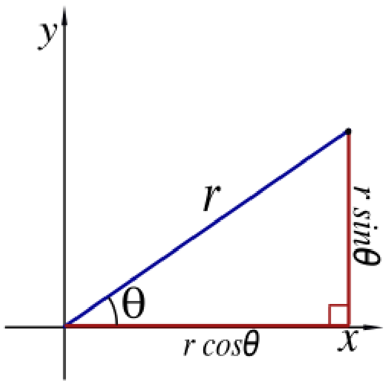
Vectores Unitarios

M. Angeles Gallego

23 de agosto de 2008



1−Vectores unitarios:

Los vectores unitarios forman una base ortonormal, es decir, son perpendiculares entre si, y además su norma vale 1.

Cartesianas:(En 3 dimensiones) Base: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

Polares: (En 2 dimensiones) Base: $(\hat{r}, \hat{\phi})$

Producto punto:

Si tengo dos vectores y entre ellos hay un ángulo θ, entonces su producto punto se define como:

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos(\theta)$$

Luego, como en las bases cartesiana y polar, los vectores unitarios son perpendiculares entre si, el ángulo entre ellos es: $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $\cos(\pi/2) = 0$ Por lo tanto el producto punto de ellos es nulo.

Ejemplo 1:Producto punto

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$$

$$\hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0$$

Y el producto punto de ellos consigo mismo es uno, pues su norma vale 1, (y el ángulo entre ellos es $\phi = 0$), es decir:

$$||\hat{x}|| = \sqrt{\hat{x} \cdot \hat{x}} = 1$$

por lo tanto:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$$

2−<u>Relación entre sistemas:</u> La relacion entre ambos sistemas es:

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

La distancia del origen al punto en cuestion, esta dada por la norma:

$$||\vec{r}|| = \sqrt{(x\hat{x} + y\hat{y})^2} = \sqrt{x\hat{x}\cdot x\hat{x} + 2y\hat{y}\cdot x\hat{x} + y\hat{y}\cdot y\hat{y}}$$

Pero sabemos que:

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$$

$$\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$$

luego:

$$||\vec{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$||\vec{r}|| = \sqrt{r^2{\sin\phi}^2 + r^2{\cos\phi}^2} = r$$

3−<u>Coordenadas Polares:</u>
<u>Posición:</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

<u>Velocidad:</u>
Usamos la notación:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

Además, se usa la porpiedad:

$$\dot{(abc)} = \dot{a}bc + a\dot{b}c + ab\dot{c}$$

Así, derivando la posición, obtenemos:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + \dot{\hat{r}}r$$

reemplazando $\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$(visto en clases), obtenemos:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

<u>Aceleración:</u>

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{\hat{r}}\dot{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}}$$

reemplazando $\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{r}$(visto en clases)
obtenemos:

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r}$$

<u>Ejemplo 2:</u>Norma de la velocidad:
Hagamos el producto punto de la velocidad, es decir calculemos su norma:
Ya vimos la definición de norma:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})\cdot(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})}$$

Ahora basta hacer producto punto término a término, pues:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

luego:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{r}\hat{r}\cdot\dot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\hat{r}\cdot r\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\cdot r\dot{\phi}\hat{\phi}}$$

Pero vimos que: $\hat{\phi}\cdot\hat{r} = 0$ y $\hat{\phi}\cdot\hat{\phi} = 1$ lo mismo ocurre para $\hat{r}$. Luego:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{r}^2 + r\dot{\phi}^2}$$