En este problema no les puse los desarrollos algebraicos de los limites, yo lo saque con derivadas no mas, traten de hacerlo por limite, pero en general todos los problemas que hagan de aqui en adelante seria muy bueno que los hicieran derivando, porque eso haran el resto de sus vidas.

Problema:

Tenemos una particula que viaja en una trayectoria dada por la funcion:

$$r(\phi) = r_0 e^{\alpha\phi}$$

con α una constante.

Ademas:

- 1- cada vez que la particula da una vuelta el radio se duplica.
- 2- La rapidez (modulo de la velocidad) crece con el radio de la siguiente forma:

$$||v|| = v_0 r$$

- a) Calcular α .
- b) Determinar v radial, v angular, y a radial, en funcion de ϕ .

Respuestas:

a) Condicion 1, quiere decir: $2r(\phi) = r(\phi + 2\pi)$ de ahi depsejan α .

resultado: $\alpha = \ln(2)/2\pi$

b) Queremos calcular $v_{radial} = \dot{r}$,

resultado:

$$v_{radial} = r_0 \alpha \dot{\phi} e^{\alpha\phi}$$

.

Nota: Para derivar la exponencial lo hacen por regla de la cadena, pues es ϕ la funcion que depende del tiempo, y no conocemos explicitamente esa dependencia:

$$\frac{d(r_0 e^{\alpha\phi(t)})}{dt} = \frac{d(r_0 e^{\alpha\phi(t)})}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$$

Esto lo sacan facilmente derivando, pero traten de hacer el limite como lo han visto en calculo y comprueben que les da lo mismo.

Para la velocidad angular es lo mismo:

$$v_{angular} = r \dot{\phi} = r_0 e^{\alpha\phi} \dot{\phi}$$

Falta buscar $\dot{\phi}$, usamos la condicion 2:

$$\|v\| = v_0 r = \sqrt{(r_0 \alpha \dot{\phi} e^{\alpha \phi})^2 + (r_0 \alpha e^{\alpha \phi})^2} = r_0 e^{\alpha \phi} \dot{\phi} \sqrt{1 + \alpha^2}$$

de ahí despejan $\dot{\phi}$

reemplazan esto en v radial y angular, y están listos, pq $v_{total} = v_{radial} + v_{angular}$

para la aceleración radial, deben calcular $a = \dot{r} - r(\dot{\phi})^2$

eso da:

$$\dot{r} = \frac{r \alpha^2 v_0^2}{\alpha^2 + 1}$$
$$(\dot{\phi})^2 = \frac{v_0^2}{\alpha^2 + 1}$$

reemplazan en a y listo.