CLASE 06 DE JULIO DE 2008 – EM737

Pablo Medina C.

Primeros conceptos en modelación dinámica de sistemas eléctricos

1.- Ecuación de oscilación de una máquina sincrónica

Consideremos un sólido rígido que gira en torno a un eje. A partir de física muy básica se puede escribir la siguiente relación:

$$I\dot{\omega} = \sum_i T_i$$

Donde:

Ti : Torque i-ésimo sobre el sólido rígido
I : Momento de inercia del sólido rígido
$\dot{\omega}$: Derivada temporal de la velocidad angular

La ecuación anterior tiene la misma forma que la ecuación de Newton para el movimiento de una partícula, en donde se reemplaza la masa por el momento de inercia, la derivada de la velocidad por la derivada de la velocidad angular y la suma de fuerzas por la suma de torques.

En el caso de una máquina sincrónica, se tienen dos torques: uno que acelera (Torque mecánico) y otro que frena (Torque eléctrico)

Aplicando la ecuación de torque a una máquina sincrónica:

$$I\dot{\omega} = T_{mec} - T_{ec}, \; y \;\; considerando \;\; que \;\; P = T\omega$$
$$I\dot{\omega} = \frac{P_{mec} - P_{ec}}{\omega}$$

La velocidad angular en el denominador de la última expresión genera una ecuación no lineal. Sin embargo, si se considera que por lo general estas máquinas no varían grandemente su velocidad de giro, como una buena aproximación se tiene que:

$$I\dot{\omega} = \frac{P_{mec} - P_{ec}}{\omega_0}$$

Donde:

ω_0 : Velocidad sincrónica de giro

Si la expresión anterior se divide por una potencia base trifásica en [MVA]

$$\frac{I}{S_{b3\phi}}\dot{\omega}=\frac{P_{mec}/S_{b3\phi}-P_{elec}/S_{b3\phi}}{\omega_0}$$

$$\frac{I}{S_{b3\phi}}\dot{\omega}=\frac{P_{mec[p.u.]}-P_{ec[p.u]}}{\omega_0}$$

Lo que sigue son "arreglos cosméticos"

$$2\left(\frac{\frac{1}{2}\omega_0 I}{S_{b3\phi}}\right)\dot{\omega}=P_{mec[p.u.]}-P_{elec[p.u.]}$$

$$\frac{2}{\omega_0}\underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2}I\omega_0^{\ 2}}{S_{b3\phi}}\right)}_{H}\dot{\omega}=P_{mec[p.u.]}-P_{elec[p.u.]}$$

$$\frac{2H}{\omega_0}\dot{\omega}=P_{mec[p.u.]}-P_{elec[p.u.]}$$

La constante H es conocida como "constante de inercia", tiene como unidad el [s], y de alguna forma es una medida de la energía cinética de rotación de la máquina en régimen permanente. Esta constante, al ser proporcional al momento de inercia de la máquina, da cuenta de la "porfía" de la máquina para cambiar su velocidad de rotación, al igual como la "masa inercial" de una partícula da cuenta de lo mismo, pero aplicado a la velocidad lineal. Un cuerpo de gran masa cuesta sacarlo del reposo, y también cuesta frenarlo.

Ordenando un poco más la última expresión:

$$\dot{\omega}(t)=\frac{\omega_0}{2H}\left(P_{mec[p.u].}-P_{elec[p.u.]}\right)$$

En esta clase se analizará el caso más simple de una máquina sincrónica, cuando esta se modela como una f.e.m. inducida detrás de una reactancia, la cual está en serie con otras reactancias que la conectan con una barra infinita. En este caso:

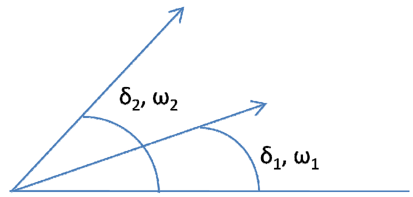
$P_{elec[p.u.]}=\dfrac{EV}{X}\sin\left(\delta(t)\right)$, donde $X=X_{gen}+X_{trafo}+X_{linea}$ y delta el ángulo de esta f.e.m.

Finalmente:

$$\dot{\omega}(t)=\frac{\omega_0}{2H}\left(P_{mec[p.u.]}-\frac{EV}{X}\sin\left(\delta(t)\right)\right)$$

2.- Ecuación del ángulo de la f.e.m. interna de la máquina

Consideremos en general dos “puntos” que giran con ciertas velocidades angulares:



El ángulo “diferencia angular” se puede escribir como:

$$\delta_{dif}(t)=\int_0^t\left(\omega_2(t)-\omega_1(t)\right)dt+\delta_2(0)-\delta_1(0)$$

En el caso de una máquina sincrónica, lo que se busca es escribir la diferencia angular entre la f.e.m. interna de un generador y una referencia angular que gira a velocidad sincrónica. A esta diferencia angular simplemente se le llama “delta”, y de acuerdo a la expresión anterior:

$$\delta(t)=\int_0^t\left(\omega_1(t)-\omega_0\right)dt+\delta_1(0)-\delta_0(0)$$

Derivando la expresión anterior, y simplemente obviando el subíndice 1 asociado a la f.e.m. interna:

$$\dot{\delta}(t)=\omega(t)-\omega_0$$

3.- Representación de la máquina sincrónica en variables de estado. Linealización de las ecuaciones

En el caso más simpe, que es el que estamos estudiando ahora, el comportamiento dinámico de la máquina sincrónica se representa en un sistema de variables de estado con dos variables de estado (ángulo y velocidad angular) y una entrada (potencia mecánica).

La potencia mecánica se suele tomar como un parámetro, pero cuando existe modelamiento dinámico de turbinas y controladores, esta deja de serlo. En esta clase se analizará el caso más general.

Las ecuaciones de estado son:

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0 = f_1\left(\delta, \omega, P_{mec}\right)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_0}{2H}\left(P_{mec[p.u.]} - \frac{EV}{X}\sin\left(\delta\right)\right) = f_2\left(\delta, \omega, P_{mec}\right)$$

Nótese que si bien no se indica una dependencia explícita del tiempo, tanto las variables de estado como la entrada son dependientes del tiempo

Un punto interesante de analizar mediante la representación en variables de estado es el de la estabilidad de pequeña señal de un generador sincrónico, comúnmente llamada "estabilidad de régimen permanente". Para entender de que se trata, consideremos lo siguiente:

"*Imagine un auto que va sobre un camino a una velocidad dada, fijada por su control de velocidad crucero. Este auto está sometido a una serie de perturbaciones, entre las que se pueden mencionar a las vibraciones producidas por las imperfecciones del camino y las variaciones del viento. Si este vehículo no explota producto de un aumento continuo de su velocidad, se puede decir que es estable en régimen permanente*"

Para una máquina sincrónica que la mayor parte del tiempo opera en torno a un punto de operación (de hecho, los despachos económicos son horarios y las tomas de cargas duran un par de minutos), resulta muy importante que saber si es estable en régimen permanente. Para esto se analiza el comportamiento dinámico de la máquina en torno a un punto de operación cuando esta se ve sometida a pequeñas perturbaciones. En sistemas eléctricos, las pequeñas perturbaciones ocurren a cada instante (el continuo cambio en la demanda es uno de ellas).

Analicemos el caso general, cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

El sistema anterior cuando ha alcanzado el régimen permanente, opera en un "punto de equilibrio", el cual se define como el par $x_0, u_0 \ tal \ que \ f(x_0, u_0) = 0$

En torno a este punto de equilibrio, las variables de estado y las entradas se escriben como:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \\ u &= u_0 + \Delta u \end{aligned}$$

Luego:

$$\dot{x} = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u)$$

La linealización del sistema anterior se realiza a través de una aproximación en series de Taylor de orden 1. Para el caso de una variable:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x0} \Delta x$$

En el problema de linealización del estado se tiene que:

$$\dot{x} = \frac{d(x_o + \Delta x)}{dt} = \Delta\dot{x} = f(x_0, u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} \Delta u$$

Por definición de punto de equilibrio, $f(x_0,u_0)=0$. Además, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}$ y $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}$ son matrices.

En general, se tiene que:

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

Con $A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}$ y $B=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}$

Se puede demostrar que para el caso de una máquina:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta\delta(t) \\ \Delta\omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_0 EV}{2HX}\cos(\delta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta(t) \\ \Delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0}{2H} \end{bmatrix} \Delta P_{mec}$$

El análisis de estabilidad en pequeña señal consiste en estudiar las raíces del polinomio característico del sistema:

$$s\Delta x(s) = A\Delta x(s) + B\Delta u(s)$$
$$\Delta x(s) = (sI - A)^{-1} B\Delta u(s)$$

Polinomio característico: p(s)= det(sI-A)

Las raíces del polinomio característico son:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_0 EV}{2HX}\cos(\delta_0) & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{\omega_0 EV}{2HX}\cos(\delta_0) & s \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$s^2 + \frac{\omega_0 EV}{2HX}\cos(\delta_0) = 0$$
$$s = \pm\sqrt{-\frac{\omega_0 EV}{2HX}\cos(\delta_0)}$$

Si δ_0<90°, las “s” son imaginarias puros

Si δ_0=90°, las “s” son 0

Si δ_0>90°, las “s” son reales

Las raíces imaginarias puras implican un comportamiento oscilatorio no amortiguado de la máquina. Se deja propuesto analizar el caso cuando el elemento (4,4) de la matriz A es una constante positiva D.

Las raíces reales implican un comportamiento exponencial, y en este caso, dado que una raíz de p es real positiva, se tendrá un comportamiento exponencial creciente según t, por lo que para este caso el sistema es inestable en pequeña señal, lo cual ya sabíamos del curso anterior.