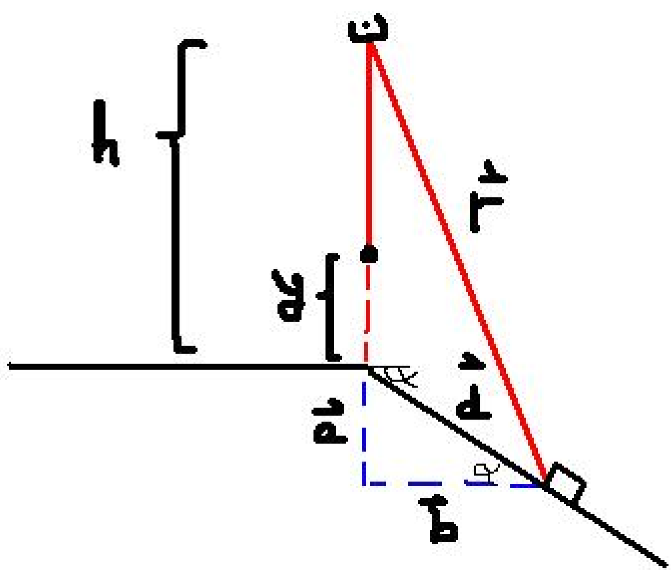
Auxiliar 1

Prof: Marcel Clerc
Aux: M. de los Angeles Gallego, Fernando Becerra

6 de agosto de 2008

Problema 1:



Nos dicen que el carro avanza con velocidad constante v_0, que el largo total de la cuerda es $2h$ y que la altura de la polea es h.

Solución:

De la figura vemos que:

$$2h = (h - y) + r \qquad \Rightarrow y = r - h \tag{1}$$

Ahora solo nos falta calcular r, usando Pitágoras (para el triangulo grande):

$$r^2 = (h + a)^2 + b^2 \qquad \Rightarrow r = \sqrt{(h + a)^2 + b^2} \tag{2}$$

Necesitamos el valor de a y b, sabemos que el carrito avanza con v_0, luego:

$$c = v_0 t \Rightarrow b = \cos\alpha v_0 t, \qquad a = \sin\alpha v_0 t \tag{3}$$

Reemplazamos (3) en (2) y este valor que obtenemos para r en (1), para obtener y:

$$y = \sqrt{(h + \sin\alpha v_0 t)^2 + (\cos\alpha v_0 t)^2} - h \tag{4}$$

Desarrollando este parentesis obtenemos:

$$y = \sqrt{(v_0)^2 t^2 + h^2 + 2hv_0 \sin\alpha t} - h \tag{5}$$

Una vez que tenemos la posición, hacemos los límites correspondientes:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \tag{6}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\sqrt{(v_0)^2 (t + \Delta t)^2 + h^2 + 2hv_0 \sin\alpha (t + \Delta t)} - h) - (\sqrt{(v_0)^2 t^2 + h^2 + 2hv_0 \sin\alpha t} - h)}{\Delta t} \tag{7}$$

Para desarrollar el término cuadrático podemos usar el Binomio de Newton:

$$(1 + b)^n = 1 + nb \tag{8}$$

Este se cumple si b es muy pequeo, en este caso la cantidad pequea es Δt, pues buscamos el límite cuando esta tiende a cero.

luego:

$$(t + \Delta t)^2 = t^2 (1 + \Delta t)^2 = 1 + 2\Delta t \tag{9}$$

O se puede entender simplemente como un desprecio de los terminos cuadraticos (por que? piensenlo, se los dije en clases...sino vuelvan a preguntar):

$$(t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 = t^2 + 2t\Delta t \tag{10}$$

Así la expresión queda:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\sqrt{(v_0)^2 (t + 2t\Delta t) + h^2 + 2hv_0 \sin\alpha (t + \Delta t)} - h) - (\sqrt{(v_0)^2 t^2 + h^2 + 2hv_0 \sin\alpha t} - h)}{\Delta t} \tag{11}$$

Queremos factorizar esta expresion de tal forma que podamos simplificar los terminos que no estan multiplicados por Δt, pues al tomar limite estos van a diverger.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\sqrt{[(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t][1 + \frac{(v_0)^2 2t\Delta t + 2hv_0 \sin \alpha \Delta t]}{[(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t]}}) - (\sqrt{(v_0)^2 t^2 + h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t})}{\Delta t} \tag{12}$$

Ahora usamos el Binomio de Nweton para el termino $(1+\frac{(v_0)^2 2t\Delta t + 2hv_0 \sin \alpha \Delta t}{(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t})^{1/2}$, ya que es de la forma $(1 + A\Delta t)^{1/2}$, nos queda:

$$(1+\frac{(v_0)^2 2t\Delta t + 2hv_0 \sin \alpha \Delta t}{(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t})^{1/2} = 1 + 1/2 \frac{(v_0)^2 2t\Delta t + 2hv_0 \sin \alpha \Delta t}{(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t} \tag{13}$$

reemplazando esto en v:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\sqrt{[(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t]}[1 + 1/2 \frac{(v_0)^2 2t\Delta t + 2hv_0 \sin \alpha \Delta t}{(v_0 t)^2 + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t}]) - (\sqrt{(v_0)^2 t^2 + h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t}}{\Delta t} \tag{14}$$

y nos damos cuenta que hay dos términos iguales, los restamos y obtenemos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{(v_0)^2 t\Delta t + hv_0 \sin \alpha \Delta t}{\sqrt{(v_0)^2 t + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t}})/\Delta t \tag{15}$$

simplificamos los Δt y obtenemos:

$$v = (\frac{(v_0)^2 t + hv_0 \sin \alpha}{\sqrt{(v_0)^2 t + +h^2 + 2hv_0 \sin \alpha t}}) \tag{16}$$

la aceleración es el mismo cuento...haganla y si tienen dudas me escriben ,o la proxima auxiliar la vemos, y comprueben que su resultado esta bien usando derivadas como saben hacerlo.