



Robots Bípedos

EL710

Paul Vallejos

Introducción



CLASIFICACIÓN DE ROBOTS BÍPEDOS

Clasificación de Robots Bípedos

- Se pueden clasificar en dos tipos:
 - Robots Pasivos
 - Robots Activos
- También existen intentos de integración de robots pasivos y activos

Clasificación de Robots Bípedos

- Robots Pasivos

- Son robots diseñados mecánicamente para caminar.
- Caminar es un modo natural.
- Ausencia de motores, o si existen, son pequeños y su labor es sólo facilitar la dinámica

- Robots Activos

- Poseen muchos motores.
- Se mantienen de pie y caminan gracias a su sistema de control



ROBOTS PASIVOS

Robots Pasivos



INTRODUCCIÓN

Robots Pasivos

- Clase de robots bípedos en los cuales caminar es un modo dinámico natural.
- Estas máquinas caminan sólo por efecto de la gravedad en planos inclinados.
- Se puede fácilmente introducir energía a estas máquinas para que caminen en lugares planos.

Juguetes que caminan en rampas

- Existen juguetes bípedos simples que descenden por rampas desde hace un siglo. (Bechstein 1912; Fallis 1888; Mahon 1914; Wilson 1938).
- Los juguetes son estables debido a una gran masa inferior.
- Mucho más recientemente se diseñaron juguetes bajos estos conceptos, que sólo son estables cuando caminan.

Robots pasivo-dinámicos

- Los juguetes que caminan en rampas operan bajo conceptos de hace siglos.
- Su análisis y refinamiento ha sido posible sólo recientemente.
- Las leyes de newton se expresan como complicadas ecuaciones no-lineales.

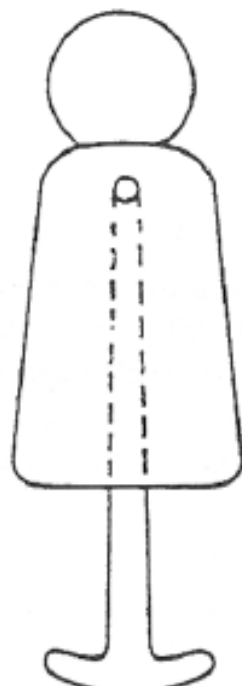
Robots pasivo-dinámicos

- El concepto detrás de los robots pasivo-dinámicos es simple.
 - Locomoción es el movimiento más natural para los mecanismos con piernas, de la misma forma como oscilar es natural de los péndulos.
- Un aparato dinámicamente pasivo puede ser eficiente.
 - No necesita energía para estabilización o control.
 - Sólo necesita energía para recuperar pequeñas pérdidas.
 - La principal fuente de pérdidas son los impactos.

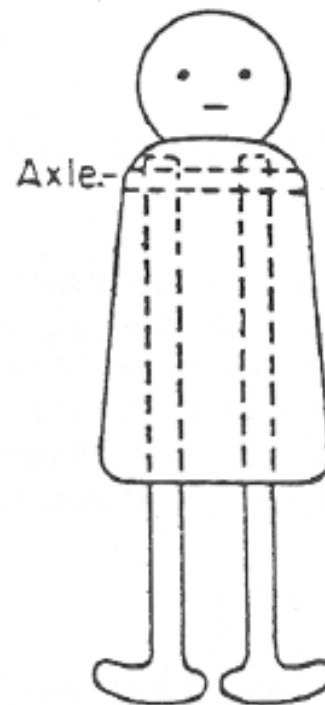
Motivación

- Los robots pasivos son muy eficientes, se aproximan a la eficiencia de un humano.
- Es simple, una vez que se ha asegurado la estabilidad, poner motores no significa un gran esfuerzo.

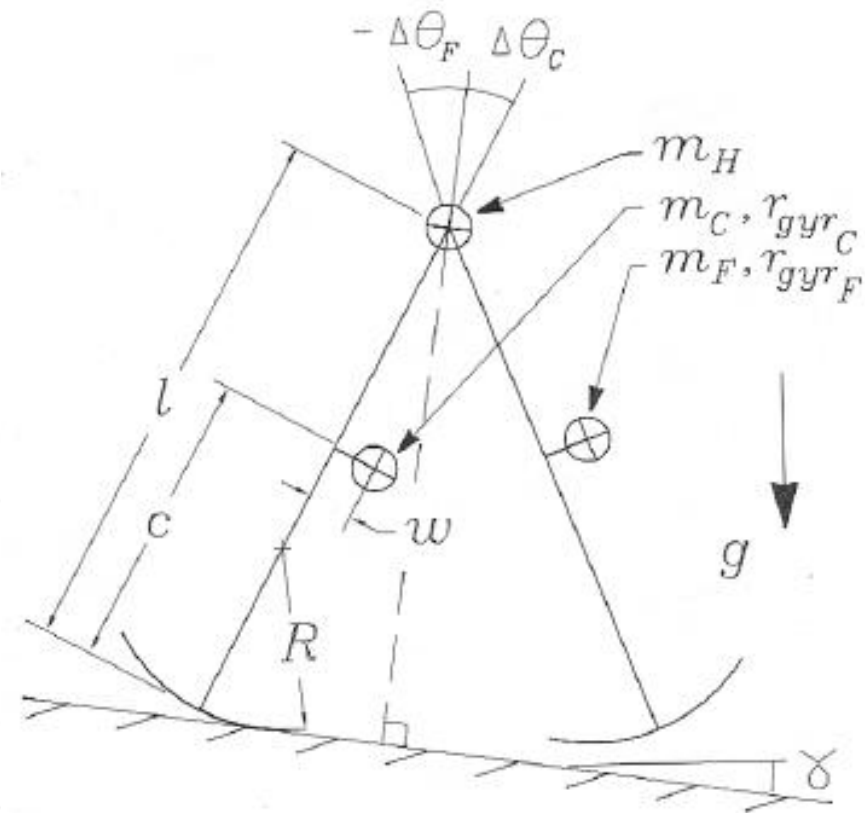
Motivación



Side



Front



Robots Pasivos

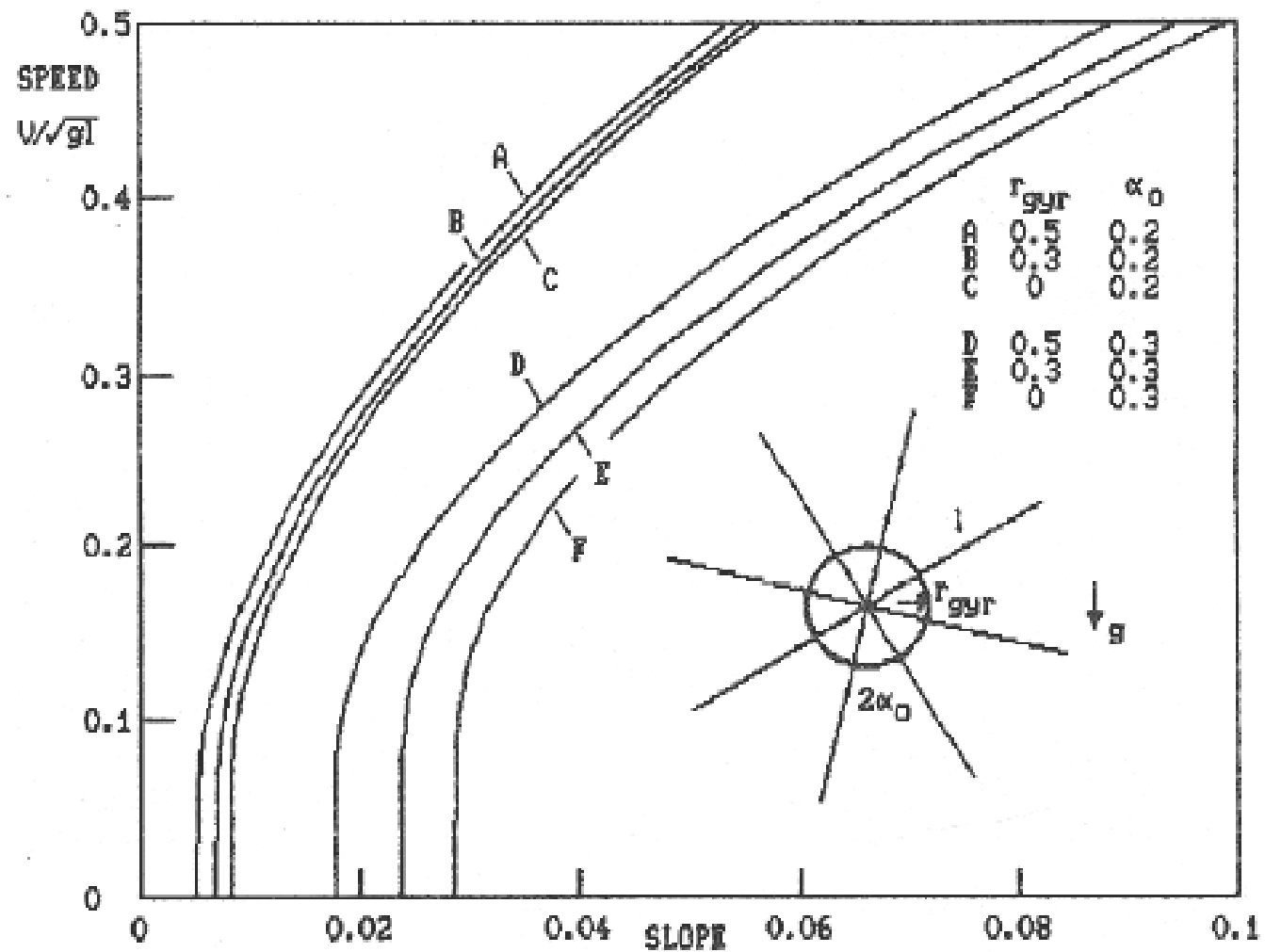


MODELO DE RUEDA

Modelo de rueda

- Cuando se tiene una rueda perfecta, sin roce, ésta es capaz de rodar eternamente sin pérdida de energía.
- Si a la rueda se le remueve el borde, queda un conjunto de piernas que no son capaces de rodar de forma estable en la superficie.
- Esta nueva configuración pierde algo de energía a medida que pasa el tiempo.

Modelo de rueda



Modelo de rueda

- Una caminata humana típica tiene $\alpha_0=0.3$
- Cada colisión se considera inelástica e impulsiva.
- En este caso la rueda conserva el momentum angular en torno al punto de contacto.
- Se puede calcular la pérdida de velocidad.

Modelo de rueda

- El momentum angular justo antes de la colisión

$$H^- = (\cos 2\alpha_0 + r_{\text{gyr}}^2) ml^2 \Omega^-.$$

- El momentum angular justo después de la colisión

$$H^+ = (1 + r_{\text{gyr}}^2) ml^2 \Omega^+.$$

Modelo de rueda

- E igualando

$$\frac{\Omega^+}{\Omega^-} = \frac{\cos 2\alpha_0 + r_{gyr}^2}{1 + r_{gyr}^2} \equiv \eta.$$

- Definiendo la frecuencia del péndulo

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{1 + r_{gyr}^2}.$$

Modelo de rueda

- Entonces

$$\eta = 1 - \sigma^2(1 - \cos 2\alpha_0).$$

- Además, el decaimiento de momentum angular es exponencial ya que

$$\Omega_k \sim \eta^k.$$

Modelo de rueda

- Sin embargo, en una pendiente γ la rueda puede recuperar sus pérdidas y establecer un ciclo de giro estable.
- La velocidad de equilibrio se puede calcular de la ecuación diferencial de rotación sobre el pie de soporte.
- Dado el rango de ángulos usado, se puede linealizar la ecuación.

Modelo de rueda

$$\ddot{\theta} - \sigma^2 \theta \approx \sigma^2 \gamma.$$

- Acá θ se mide con respecto a la normal del piso.
- Se tiene un punto de equilibrio inestable en $\theta = -\gamma$.
- Un paso comienza en $\theta = -\alpha_0$ y el rodar es cíclico si la velocidad inicial Ω_0 se repite de un paso al otro.
- Una repetición implica que la velocidad final debe ser Ω_0/η .

Modelo de rueda

- Un paso estable tiene entonces las siguientes condiciones de borde.

$$\begin{aligned}\theta(0) &= -\alpha_0 & \Omega(0) &= \Omega_0 \\ \theta(\tau_0) &= \alpha_0 & \Omega(\tau_0) &= \Omega_0/\eta\end{aligned}$$

- Luego, resolviendo la ecuación diferencial se obtiene.

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{4\gamma\alpha_0\sigma^2\eta^2}{1-\eta^2}},$$

$$e^{\sigma\tau_0} = \frac{\gamma + \alpha_0 + \Omega_0/\sigma\eta}{\gamma - \alpha_0 + \Omega_0/\sigma}.$$

Modelo de rueda

- Para pequeños ángulos α_0 , la velocidad hacia delante es.

$$V \approx \frac{2\alpha_0}{\tau_0}.$$

- La rueda no tiene porque siempre girar a la velocidad estable, sin embargo, convergerá a esta velocidad luego de perturbaciones siguiendo.

$$\Omega_k - \Omega_0 \sim (\eta^2)^k$$

Robots Pasivos

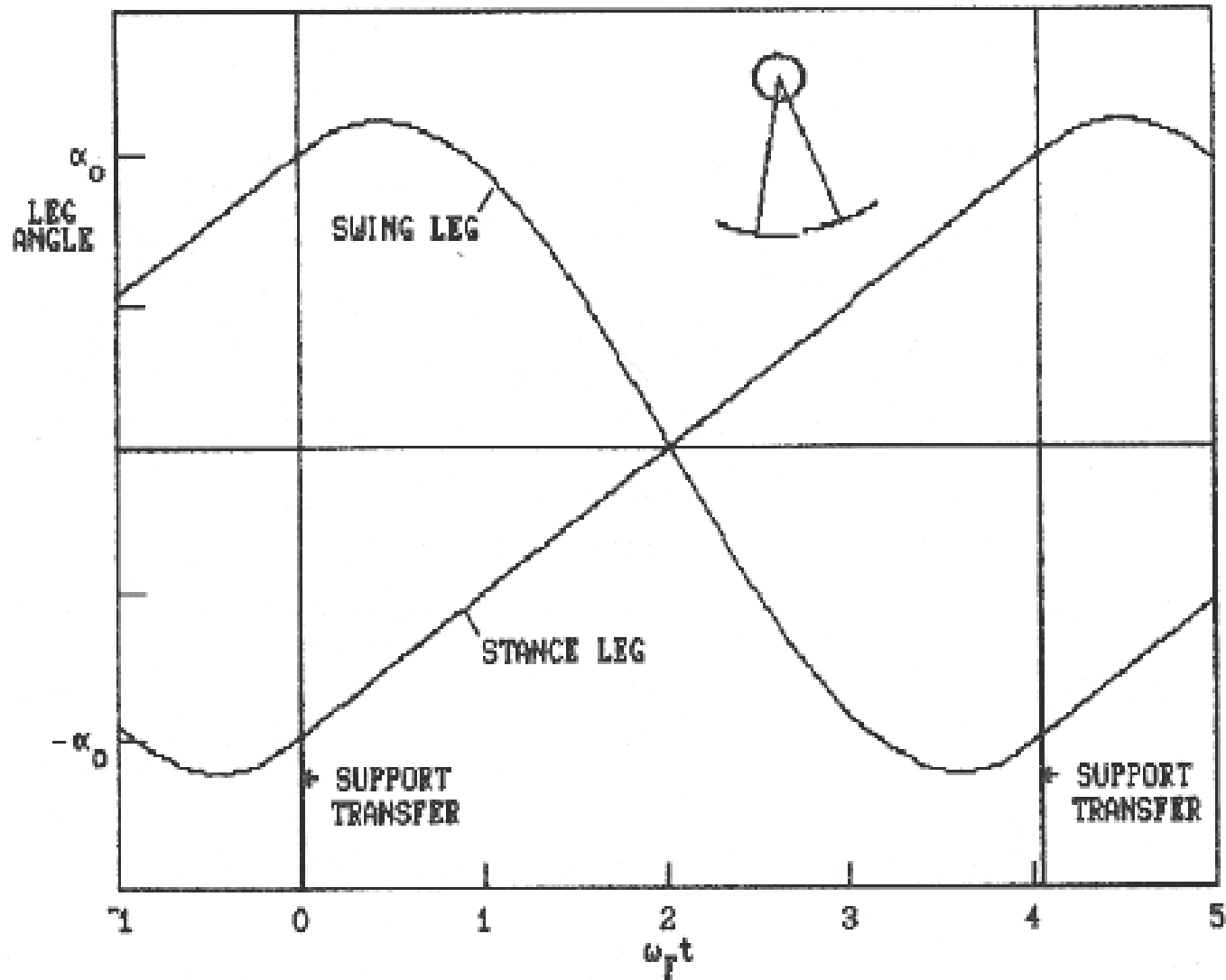


RUEDA SINTÉTICA

Rueda sintética

- Debido a los resultados energéticos obtenidos, el sacarle el borde a la rueda no es una buena idea.
- Sin embargo, se puede dividir la rueda obteniendo pies semicirculares.
- En este caso, si ambas piernas parten con ángulos opuestos $\pm\alpha_0$ y con velocidades angulares iguales Ω_0 , se generará un ciclo infinito.

Rueda sintética



Rueda sintética

- Como el pie de apoyo es un pedazo de la rueda, gira en el piso a velocidad constante.
- La cadera se desplaza de forma paralela al piso a velocidad constante.
- La segunda pierna se balancea como un péndulo no forzado.
- Con esto se sintetiza una rueda con el borde y se logra un giro suave.

Rueda sintética

- Del comportamiento del péndulo, es evidente que la velocidad angular debe satisfacer.

$$\Omega_0 = \frac{2\alpha_0}{\tau_0}.$$

- Donde τ_0 está determinado por la pierna que se balancea y se comporta como un péndulo, siguiendo una trayectoria sinusoidal determinada por.

$$\Delta\theta_F(\tau) = \alpha_0 \cos \omega_F \tau + \frac{\Omega_0}{\omega_F} \sin \omega_F \tau$$

Rueda sintética

- La solución pasa por $\Delta\theta_F = -\alpha_0$ con velocidad Ω_0 , cuando

$$\omega_F \tau_0 = 4.058$$

- Por lo tanto, el período de un paso para la rueda sintética es aproximadamente $2/3$ del período de un péndulo.
- El período de un paso es independiente de α_0 .

Rueda sintética

- La velocidad de la rueda sintética está dada entonces por

$$\Omega_0 = \frac{2\omega_F\alpha_0}{4.058}$$

- Luego, para cambiar la velocidad de la rueda, se cambia el valor de α_0 (el tamaño del paso), mientras τ_0 se mantiene constante (determinado por la inercia de la pierna y la gravedad)

Robots Pasivos



CAMINATA ESTABLE DE UN BÍPEDO GENERAL 2D

Ecuaciones desde el comienzo al fin de un paso

- Durante esta etapa, el robot está soportado sólo por una pierna.
- El estado queda especificado por θ_c , θ_F , Ω_c y Ω_F
- Las ecuaciones son no-lineales, pero pueden ser linealizadas.

$$\mathbf{M}_0 \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_c \\ \dot{\Omega}_F \end{bmatrix} \equiv \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{T}$$

Ecuaciones desde el comienzo al fin de un paso

- T son los torques en el pie de apoyo y en la cadera. El principal torque es el gravitacional.

$$T_g = K[\Delta\theta_{SE} - \Delta\theta]$$

- Y para pequeñas inclinaciones de piso se tiene

$$\Delta\theta_{SE} = \Delta\theta_W + b\gamma$$

Ecuaciones desde el comienzo al fin de un paso

- Reemplazando el torque gravitacional en la ecuación movimiento deja un sistema lineal de cuarto orden que puede ser resuelto para saltos desde el comienzo del paso hasta cualquier tiempo vía una matriz de transición D

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta(\tau_k) \\ \Omega(\tau_k) \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\tau_k) \begin{bmatrix} \Delta\theta_k - \Delta\theta_{SE} \\ \Omega_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_{SE} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ecuaciones desde el comienzo al fin de un paso

- Para la transición hasta el tiempo final del paso, τ_k debe ser elegido de forma tal que los elementos de $\Delta\theta(\tau_k)$ sean iguales y opuestos.
- Definiendo

$$\lambda = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones desde el comienzo al fin de un paso

- Entonces

$$\Delta\theta_k = \lambda\alpha_k,$$

$$\Delta\theta(\tau_k) = -\lambda\alpha_{k+1}.$$

Transferencia de soporte

- Cuando la ecuación anterior se satisface, se produce el intercambio de pierna de soporte y se cumple:
 - Conservación de momentum angular en torno al punto de colisión.
 - Conservación de momentum angular de la otra pierna en torno a la cadera.
- Expresado matemáticamente como

$$M^+\Omega^+=M^-\Omega^-$$

Transferencia de soporte

- El primer elemento de Ω corresponde a la pierna de soporte post-transferencia.
- Entonces, el índice debe ser cambiado en la pre-transferencia.

$$\Omega^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(\tau_k) = F\Omega(\tau_k).$$

- Luego, la velocidad inicial para el paso $k+1$ está dada por.

$$\Omega^{k+1} = M^{+,-1} M^- F \Omega(\tau_k) = \Lambda \Omega(\tau_k)$$

Ecuaciones entre pasos

- Combinando las ecuaciones de comienzo a fin de paso con las ecuaciones de transición, se generan las ecuaciones entre pasos.
- Es conveniente dividir la matriz D de 4×4 en las submatrices $D_{\theta\theta}$, $D_{\theta\Omega}$, $D_{\Omega\theta}$ y $D_{\Omega\Omega}$ de 2×2 y el sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} -\lambda\alpha_{k+1} &= D_{\theta\theta}[\lambda\alpha_k - \Delta\theta_{SE}] + D_{\theta\Omega}\Omega_k + \Delta\theta_{SE} \\ \Omega_{k+1} &= \Lambda D_{\Omega\theta}[\lambda\alpha_k - \Delta\theta_{SE}] + \Lambda D_{\Omega\Omega}\Omega_k \end{aligned}$$

Solución para el ciclo de caminata

- Para caminatas cíclicas las condiciones iniciales deben repetirse de un paso al otro.

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k = \alpha_0$$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k = \Omega_0$$

- Imponiendo estas restricciones a las ecuaciones entre pasos lleva a una solución compacta

$$\Omega_0 = [I - \Lambda D_{\Omega\Omega}]^{-1} \Lambda D_{\Omega\theta} [\lambda \alpha_0 - \Delta \theta_{SE}]$$

Solución para el ciclo de caminata

- Reemplazando en la ecuación para α_0 y definiendo

$$D'(\alpha_0, \tau_0) = D_{\theta\theta} + D_{\theta\Omega} [I - \Lambda D_{\Omega\Omega}]^{-1} \Lambda D_{\Omega\theta}$$

- Entonces queda

$$0 = [D' - F] \lambda \alpha_0 - [D' - F] \Delta \theta_{SE}$$

$$0 = [D' - F] \lambda \alpha_0 - [D' - F] [\Delta \theta_w + b\gamma]$$

Solución para el ciclo de caminata

- Estas son las condiciones para ciclos estables con dos ecuaciones en tres variables α_0 , τ_0 y γ .
- Usualmente se especifica α_0 y se resuelve para las otras dos variables.
- La última ecuación tiene dos soluciones o ninguna.
- Si tiene dos soluciones, una está en el rango $\omega_F \tau_0 < \pi$ y es invariablemente inestable. La otra solución corresponde a un ciclo como rueda sintética con $\pi < \omega_F \tau_0 < 3\pi/2$. Esta es la solución de interés.

Solución para el ciclo de caminata

- Se usa la estimación de la rueda sintética ($\omega_F \tau_0 = 4.058$) para iniciar un método de Newton para buscar τ_0 , y si la solución existe, entonces la convergencia requiere del orden de cinco iteraciones.

Robots Pasivos



CAMINATA ESTABLE DE LA MÁQUINA DE PRUEBA

Caminata estable de la máquina de prueba

- El robot se inicializa a mano en el comienzo de una rampa.
- Después de algunos pasos, el robot alcanza la caminata estable apropiada para la pendiente.
- El tiempo que tarda alcanzar la caminata estable es una medida de estabilidad.

Caminata estable de la máquina de prueba

- Para cada pendiente se realizaron varias pruebas.
- Se midió la media y la varianza de α_0 y τ_0 .
- Los parámetros del robot fueron medidos.
- Los resultados experimentales difieren un poco de los teóricos, el período práctico es más lento que el teórico.
- Esto se explica por el roce no considerado en la cadera y por el modelo de colisiones inelásticas.

Robots Pasivos



ECUACIONES ENTRE PASOS LINEALIZADAS

Ecuaciones entre pasos linealizadas

- Para analizar la estabilidad, se linealizan las ecuaciones entre pasos.
- La matriz de transición D se puede expresar como

$$\mathbf{D}(\tau_k) \approx \mathbf{D}(\tau_0) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tau} (\tau_k - \tau_0)$$

- La matriz de transferencia de soporte Λ se expresa como

$$\Lambda(\alpha_{k+1}) \approx \Lambda(\alpha_0) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} (\alpha_{k+1} - \alpha_0)$$

Ecuaciones entre pasos linealizadas

- Manipulando las ecuaciones, entonces se obtiene

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} - \alpha_0 \\ \Omega_{Ck+1} - \Omega_{C0} \\ \Omega_{Fk+1} - \Omega_{F0} \\ \tau_k - \tau_0 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \alpha_k - \alpha_0 \\ \Omega_{Ck} - \Omega_{C0} \\ \Omega_{Fk} - \Omega_{F0} \end{bmatrix}$$

donde

$$S = S_1^{-1} S_2$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} D_{\theta\theta}\lambda & D_{\theta\Omega} \\ \Lambda D_{\Omega\theta}\lambda & \Lambda D_{\Omega\Omega} \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 & -\frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \tau} [\lambda \alpha_0] \\ & & 0 & 0 & -\Delta\theta_{SE}] - \frac{\partial D_{\theta\Omega}}{\partial \tau} \Omega_0 \\ \hline -\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} (D_{\Omega\theta} [\lambda \alpha_0] & 1 & 0 & -\Lambda \left(\frac{\partial D_{\Omega\theta}}{\partial \tau} [\lambda \alpha_0] \right. \\ \left. -\Delta\theta_{SE}] + D_{\Omega\Omega} \Omega_0 \right) & 0 & 1 & \left. -\Delta\theta_{SE}] + \frac{\partial D_{\Omega\Omega}}{\partial \tau} \Omega_0 \right) \end{array} \right]$$

Ecuaciones entre pasos linealizadas

- Como el sistema obtenido es lineal, los valores propios del bloque superior de 3×3 determina la estabilidad del sistema.
- Deben ser menores que 1 para ser estable.
- Mientras menores los valores, la recuperación ante perturbaciones es más rápida.
- Si el sistema es inestable, las ecuaciones linealizadas son útiles para el diseño de una ley de control estabilizadora.

Robots Pasivos



MODOS DE TRANSICIÓN DE LA MÁQUINA DE PRUEBA

Modos de transición de la máquina de prueba

- Cada valor propio se puede asociar a una cierta variable.
- El primer valor propio se asocia al “modo de velocidad”.
- El segundo valor propio se asocia al “modo de balanceo”.
- El tercer valor propio se asocia al “modo de tambaleo”.

Modo de Velocidad

- Es el análogo al comportamiento transiente de la rueda sin bordes.
- El valor propio está asociado a la disipación de energía en la transferencia de soporte.
- El valor propio corresponde a η^2 .
- En la rueda sintética este valor es 1, pues la estabilidad es neutral con respecto a la velocidad.

Modo de balanceo

- Este valor propio está dominado por Ω_F
- Este modo es usualmente pequeño y se hace cero en la rueda sintética.
- Lo que se traduce en que una perturbación en la pierna que se balancea desaparece inmediatamente después de la primera transición de soporte.

Modo de balanceo

- Físicamente esto ocurre porque la velocidad de las piernas de la rueda sintética post-transferencia está determinada completamente por el momentum de la gran masa del tronco.
- La velocidad de la pierna que se balancea Ω_F antes de la transferencia es irrelevante.

Modo de tambaleo

- Se caracteriza por un valor propio negativo.
- Esto significa que la perturbación alterna el signo de un paso al otro.
- Analizando el caso de la rueda sintética
 - La rueda no disipa energía.
 - Mantiene su velocidad inicial siempre.
 - Si el ángulo del paso inicial no es el apropiado, entonces el ángulo se debe acomodar a través de un determinado transiente.

Modo de tambaleo

- Cálculo del valor propio:
 - Generalizando para $\alpha_k \neq \alpha_0$

$$-\alpha_{k+1} = \alpha_k \cos \omega_F \tau_k + \frac{\Omega_0}{\omega_F} \sin \omega_F \tau_k.$$

- Y

$$\alpha_{k+1} = -\alpha_k + \Omega_0 \tau_k.$$

Modo de tambaleo

- Derivando con respecto a α_k

$$-\frac{d\alpha_{k+1}}{d\alpha_k} = \cos \omega_F \tau_k + (-\alpha_k \omega_F \sin \omega_F \tau_k + \Omega_0 \cos \omega_F \tau_k) \frac{d\tau_k}{d\alpha_k} \quad (39)$$

$$\frac{d\alpha_{k+1}}{d\alpha_k} = -1 + \Omega_0 \frac{d\tau_k}{d\alpha_k} \quad (40)$$

Modo de tambaleo

- Resolviendo y evaluando para τ_0

$$\frac{d\alpha_{k+1}}{d\alpha_k} = -\frac{4 \cos \omega_F \tau_0 - \omega_F \tau_0 \sin \omega_F \tau_0}{2 + 2 \cos \omega_F \tau_0 - \omega_F \tau_0 \sin \omega_F \tau_0} = -0.20,$$

$$\frac{d\tau_k}{d\alpha_k} = \frac{1}{\Omega_0} \frac{2 - 2 \cos \omega_F \tau_0}{2 + 2 \cos \omega_F \tau_0 - \omega_F \tau_0 \sin \omega_F \tau_0} = \frac{0.80}{\Omega_0}.$$

- Luego, las perturbaciones convergen exponencialmente de acuerdo con

$$\alpha_k - \alpha_0 \sim -0.2^k$$

Modos de transición

- En resumen:
 - El modo de velocidad es una convergencia monótona a la velocidad apropiada para la pendiente.
 - El modo de balanceo es un ajuste rápido del movimiento de balanceo a un patrón normal de caminata.
 - El modo de tambaleo es un intento oscilatorio de calzar el largo del paso con la velocidad hacia delante.

Modos de transición

- Una perturbación arbitraria excitará todos los modos simultáneamente.
- El modo de tambaleo es el que más difiere entre la rueda sintética y el bípedo de prueba. ($z = -0,2$ v/s $-0,83$).

Table 1. S-to-S Eigenvectors of the Test Machine on a 2.5% Slope

Mode	Speed	Swing	Totter
Eigenvalue, z	0.70	-0.05	-0.83
$\alpha - \alpha_0$	1	1	1
$\Omega_C - \Omega_{C0}$	1.1	1.1	0.12
$\Omega_F - \Omega_{F0}$	0.30	7.3	-0.03

Robots Pasivos



GRANDES PERTURBACIONES

Grandes perturbaciones

- El análisis anterior solo se aplica a pequeñas perturbaciones.
- El borde de la zona de convergencia de cuatro dimensiones es difícil de encontrar.
- En este análisis sólo se pone atención a las velocidades angulares iniciales (Ω_C, Ω_F).
- El análisis se realiza haciendo evaluaciones secuenciales de las ecuaciones no lineales de transición de un paso a otro.

Grandes perturbaciones

- Los resultados que se obtienen muestran que la velocidad angular de la pierna que se balancea Ω_F puede variar en un gran rango: <0 a $>+150\%$ del valor cíclico.
- Sin embargo, la velocidad angular de la pierna de apoyo Ω_C es muy sensible. Soportan solo un pequeño porcentaje del valor cíclico.

Grandes perturbaciones

- Otra forma de medir la estabilidad ante perturbaciones es analizar la resistencia a los empujones.
- Para analizar este tipo de perturbaciones, se analiza el efecto de impulsos horizontales en el cuerpo cuando las piernas pasan por el ángulo cero.
- Como una referencia estándar intuitiva se usa una máquina que tiene las piernas fijas separadas en $\pm\alpha_0$

Grandes perturbaciones

- Resulta que un robot pasivo puede tolerar una fracción importante del impulso necesario para hacer caer hacia delante a la maquina fija.
- El nivel varia ampliamente según los parámetros de la máquina.
- Sin embargo, un 25% hacia delante o atrás es representativo.
- Empujones más agresivos deben ser compensados con control activo.

Grandes perturbaciones

- El cálculo de estas tolerancias fue de ayuda para descartar la tendencia natural de asociar la robustez con una rápida convergencia desde pequeñas perturbaciones.
- De hecho, un bípedo con modo de tambaleo con convergencia pequeña o incluso levemente inestable puede tolerar bien un empujón más fuerte que una máquina con mejor estabilidad de tambaleo.

Grandes perturbaciones

- Por lo tanto, un diseñador de un bípedo práctico puede estar dispuesto a aceptar el requerimiento de una estabilización activa “débil” del ciclo permanente por una mejor resistencia a caídas.

Robots Pasivos



EFFECTO DE VARIACIONES DE LOS PARÁMETROS

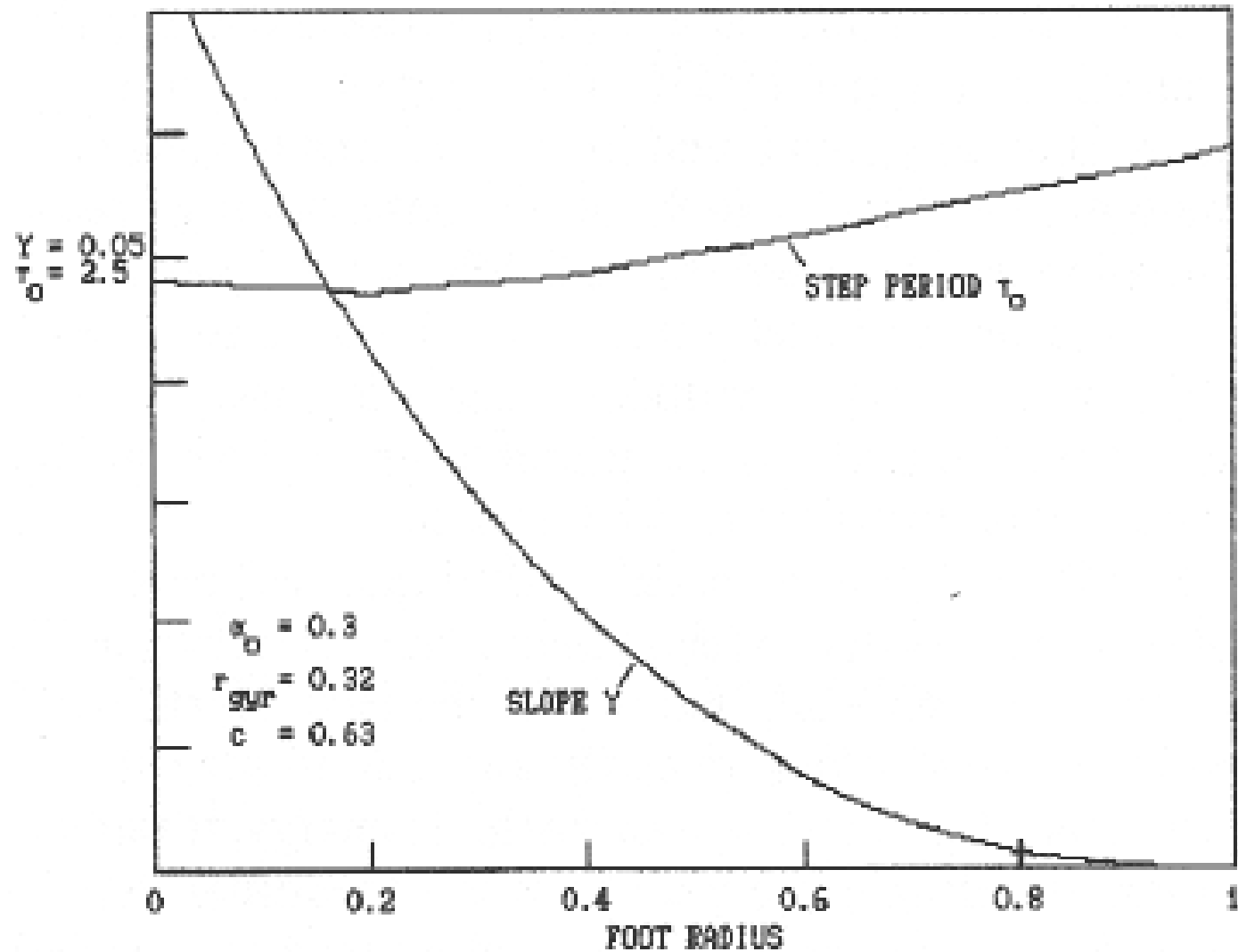
Escala

- Antes de discutir los efectos de cambios en los parámetros adimensionales, se analiza el efecto de cambios en la escala (m , l ó g).
- Cambiar m escala las fuerzas, pero no cambia la caminata.
- Cambiar l escala el período del paso por l/\sqrt{l} y la velocidad por \sqrt{l}

Escala

- Cambiar g escala el período del paso y la velocidad por \sqrt{g} .
- Esto último se ejemplifica en los astronautas que fueron a la luna que sentían que se movían en cámara lenta, de hecho solo podían caminar a un 40% de la velocidad normal. En vez de aceptarlo, ellos saltaban.

Radio del pie



Radio del pie

- Lo más notable es la incidencia en la eficiencia a medida que el pie cambia de un punto a una sección de la rueda sintética.
- Con $R=0$ tenemos un bípedo como la rueda sin bordes que necesita una pendiente significativa.
- Con $R=1$ tenemos una rueda sintética rodando sin pendiente.

Radio del pie

- Se menciona que los pies semicirculares son una conveniencia matemática más que una necesidad física.
- Se pueden usar pies planos, donde el soporte se transferiría de forma impulsiva desde el talón a los dedos en el medio del paso.
- La caminata así sería menos eficiente, pero se espera una caminata pasiva similar.

Inercia y altura del centro de masa de la pierna

- El radio de giro de la pierna y la altura de su centro de masa tienen efectos similares.
- Aumentar r_{gyr} ó aumentar c manteniendo constante r_{gyr} , alarga el período del péndulo.
- Si el centro de masa se acerca demasiado al tronco, la pierna no logra llegar a tiempo a adelante para romper la caída de la pierna de soporte.

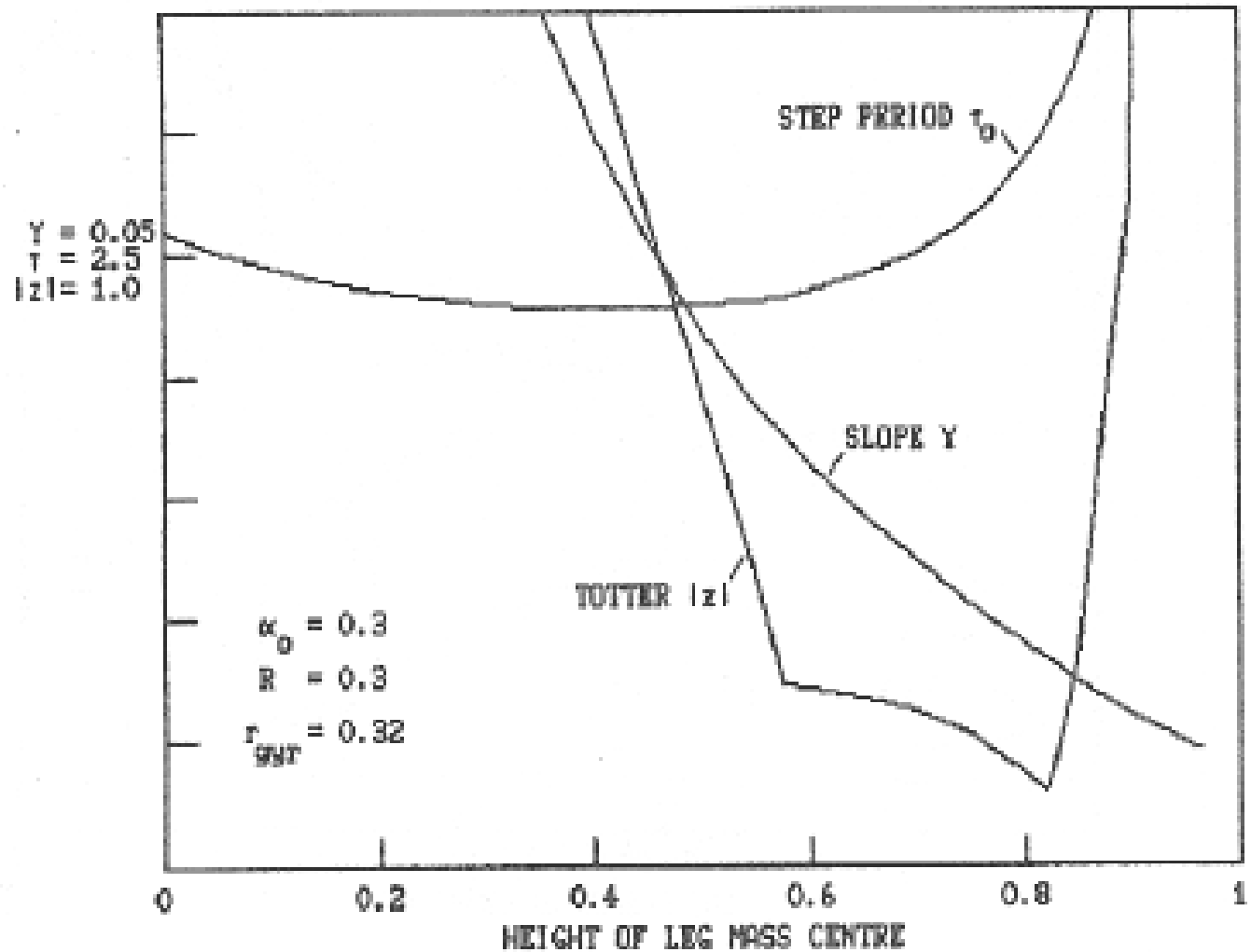
Inercia y altura del centro de masa de la pierna

- Por otra parte, bajar la altura o el radio de giro hace la transferencia de soporte más ineficiente (disminuye η)
- Si el sistema se hace demasiado ineficiente, el ciclo se hace inestable o incluso desaparece completamente.

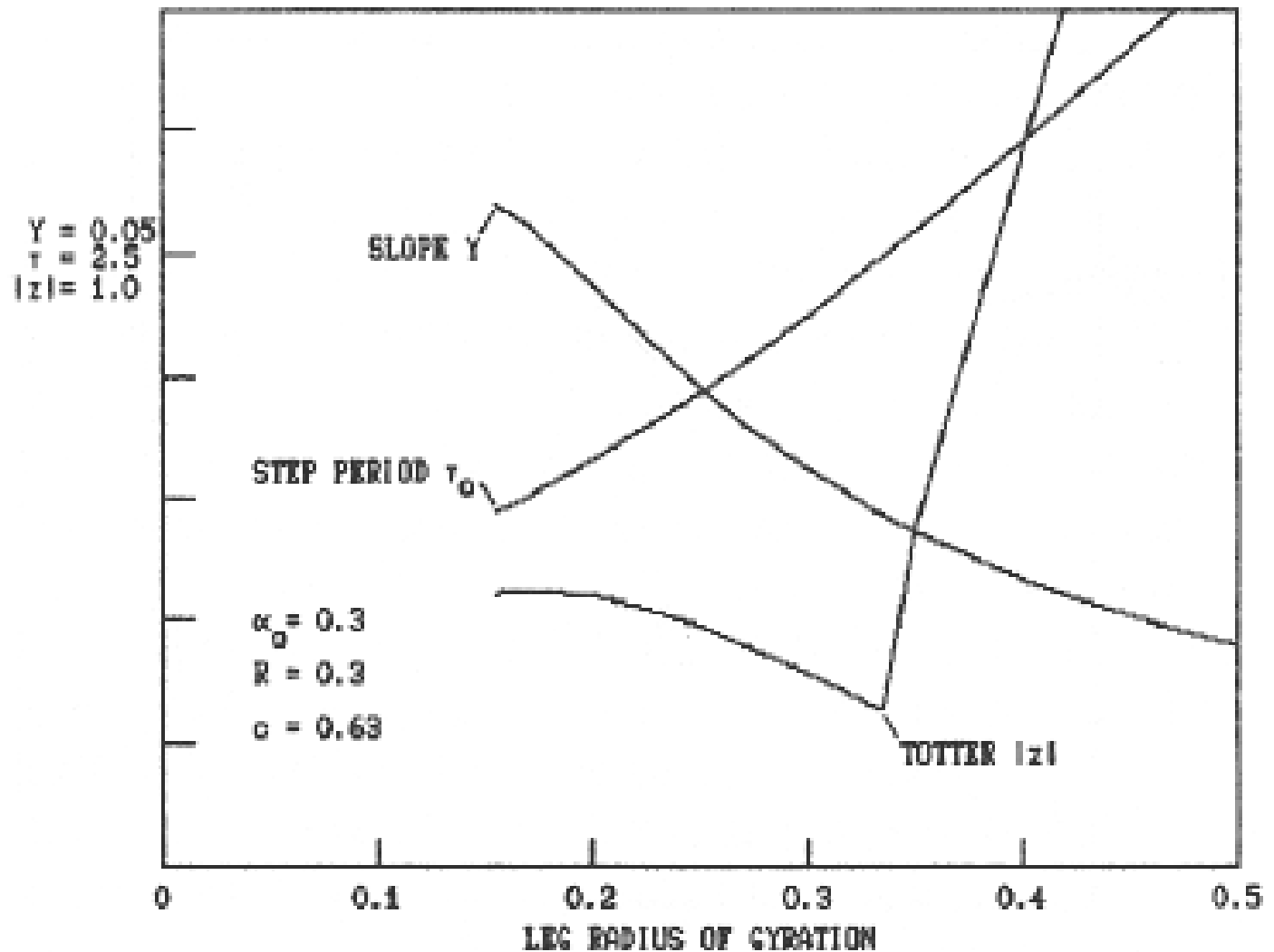
Inercia y altura del centro de masa de la pierna

- Este efecto se puede compensar incrementando la masa en el tronco, lo que eleva el centro de masa, lo que mejora la eficiencia.
- Los humanos tienen alrededor de un 70% de la masa en el tronco, lo que es suficiente para hacer la transferencia de soporte eficiente sin importar las propiedades de las piernas.

Inercia y altura del centro de masa de la pierna



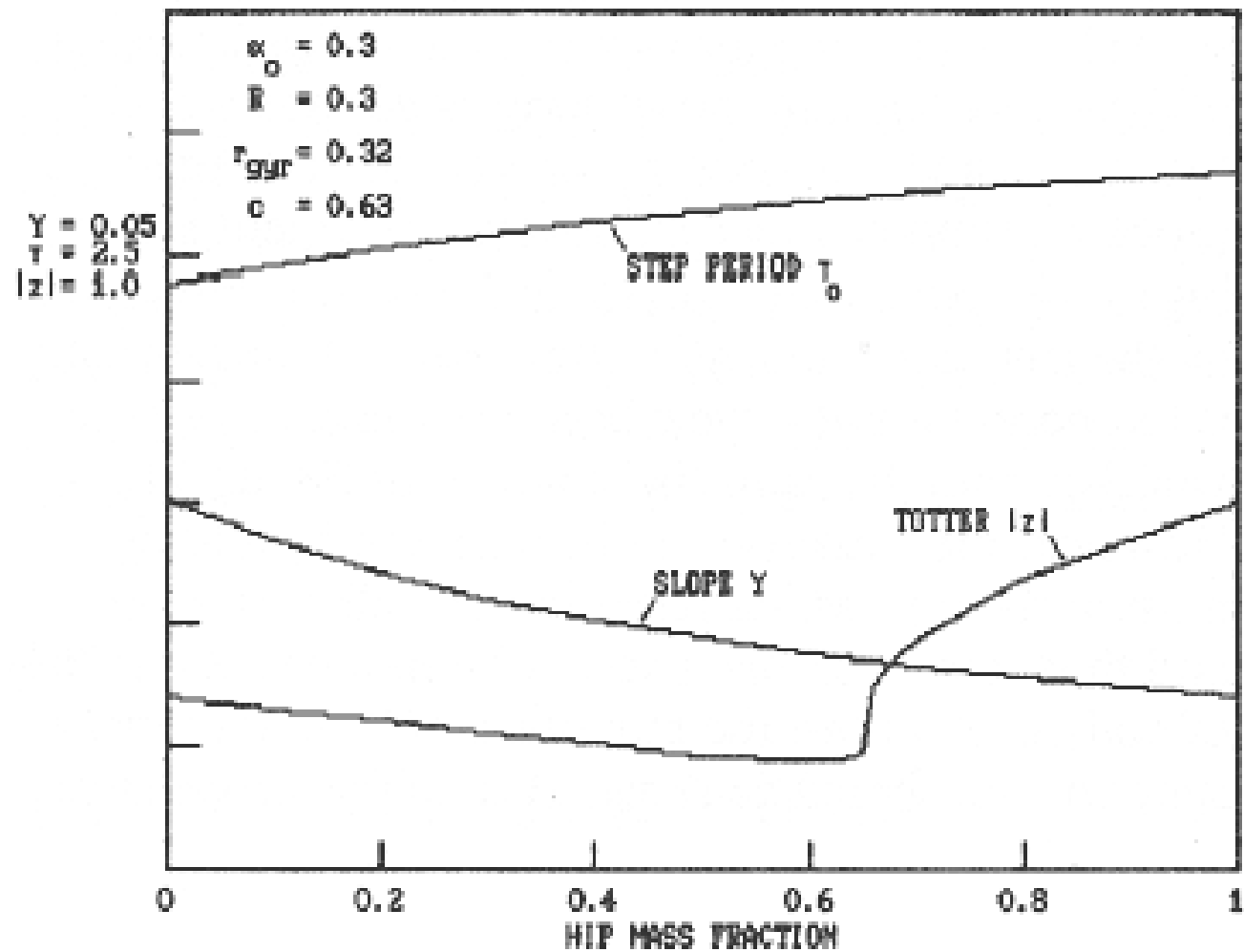
Inercia y altura del centro de masa de la pierna



Masa del tronco

- Agregar masa en el tronco mejora la eficiencia.
- Mejora la resistencia a los empujones.
- Hay más beneficios si esta masa es agregada en la forma de un tronco extendido.

Masa del tronco



Fricción en el tronco y offset de masa

- Se ha mencionado que las caminatas pasivas son robustas frente a variaciones de los parámetros.
- Sin embargo, esto no es completamente cierto, la articulación del tronco es particularmente sensible.
- Introducir solo un poco de fricción en esta articulación hace que la solución cíclica se desaparezca.

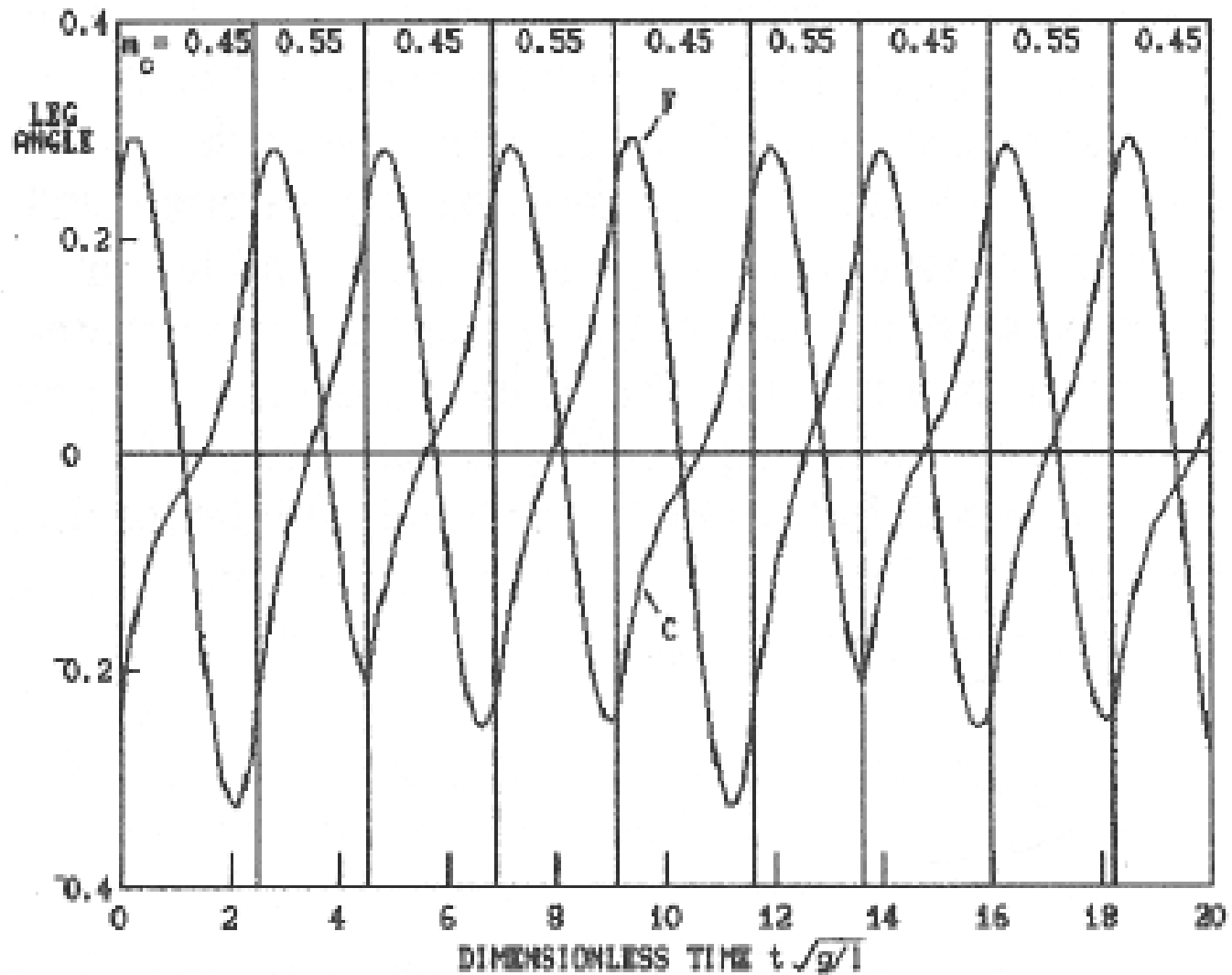
Fricción en el tronco y offset de masa

- El bípedo de prueba usa rodamientos de bolas en el eje del tronco para mantener el roce aceptablemente bajo.
- Este efecto puede ser compensado con un offset en el centro de masa de las piernas.
- Un leve corrimientos hacia atrás del centro de masa compensa bastante bien la fricción en la articulación del tronco.
- Un excesivo desplazamiento del centro de masa es dañino también. Se recomienda usar este parámetro para ajustar la caminata pasiva.

Asimetría de las piernas

- Para analizar la asimetría se evaluó la ecuación entre pasos.
- Se busco soluciones estables (repetitivas).
- Las soluciones estables son en dos pasos para pequeñas asimetrías.
- Cuatro pasos para asimetrías más pronunciadas.

Asimetría de las piernas



Robots Pasivos



CAMINATA COMPLETAMENTE PASIVA

Caminata completamente pasiva

- El modelo presentado con piernas rígidas 2D permite un tratamiento analítico simple de la caminata.
- Pero, fuerza el uso de formas poco elegantes para llevar adelante la pierna que se balancea.
- Un método completamente pasivo sería preferible, se discuten dos formas.

Balanceándose

- En los juguetes pasivos, los pies se pasan hacia delante utilizando un balanceo lateral.
- La clave del diseño es que los pies son aproximadamente circulares también en la sección lateral.
- Tienen centros de curvatura aproximadamente coincidentes.

Balanceándose

- El centro de curvatura está por sobre el centro de gravedad.
- Lo que hace el balanceo lateral una oscilación de péndulo.
- Se debe sintonizar la frecuencia de balanceo a la frecuencia de los pasos.
- Se debe cumplir que medio ciclo de balanceo se ejecute en un paso.

Balanceándose

- Entonces se debe cumplir que

$$\frac{\omega_F}{\omega_R} = \frac{4.058}{\pi}.$$

- Si esta condición se cumple, entonces el balanceo y la caminata se enclavan en la primera transferencia de soporte y desde ese momento, la caminata es no disipativa.

Balanceándose

- Si esta condición no se cumple, entonces la fase debe “resetearse” en cada transferencia de soporte y se disipa energía.
- Si la sintonización es demasiado mala, no existe ciclo alguno.
- Si los pies tienen una separación lateral mayor que cero, entonces se disipa energía según el modelo de rueda sin bordes.

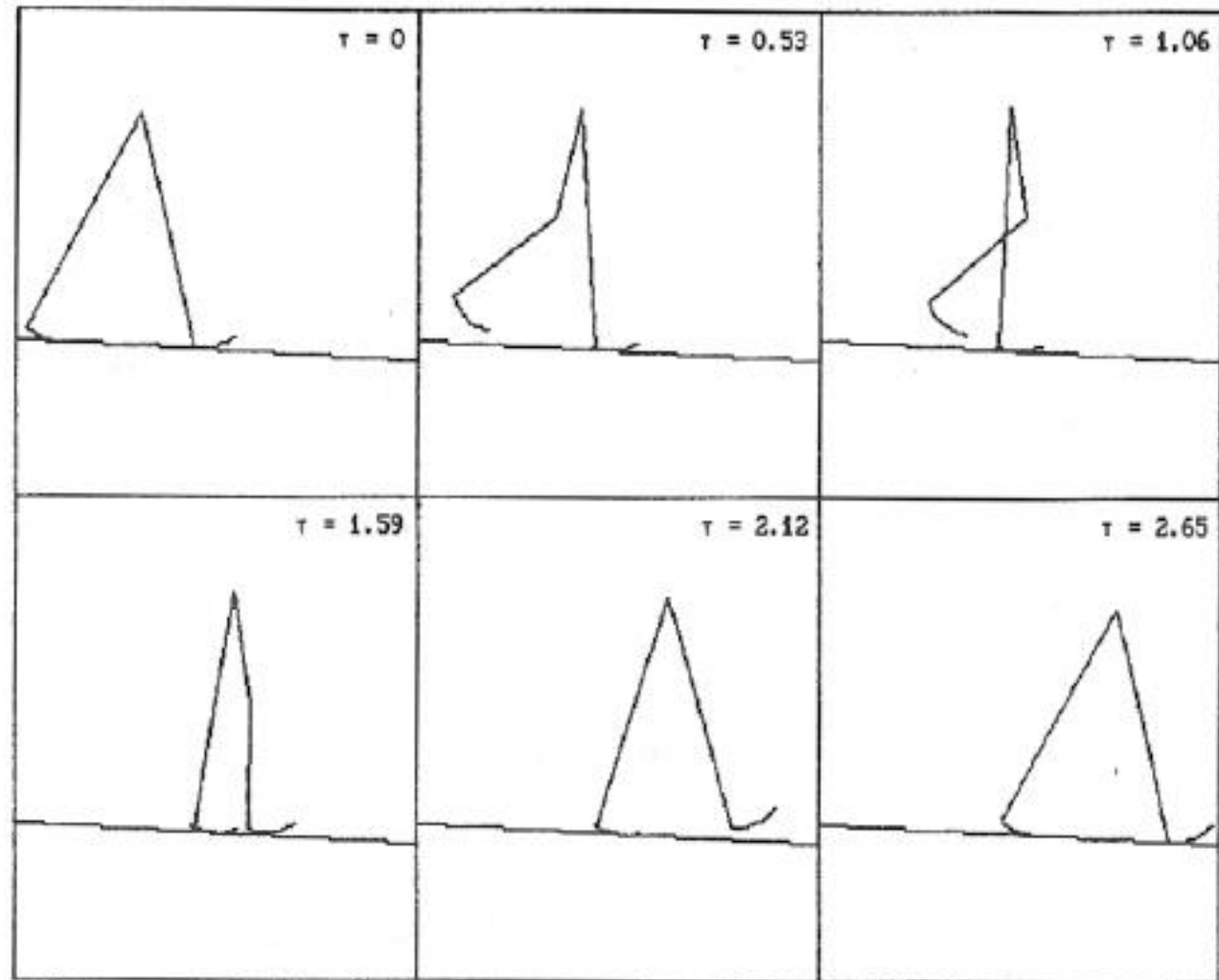
Balanceándose

- Los requerimientos de sintonización y pequeña separación lateral hacen poco atractiva esta opción para un bípedo práctico.

Rodillas

- Está demostrado que el movimiento de rodillas también puede ser pasivo.
- Si una pierna de soporte rígida y una pierna de balanceo con rodilla son iniciadas apropiadamente, entonces se puede alcanzar un ciclo estable.
- Es necesario usar mecanismos de detención en la rodilla para evitar hiperextensiones.

Rodillas



Rodillas

- Estudios paramétricos de estos modelos muestran:
 - Los ciclos pasivos se encuentran en un rango más acotado que en las máquinas rígidas, pero aún suficientemente amplios.
 - Bajo una elección apropiada de parámetros, los torques que aparecen, naturalmente dejan a la rodilla de soporte y la que se balancea trabadas durante las fases apropiadas del ciclo.

Rodillas

- Un ciclo pasivo con rodillas articuladas es solo posible si el pie se desplaza hacia delante con respecto a la pierna.
- Una gran fracción de la energía cinética de la pierna que se balancea se disipa en el bloqueo de la rodilla.
 - Esto hace este tipo de caminata más ineficiente que aquella con piernas rígidas.
 - Para mantener esta penalización pequeña, la energía de la pierna que se balancea debe ser pequeña en relación a la energía total, lo que se logra concentrando la masa en el tronco.

Rodillas

- La energía que se pierde por tener rodillas, sin embargo, es menor que un mecanismo activo para levantar los pies.
- Se menciona que una pequeña intervención activa en el momento apropiado puede reducir sustancialmente las pérdidas en el bloqueo de las rodillas.

Robots Pasivos



ACTUACIÓN EN CAMINATAS PASIVAS

Actuación en caminatas pasivas

- Se propone actuar los robots pasivos para lograr:
 - Caminatas pasivas actuadas en pequeñas pendientes de subida y en grandes pendientes de bajada.
 - Modulación de caminatas paso a paso sobre puntos de apoyo espaciados de forma desigual.
 - Caminar en pendientes inclinadas, escaleras y terreno irregular bidimensional.
 - Balance lateral y giro.
 - Corredores pasivos.



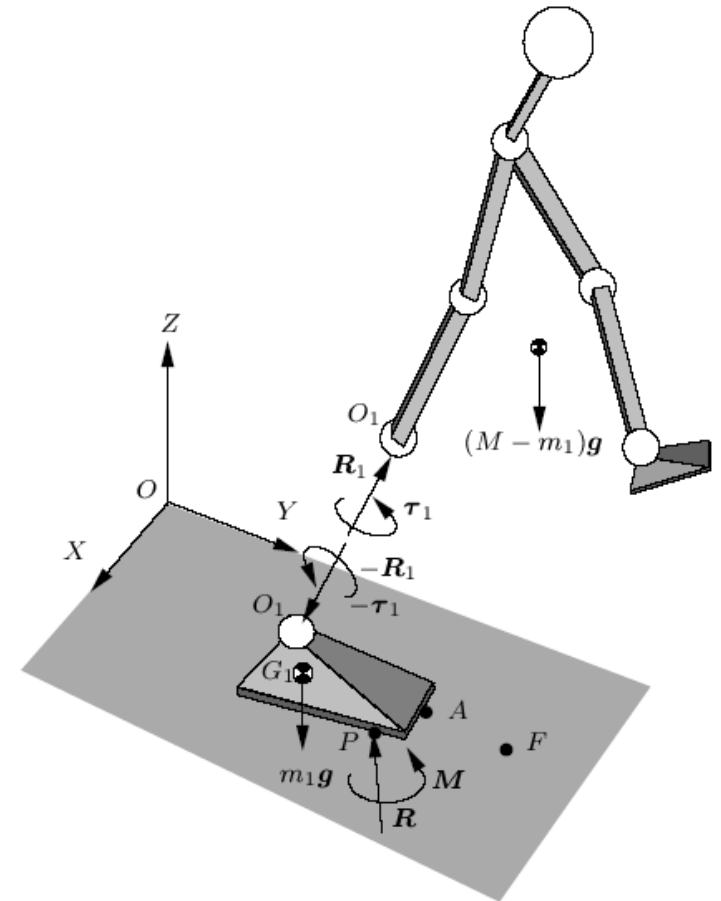
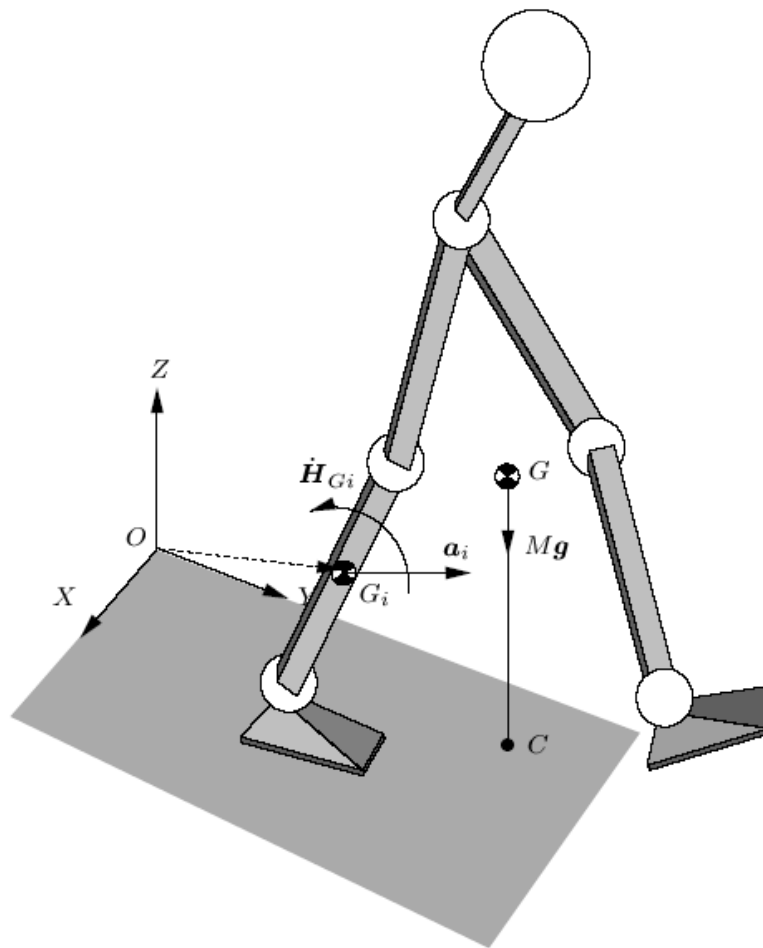
ROBOTS ACTIVOS

Robots Activos



CONCEPTOS PREVIOS

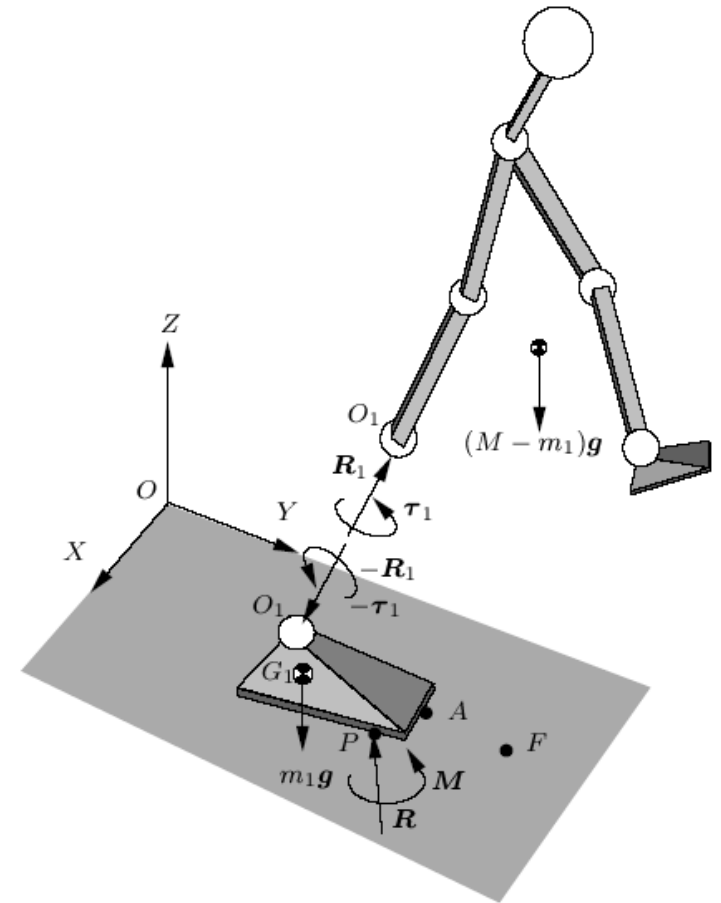
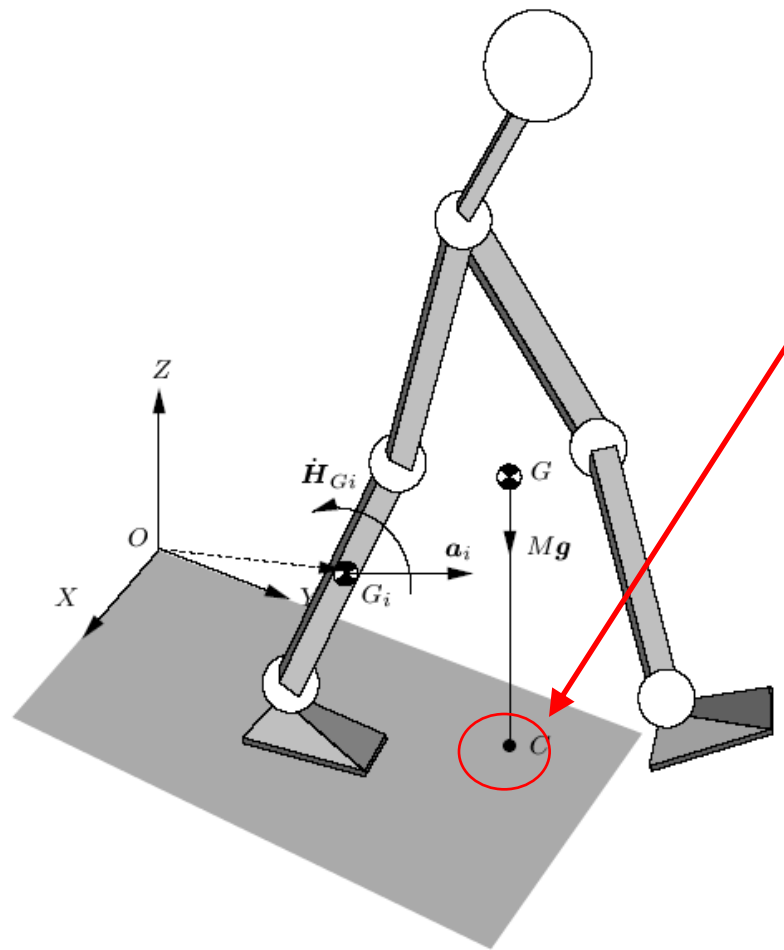
Esquema de un robot bípedo



Ground Projection of the Center of Mass (GCoM)

- Corresponde al punto de la superficie pie/piso que es atravesado por la línea de gravedad que pasa por el centro de masa.
- Se define la estabilidad estática como aquella en que este punto se encuentra dentro de la superficie convexa de soporte.

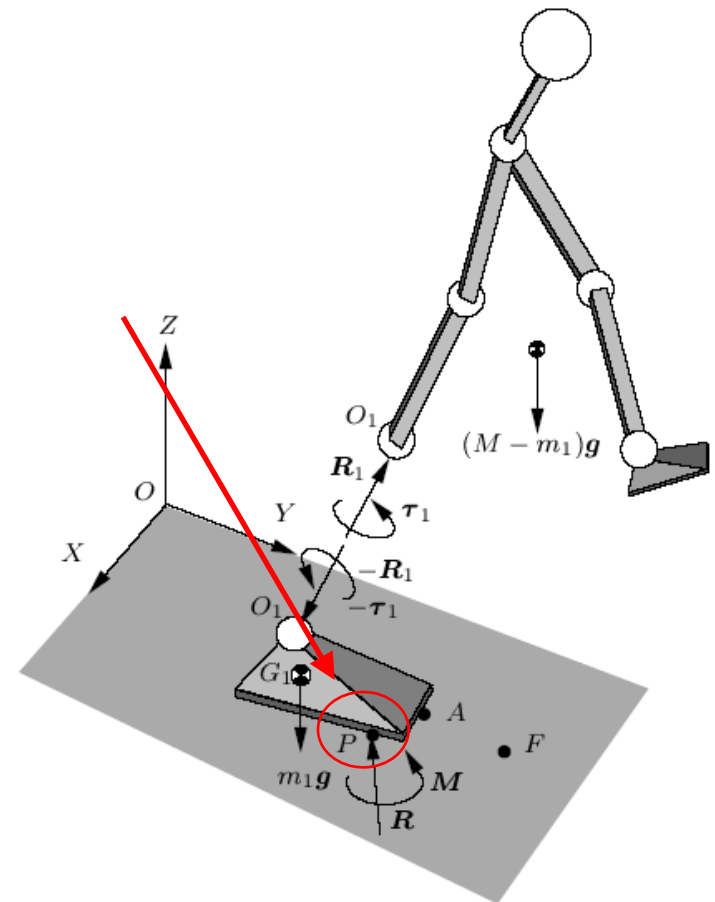
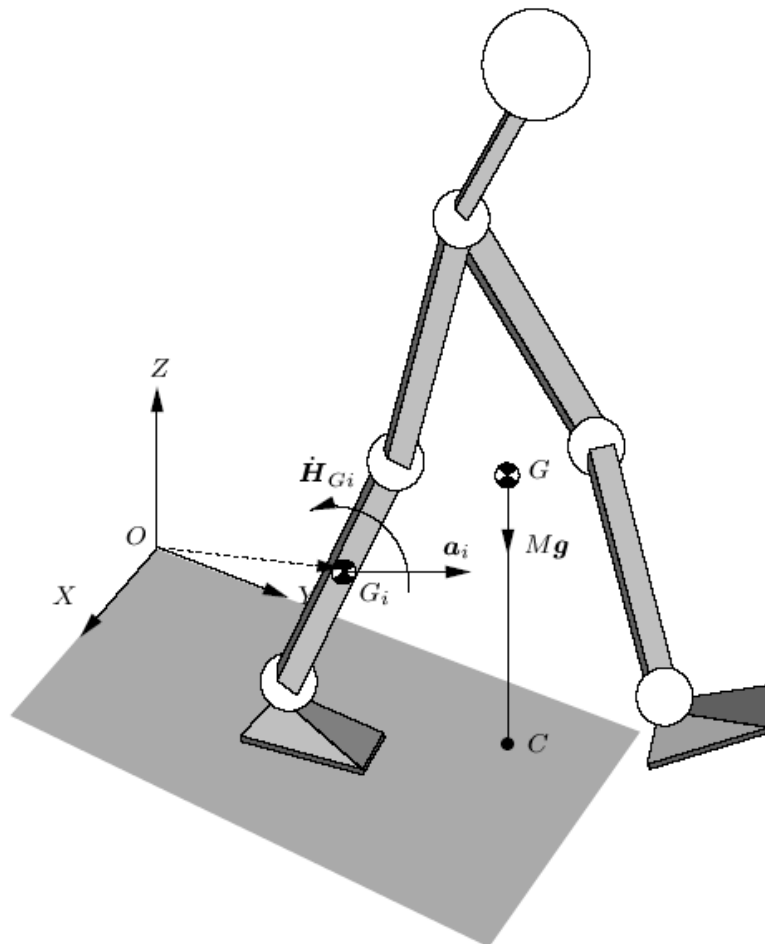
Ground Projection of the Center of Mass (GCoM)



Center of Pressure (CoP)

- Punto en la superficie pie/piso donde la fuerza de reacción neta del piso actúa realmente.

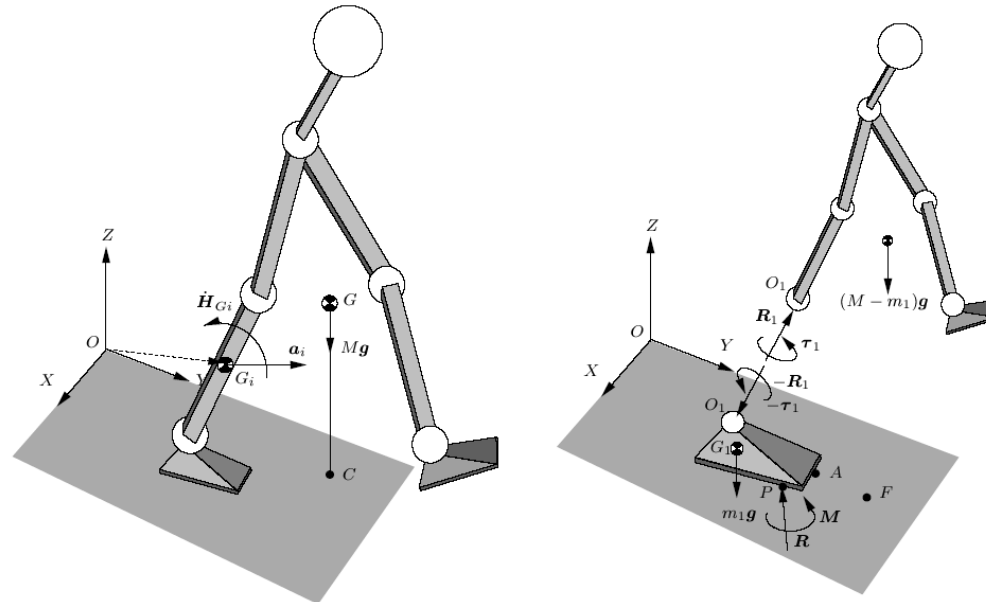
Center of Pressure (CoP)



Foot Rotation Indicator (FRI)

- Ecuación de balance dinámico rotacional

$$M + OP \times R + \sum OG_i \times m_i g = \sum \dot{H}_{Gi} + \sum OG_i \times m_i a_i$$



Foot Rotation Indicator (FRI)

- Modelando todo el robot como una fuerza y torque, la ecuación queda:

$$M + OP \times R + OG_1 \times m_1 g - \tau_1 - OO_1 \times R_1 = \dot{H}_{G1} + OG_1 \times m_1 a_1$$

- Para equilibrio estático:

$$M + OP \times R + OG_1 \times m_1 g - \tau_1 - OO_1 \times R_1 = 0$$

- En torno al CoP P:

$$M + PG_1 \times m_1 g - \tau_1 - PO_1 \times R_1 = 0.$$

Foot Rotation Indicator (FRI)

- Utilizando solo las componentes tangenciales (plano XY)

$$\left(\tau_1 + PO_1 \times R_1 - PG_1 \times m_1 g \right)_t = 0$$

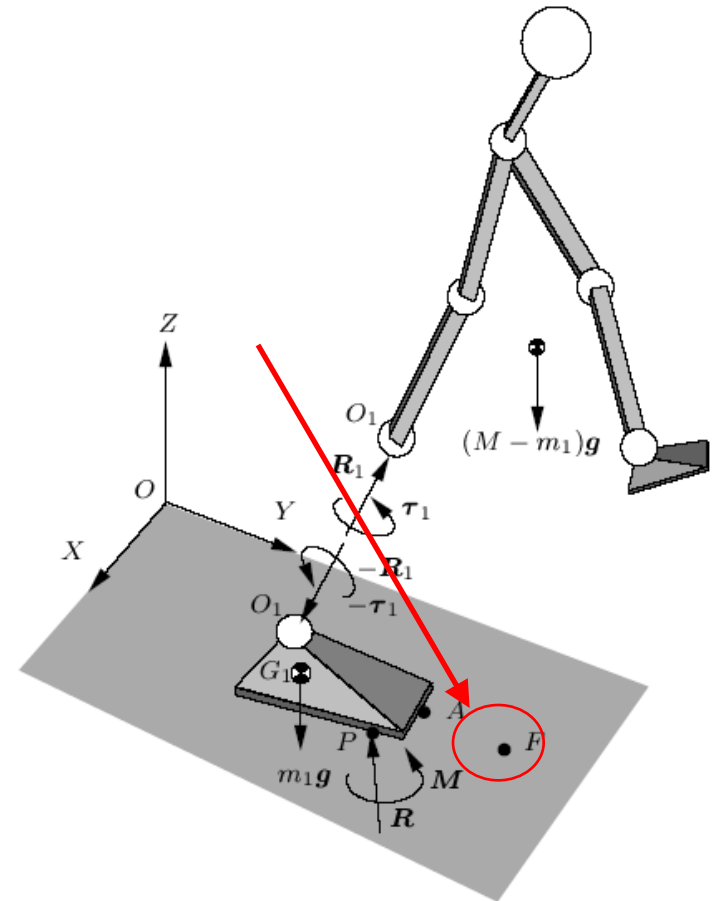
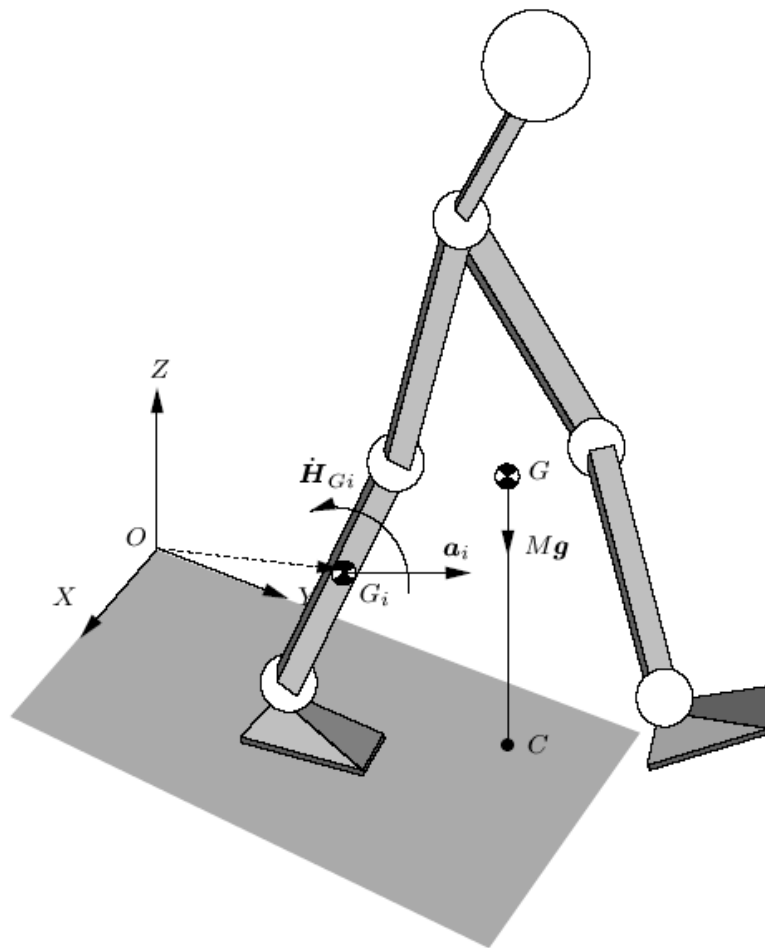
- Esta ecuación puede no satisfacerse para ningún punto en el polígono de soporte, entonces se define el FRI F como el punto que satisface:

$$\left(\tau_1 + FO_1 \times R_1 - FG_1 \times m_1 g \right)_t = 0.$$

Foot Rotation Indicator (FRI)

- Se define entonces el FRI como el punto en la superficie de contacto pie-piso dentro o fuera de la superficie convexa de soporte en la cual el momento resultante de la fuerza/torque aplicado al pie es normal a la superficie.

Foot Rotation Indicator (FRI)



Foot Rotation Indicator (FRI)

- Propiedades del punto FRI:
 - Este punto indica la presencia de rotación del pie.
 - La posición del punto FRI indica la magnitud del momento desequilibrado en el pie. (el momento es proporcional a la distancia a F).
 - El punto FRI indica la dirección de la rotación del pie.
 - El punto FRI indica el margen de estabilidad del robot.

Zero Moment Point (ZMP)

- Al parecer tiene muchas definiciones contradictorias entre sí.
- Aceptando que:
 1. Es el punto donde fuerza de reacción vertical intersecta el piso.
 2. Es el punto en el piso donde el momento total generado por la gravedad y la inercia es cero.
 3. Es el punto en el piso donde el momento generado por la fuerzas de reacción tiene componentes cero en x e y.
 4. Es el punto en el piso donde el momento de la fuerza de inercia total (incluye inercia y gravedad) se hace cero.

Zero Moment Point (ZMP)

- Las condiciones 1 y 3 son exactas de la definición de CoP.
- Se puede demostrar que las condiciones 2 y 4 se cumplen en el CoP, por lo que

$$\text{ZMP} = \text{CoP}$$

Robots Activos



MÉTODO DE ESTABILIDAD

Método de estabilidad ZMP

- Utilizado por ASIMO, QRIO, Johnnie (robot hecho en Munich)
- La estabilidad se basa en generar trayectorias que garanticen que el CoP permanezca dentro de la superficie convexa de soporte y no llegue al borde.
- Utilizan un generador de trayectorias de alto nivel para las articulaciones individuales del robot, combinado con servos.

Método de estabilidad ZMP

- La forma más común de construir estas maquinas es controlar los ángulos de las articulaciones.
- Trae como consecuencia una especie de *rigor mortis*.
- Las articulaciones son trabadas por cajas reductoras de alta reducción.

Método de estabilidad ZMP

- Esto hace ineficiente el movimiento de las articulaciones cuando los actuadores están encendidos y casi imposible cuando están apagados.
- Otra estrategia de control son controladores que suavemente varían el torque, permitiendo a la dinámica controlar los detalles del movimiento



INTEGRACIÓN DE ENFOQUES ACTIVO Y PASIVO

Integración de enfoques Activo y Pasivo



CONCEPTOS PREVIOS

Definiciones

- **Espacio de fase.** Es el espacio de todos los posibles estados de un sistema. Cada punto en el espacio de fase corresponde a un único estado.
- **Función suave:** función cuyas derivadas parciales de cualquier orden con respecto a sus argumentos existen y son continuas.

Definiciones

- **Homeomorfismo:** mapa uno es a uno continuo, con inversa continua.
- **Difeomorfismo:** Homeomorfismo suave con inversa suave.
- **Manifold:** Espacio localmente euclidiano de dimensión n tal que para cada elemento del espacio existe un homeomorfismo Φ que mapea una vecindad abierta de P en un conjunto abierto en \mathbb{R}^n

Definiciones

- **Operador de Lie.**

$$L_f (g(x)) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(x)$$

- **Bracket de Lie.**

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) = L_f(g(x)) - L_g(f(x))$$

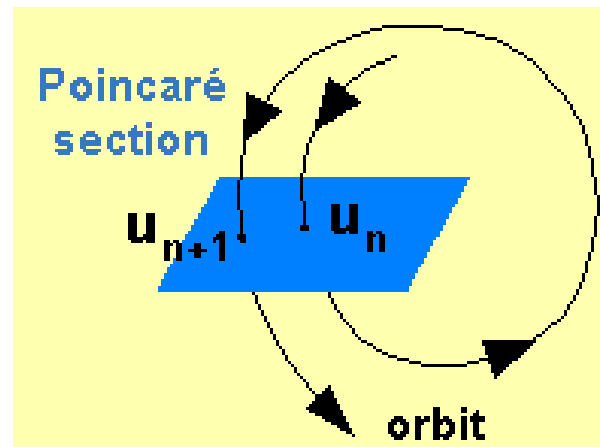
- **Bracket de Lie recursivo.**

$$ad_f^0 g(x) = g(x)$$

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x)$$

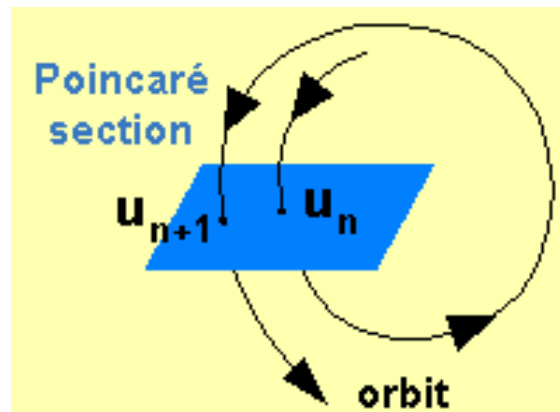
Definiciones

- **Sección de Poincaré.** Es un plano del Espacio de Fase escogido cuidadosamente de tal forma que es cruzado por casi todas las orbitas. La Sección de Poincaré tiene una dimensión menos que el Espacio de Fase.



Definiciones

- **Mapas de Poincaré.** Es un mapeo de una Sección de Poincaré consigo misma. Correlaciona dos puntos de intersección continuos. Solo cuentan aquellos puntos que corresponden al mismo lado de la órbita



Grado relativo

- Dado un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

- El grado relativo del sistema corresponde a la cantidad de veces que debe ser derivada la salida para que aparezca explícitamente la entrada

Grado relativo

- Esto es equivalente a que el grado relativo es r si

$$L_g L_f^k h(x) = 0, \forall k < r - 1$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$$

- Prueba:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h(x) + \cancel{L_g h(x)} u$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f^2 h(x) + \cancel{L_g L_f h(x)} u$$

Transformación de coordenadas

- Dado un sistema de grado relativo $r < n$, se definen las funciones

$$\phi_1(x) = h(x)$$

$$\phi_2(x) = L_f h(x)$$

$$\vdots$$

$$\phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x)$$

$$\phi_{r+1}(x)$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x)$$

Transformación de coordenadas

- Se describe el sistema en las nuevas coordenadas

$$z_i = \phi_i(x), 1 \leq i \leq n$$

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u)$$

$$\dot{z}_1 = L_f h(x) + L_g h(x)u = L_f h(x) = \phi_2(x) = z_2$$

⋮

$$\dot{z}_{r-1} = \frac{\partial \phi_{r-1}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f^{r-2} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{r-1} h(x) = \phi_r(x) = z_r$$

Transformación de coordenadas

- Para z_r

$$\dot{z}_r = \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u$$

- definiendo

$$a(z) = L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(z))$$

$$b(z) = L_f^r h(\phi^{-1}(z))$$

Transformación de coordenadas

- Se puede reescribir

$$\dot{z}_r = b(z) + a(z)u$$

- Nada se ha especificado con respecto a las otras variables, pero si se han escogido de forma que se cumpla

$$L_g \phi_i(x) = 0$$

Transformación de coordenadas

- Entonces,

$$\dot{z}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (f(x) + g(x)u)$$

$$\dot{z}_i = L_f \phi_i(x) + L_g \phi_i(x)u = L_f \phi_i(x)$$

- Estableciendo entonces

$$q_i(z) = L_f \phi_i(\phi^{-1}(z))$$

Transformación de coordenadas

- Se obtiene el sistema en su forma normal

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = b(z) + a(z)u$$

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = q_n(z)$$

$$y = z_1$$

Linealización exacta vía retroalimentación

- Consideremos un sistema de grado relativo $r=n$ expresado en su forma normal, al que se le elige la ley de control de retroalimentación del estado

$$u = \frac{1}{a(z)} \left(-b(z) + v \right)$$

Linealización exacta vía retroalimentación

- El sistema queda entonces

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = v$$

- Que es lineal y controlable

Linealización exacta vía retroalimentación

- Cuando no existe una salida, se puede demostrar (teorema de Frobenius) que una función $y = \lambda(x)$ que cumple con

$$L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0$$

$$L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x^0) \neq 0$$

- Generará un sistema de grado relativo n .

Dinámica cero

- Redefiniendo el vector de estado

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

- El sistema queda reescrito

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta)$$

Dinámica cero

- Se busca la dinámica que hace cero la salida para todo x^0, t

$$y(t) = z_1(t)$$

- Luego

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \cdots = \dot{z}_r(t) = 0$$

- Es decir,

$$\xi(t) = 0$$

Dinámica cero

- Con lo que la entrada debe ser la única solución de la ecuación

$$0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t)$$

- Luego

$$u(t) = -\frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))}$$

- y

$$\dot{\eta} = q(0, \eta(t))$$

Dinámica cero

- El sistema

$$\dot{\eta} = q(0, \eta(t))$$

- Se denomina la dinámica cero del sistema y corresponde al comportamiento interno del sistema cuando la entrada y la salida han sido escogidas de forma que la salida sea cero.

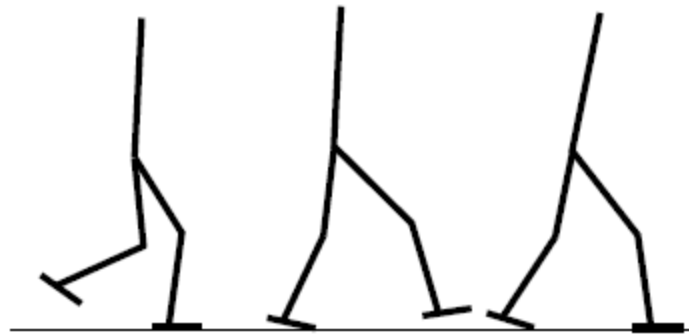
Integración de enfoques pasivo y activo



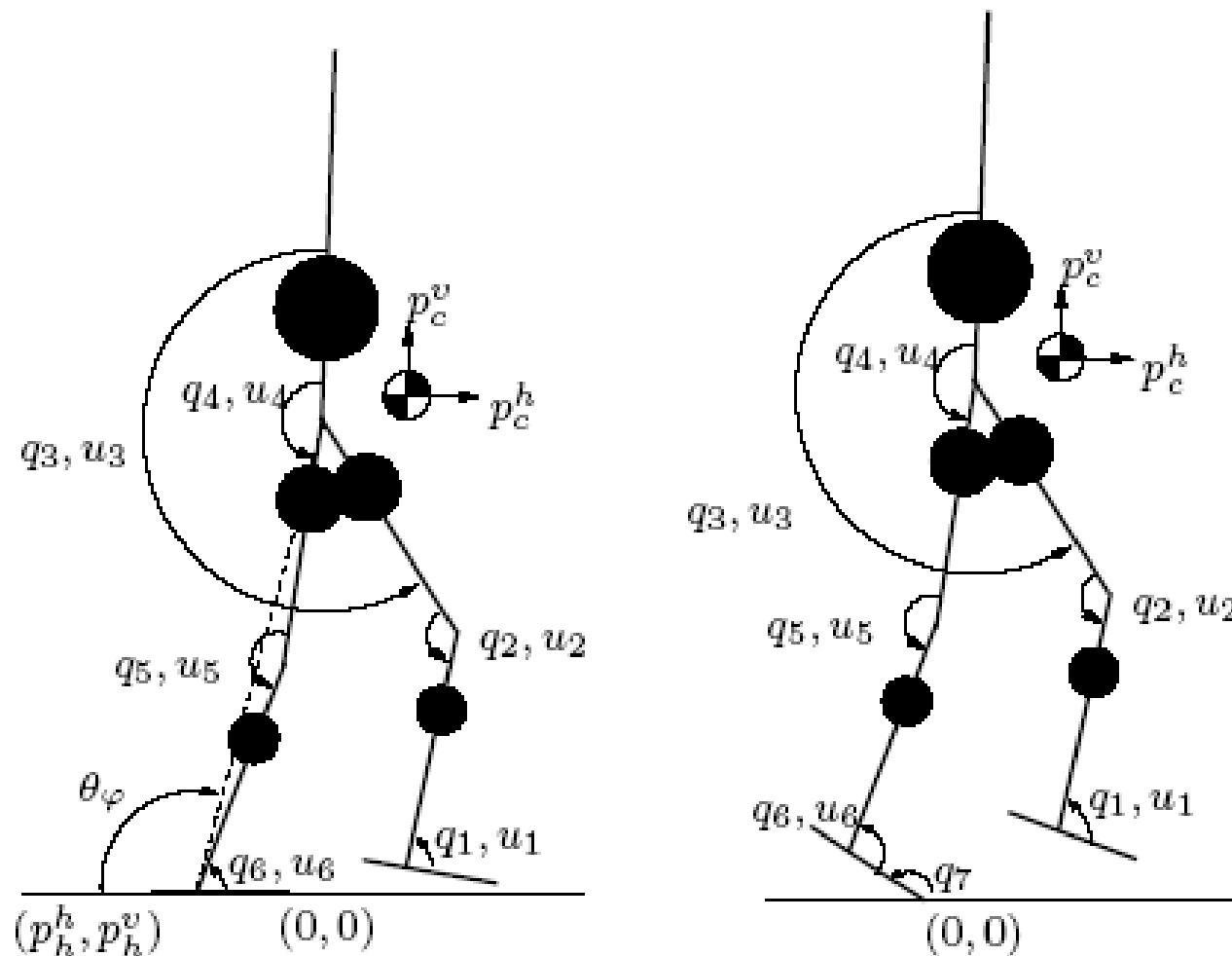
MODELO DEL ROBOT BÍPEDO

Etapas de la caminata

- Se definen tres etapas:
 - Una fase completamente actuada en que un pie está completamente en el piso.
 - Una fase subactuada en que el talón se eleva y el pie rota en torno a los dedos.
 - Una fase instantánea de soporte doble en que se intercambian los pies.



Modelo del robot bípedo



Fase subactuada

- El talón se eleva y el pie rota en torno a los dedos.
- Esta etapa se caracteriza por tener el FRI estrictamente en frente del pie de apoyo.
- Se puede tratar como un robot de N-grados de libertad con un pie puntual no actuado.
- Se definen las coordenadas generalizadas como:

$$q_v = (q_1, \dots, q_N)^T \in Q_v$$

Fase subactuada

- Utilizando el método de Lagrange se obtiene la dinámica:

$$D_v(q_v)\ddot{q}_v + C_v(q_v, \dot{q}_v)\dot{q}_v + G_v(q_v) = B_v u_v \quad (I)$$

- Donde, $u_v = (u_1, \dots, u_{N-1})^T$ es el vector de torques.
- Expresándola en variables de estado:

$$\dot{x}_v = f_v(x_v) + g_v(x_v)u_v$$

Fase completamente actuada

- Se asume que la planta del pie permanece apoyada en el piso sin deslizar.
- El tobillo actúa como un pivote actuado.
- Se puede tratar como un robot de N-1 grados de libertad.
- Se definen las coordenadas generalizadas como:

$$q_\varphi = (q_1, \dots, q_{N-1})^T \in \mathcal{Q}_\varphi$$

Fase completamente actuada

- Donde q_{N-1} denota el ángulo del tobillo, el cual, a diferencia de los demás, es global.
- La dinámica se obtiene utilizando el método de Lagrange.

$$D_\varphi(q_\varphi)\ddot{q}_\varphi + C_\varphi(q_\varphi, \dot{q}_\varphi)\dot{q}_\varphi + G_\varphi(q_\varphi) = B_{\varphi 1}u_b + B_{\varphi 2}u_A \quad (2)$$

- Donde $u_A = u_{N-1}$ es el torque en el tobillo.

Fase completamente actuada

- Expresándolo en función de las variables de estado

$$x_\varphi = (q_\varphi; \dot{q}_\varphi)$$

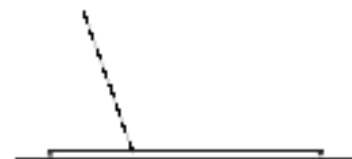
$$\begin{aligned} \dot{x}_\varphi &= \begin{bmatrix} \dot{q}_\varphi \\ D_\varphi^{-1}(-C_\varphi \dot{q}_\varphi - G_\varphi + B_{\varphi 2} u_A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_\varphi^{-1} B_{\varphi 1} u_b \end{bmatrix} \\ &=: f_\varphi(x_\varphi, u_A) + g_\varphi(x_\varphi) u_b. \end{aligned} \quad (3)$$

Fase de doble soporte

- Durante esta fase, la pierna que se balanceaba hacia delante golpe el suelo.
- Por simplicidad se asume que el pie que impacta está paralelo al piso.
- Se asume que el pie es un arco, de forma tal que los únicos puntos de contacto son el talón y el dedo.



(a) Arc-shaped



(b) Flat

Fase de doble soporte

- El impacto produce fuerzas impulsivas en el talón y el dedo.
- Las velocidades sufren discontinuidades.
- Las posiciones continúan siendo continuas.
- A los N grados de libertad se agregan dos variables que contienen las coordenadas cartesianas del centro de masa.

$$q_d = (q_v; p_c^h; p_c^v) \quad \dot{q}_d = (\dot{q}_v; \dot{p}_c^h; \dot{p}_c^v)$$

Fase de doble soporte

- Actúan dos reacciones sobre el pie que se estaba balanceando, una sobre el talón y una sobre el dedo.
- Se pueden modelar estas dos por una equivalente aplicada en el tobillo de ese pie.
- Sea $\Upsilon_a^F(q_d)$ la coordenada cartesiana del tobillo del pie que se balanceaba
- Sea $\Upsilon_a^r(q_d)$ el ángulo absoluto del pie que se balanceaba

Fase de doble soporte

- Utilizando el método de Lagrange se obtiene la ecuación de la dinámica

$$D_d(q_d)\ddot{q}_d + C_d(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G_d(q_d) = B_d u + E_d^F \delta F + E_d^\tau \delta \tau \quad (4)$$

- Donde

$$u = (u_b; u_A), E_d^F = \left(\frac{\partial Y_a^F(q_d)}{\partial q_d} \right)^\top, E_d^\tau = \left(\frac{\partial Y_a^\tau(q_d)}{\partial q_d} \right)^\top$$

- δF y $\delta \tau$ son la fuerza y torque resultantes de la reacción del piso.

Fase de doble soporte

- Asumiendo que se cumple que:
 - Los actuadores no son impulsivos.
 - El pie no rebota ni se desliza.

$$\begin{aligned} x_{\varphi}^{+} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \bar{q}_d \\ \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} D_d \dot{\bar{q}}_d \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_{q,v}^{\varphi}(q_v^{-}) \\ \Delta_{\dot{q},v}^{\varphi}(q_v^{-}) \dot{q}_v^{-} \end{bmatrix} := \Delta_v^{\varphi}(x_d^{-}) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde R es la matriz que invierte los roles de las piernas

Fase de doble soporte

- Υ ,

$$\Pi = \begin{bmatrix} D_d & -E_d^F & -E_d^T \\ (E_d^F)^T & 0 & 0 \\ (E_d^T)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (6)$$

Rotación del pie

- La transición desde el sistema completamente actuado a uno subactuado se logra forzando que el punto FRI se posicione estrictamente en frente del pie.
- Se asume que esta transición ocurre en un punto fijo de la fase completamente actuada.

$$H_{\varphi}^v = \theta_{\varphi}(q_{\varphi}) - \bar{\theta}_{\varphi,0}^-$$

- Con $\theta_{\varphi}(q_{\varphi})$ el ángulo del tronco con respecto al tobillo de soporte.

Rotación del pie

- Y $\theta_{\varphi,0}^-$ una constante a determinar.
- Se mantienen continuas las posiciones y velocidades y aparece un cambio de escalón en el torque.
- De esta forma, el valor inicial de la fase subactuada queda definido por

$$x_v^+ = \begin{bmatrix} q_v^+ \\ \dot{q}_v^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\varphi}^- \\ \pi \\ \dot{q}_{\varphi}^- \\ 0 \end{bmatrix} =: \Delta_{\varphi}^v(x_{\varphi}^-). \quad (7)$$

Modelo híbrido completo

- El modelo completo puede ser descrito como un sistema no lineal híbrido que contiene dos manifolds

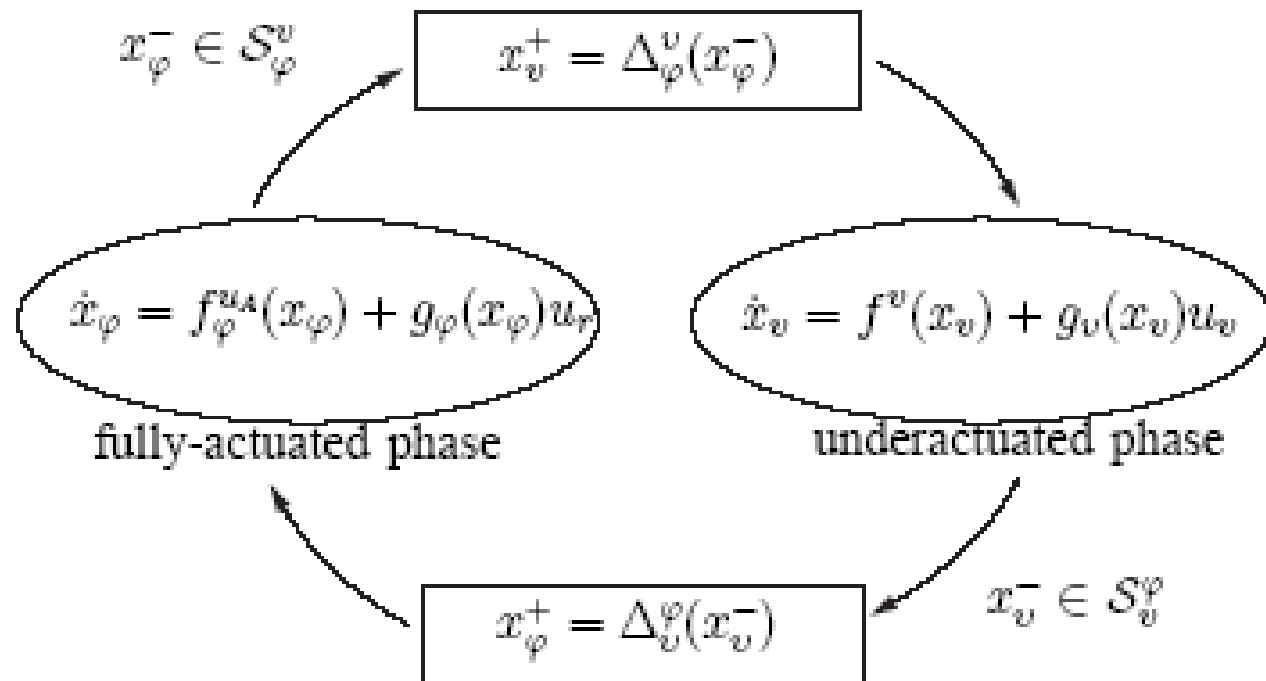
$$\Sigma_\varphi : \begin{cases} \mathcal{X}_\varphi &= TQ_\varphi \\ \mathcal{F}_\varphi : \dot{x}_\varphi &= f_\varphi(x_\varphi, u_A) + g_\varphi(x_\varphi)u_b \\ \mathcal{S}_\varphi^v &= \{x_\varphi \in TQ_\varphi | H_\varphi^v(x_\varphi) = 0\} \\ T_\varphi^v : x_v^+ &= \Delta_\varphi^v(x_\varphi^-) \end{cases} \quad (8)$$

$$\Sigma_v : \begin{cases} \mathcal{X}_v &= TQ_v \\ \mathcal{F}_v : \dot{x}_v &= f_v(x_v) + g_v(x_v)u_v \\ \mathcal{S}_v^\varphi &= \{x_v \in TQ_v | H_v^\varphi(x_v) = 0\} \\ T_v^\varphi : x_\varphi^+ &= \Delta_v^\varphi(x_v^-) \end{cases}$$

Modelo híbrido completo

- Donde,
 - S_{φ}^v es la hiper-superficie de intercambio para las transiciones entre \mathcal{X}_{φ} y \mathcal{X}_v .
 - $T_{\varphi}^v : S_{\varphi}^v \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_v$ es la función de transición aplicada cuando $x_{\varphi} \in S_{\varphi}^v$.

Modelo híbrido completo



Integración de enfoques Activo y Pasivo



DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

Fase subactuada

- Sea $y_v = h_v(x_v)$ el vector de salida de dimensión $(N-1) \times 1$

$$\dot{x}_v = f_v(x_v) + g_v(x_v)u_v$$

- Asumiendo un sistema de grado relativo $r=2$ se puede definir la ley de control

$$u_v^* := -(L_{g_v} L_{f_v} h_v(x_v))^{-1} (L_{f_v}^2 h_v(x_v)) \quad (11)$$

Fase subactuada

- La dinámica cero de la fase subactuada en las coordenadas de $z_v := (\theta_v, \sigma_v) = (\theta_v, d_v(q_v)\dot{q}_v)$ puede ser escrita como

$$\dot{\theta}_v = \kappa_v^1(\theta_v)\sigma_v \quad (12)$$

$$\dot{\sigma}_v = \kappa_v^2(\theta_v), \quad (13)$$

- Donde d_v es la última fila de D_v y σ_v es el momentum angular en torno al tobillo de soporte.

Fase subactuada

- Puede ser reescrito de la forma

$$\dot{z}_v = f_{z_v}(z_v).$$

- El mapa de transición desde la fase subactuada a la completamente actuada esta dado por

$$\theta_\varphi^+ = \theta_\varphi \circ \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} q_v^-, \quad (14)$$

$$\sigma_\varphi^+ = \delta_v^\varphi \sigma_v^-, \quad (15)$$

- Donde δ_v^φ es una constante por determinar.

Fase completamente actuada

- Se usa un modelo de N-2 grados de libertad, para dejar grado de libertad del tobillo para evitar que éste rote.
- Siguiendo el mismo procedimiento de la parte subactuada se obtiene.

$$y_\varphi = \bar{h}_\varphi(x_\varphi)$$

$$\ddot{y}_\varphi := \nu_\varphi \quad (16)$$

$$= L_{f_\varphi}^2 h_\varphi(x_\varphi) + L_{g_\varphi} L_{f_\varphi} h_\varphi(x_\varphi) u_b. \quad (17)$$

Fase completamente actuada

- Y la realimentación para obtener la dinámica cero.

$$u_b^* = -(L_{g_\varphi} L_{f_\varphi} h_\varphi(x_\varphi))^{-1} (L_{f_\varphi}^2 h_\varphi(x_\varphi, u_A)) \quad (18)$$

- En las coordenadas $z_\varphi := (\theta_\varphi, \sigma_\varphi) = (\theta_\varphi, d_\varphi(q_\varphi)\dot{q}_\varphi)$ la dinámica cero de la fase completamente actuada esta dada por.

$$\dot{\theta}_\varphi = \kappa_\varphi^1(\theta_\varphi)\sigma_\varphi \quad (19)$$

$$\dot{\sigma}_\varphi = \kappa_\varphi^2(\theta_\varphi) + u_A, \quad (20)$$

Fase completamente actuada

- Donde u_A es el torque aplicado en el pie de soporte, d_φ es la ultima fila de D_φ , y σ_φ es el momento angular sobre el tobillo de apoyo durante la fase completamente actuada.
- Las ecuaciones pueden ser rescritas

$$\dot{z}_\varphi = f_{Z_\varphi}(z_\varphi, u_A).$$

Fase completamente actuada

- El mapa de transición desde la fase completamente actuada a la subactuada esta dado por

$$\theta_v^+ = \theta_v \circ \left[\begin{array}{c} q_\varphi^- \\ \pi \end{array} \right] \quad (21)$$

$$\sigma_v^+ = \delta_\varphi^v \sigma_\varphi^-, \quad (22)$$

- Donde δ_φ^v es una constante por determinar.

Dinámica cero híbrida

- De las fases anteriores se tiene.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{z}_\varphi = f_{Z_\varphi}(z_\varphi, u_A), & z_\varphi^- \notin S_\varphi^v \cap Z_\varphi, u_A \in \mathbb{R} \\ z_v^+ = \Delta_\varphi^v(z_\varphi), & z_\varphi^- \in S_\varphi^v \cap Z_\varphi \\ \dot{z}_v = f_{Z_v}(z_v), & z_v^- \notin S_v^\varphi \cap Z_v \\ z_\varphi^+ = \Delta_v^\varphi(z_v), & z_v^- \in S_v^\varphi \cap Z_v \end{array} \right. \quad (23)$$

Sistema que se llama la dinámica cero híbrida.

Dinámica cero híbrida

- Dado que el sistema anterior corresponde a la dinámica cero, se debe cumplir que

$$h_v \circ \Delta_\varphi^v(z_\varphi^-) = 0, \quad (24)$$

$$L_{f_v} h_v \circ \Delta_\varphi^v(z_\varphi^-) = 0, \quad (25)$$

$$h_\varphi \circ \Delta_v^\varphi(z_v^-) = 0, \quad (26)$$

$$L_{f_\varphi} h_\varphi \circ \Delta_v^\varphi(z_v^-) = 0. \quad (27)$$

Integración de enfoques Activo y Pasivo



CONTROL DEL TOBILLO Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Análisis de la dinámica cero híbrida en la fase subactuada

- El momentum angular nunca es cero durante la fase subactuada.
- Se puede definir la transformación de coordenadas

$$\zeta_v = \frac{\bar{\sigma}_v^2}{2}$$

Donde σ_v es el momentum angular.

Análisis de la dinámica cero híbrida en la fase subactuada

- Si $(\delta_v^v)^2 \zeta_v^- - V_{Z_v}^{max} > 0$,

entonces,

$$\frac{1}{2}(\sigma_v^-)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_v^+)^2 = \zeta_v^- - \zeta_v^+ = -V_{Z_v}(\theta_v^-), \quad (28)$$

- Donde

$$V_{Z_v}(\theta_v) = - \int_{\theta_v^+}^{\theta_v} \frac{\kappa_v^2(\xi)}{\kappa_v^1(\xi)} d\xi, \quad (29)$$

$$V_{Z_v}^{max} = \max_{\theta_v^+ \leq \theta_v \leq \theta_v^-} V_{Z_v}(\theta_v). \quad (30)$$

- El mapa de Poincaré está definido por

$$\rho_v(\zeta_v^-) = (\delta_v^v)^2 \zeta_v^- - V_{Z_v}(\theta_v^-). \quad (31)$$

Análisis de la dinámica cero de la fase completamente actuada

- El torque del tobillo se utiliza para cambiar la velocidad de la caminata.
- Se utiliza el mismo desarrollo de la fase subactuada para encontrar el mapa de Poincaré.

$$\zeta_{\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}$$
$$d\zeta_{\varphi} = \sigma_{\varphi} d\sigma_{\varphi} = \frac{\kappa_{\varphi}^2(\theta_{\varphi})}{\kappa_{\varphi}^1(\theta_{\varphi})} + \frac{u_A(\theta_{\varphi})}{\kappa_{\varphi}^1(\theta_{\varphi})} d\theta_{\varphi}. \quad (32)$$

Análisis de la dinámica cero de la fase completamente actuada

$$V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A}(\theta_\varphi) = - \int_{\theta_\varphi^+}^{\theta_\varphi} \frac{\kappa_\varphi^2(\xi)}{\kappa_\varphi^1(\xi)} + \frac{u_A(\xi)}{\kappa_\varphi^1(\xi)} d\xi, \quad (33)$$

$$V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A, \max} = \max_{\theta_\varphi^+ \leq \theta_\varphi \leq \theta_\varphi^-} V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A}(\theta_\varphi). \quad (34)$$

- Si $(\delta_\varphi^v)^2 \zeta_\varphi^- - V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A, \max} > 0$,

Entonces

$$\frac{1}{2}(\sigma_\varphi^-)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_\varphi^+)^2 = \zeta_\varphi^- - \zeta_\varphi^+ = -V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A}(\theta_\varphi^-). \quad (35)$$

Análisis de la dinámica cero de la fase completamente actuada

- Y el mapa de Poincaré para esta fase queda definido por

$$\rho_{\varphi}(\zeta_v^-) = (\delta_v^{\varphi})^2 \zeta_v^- - V_{\mathcal{Z}_{\varphi}}^{u_A}(\theta_{\varphi}^-). \quad (36)$$

- Con lo que el mapa de Poincaré general se determina con la composición de las dos fases:

$$\begin{aligned} \rho(\zeta_v^-) &= \rho_v \circ \rho_{\varphi}(\zeta_v^-) \\ &= (\delta_{\varphi}^v)^2 (\delta_v^{\varphi})^2 \zeta_v^- - (\delta_{\varphi}^v)^2 V_{\mathcal{Z}_{\varphi}}^{u_A}(\theta_{\varphi}^-) - V_{\mathcal{Z}_v}(\theta_v^-) \end{aligned} \quad (37)$$

Análisis de la dinámica cero de la fase completamente actuada

- El dominio del mapa de Poincaré es:

$$\mathcal{D} = \{ \zeta_v^- > 0 \mid (\delta_v^\varphi)^2 \zeta_v^- - V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A, max} > 0, \\ (\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2 \zeta_v^- - (\delta_\varphi^v)^2 V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A}(\theta_\varphi^-) - V_{\mathcal{Z}_v}^{max}(\theta_v^-) > 0 \}. \quad (38)$$

Análisis de la dinámica cero de la fase completamente actuada

- El siguiente punto es exponencialmente estable

$$\zeta_v^* = - \frac{(\delta_\varphi^v)^2 V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A}(\theta_\varphi^-) + V_{\mathcal{Z}_v}(\theta_v^-)}{1 - (\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2} \quad (39)$$

- Si se cumple

$$0 < (\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2 < 1, \quad (40)$$

$$\frac{(\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2 V_{\mathcal{Z}_v} + (\delta_\varphi^v)^2 V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A}}{1 - (\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2} + V_{\mathcal{Z}_v}^{max} < 0, \quad (41)$$

$$\frac{(\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2 V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A} + (\delta_\varphi^v)^2 V_{\mathcal{Z}_v}}{1 - (\delta_\varphi^v)^2 (\delta_v^\varphi)^2} + V_{\mathcal{Z}_\varphi}^{u_A, max} < 0. \quad (42)$$

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- Se define el torque en el tobillo como

$$u_A = -\kappa_\varphi^2(\theta_\varphi) + \kappa_\varphi^1(\theta_\varphi) \left(a(\zeta_\varphi - \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi)) + \frac{d\zeta_\varphi^*(\theta_\varphi)}{d\theta_\varphi} \right), \quad (43)$$

Donde a es una constante negativa, $\zeta_\varphi^*(\theta_\varphi)$ determina la trayectoria deseada durante la fase completamente actuada.

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- La dinámica cero entonces queda descrita por

$$\dot{\theta}_{\varphi} = \kappa_{\varphi}^1(\theta_{\varphi})\sigma_{\varphi} \quad (44)$$

$$\dot{\sigma}_{\varphi} = \kappa_{\varphi}^1(\theta_{\varphi}) \left(a(\zeta_{\varphi} - \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi})) + \frac{d\zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi})}{d\theta_{\varphi}} \right). \quad (45)$$

- O en coordenadas de $(\theta_{\varphi}, \zeta_{\varphi})$

$$\frac{d\zeta_{\varphi}}{d\theta_{\varphi}} = a(\zeta_{\varphi} - \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi})) + \frac{d\zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi})}{d\theta_{\varphi}}. \quad (46)$$

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- Definiendo $\eta = \zeta_\varphi - \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi)$, entoces, derivando con respecto a η se obtiene

$$\frac{d\eta}{d\theta_\varphi} = \frac{d\zeta_\varphi}{d\theta_\varphi} - \frac{d\zeta_\varphi^*(\theta_\varphi)}{d\theta_\varphi} \quad (47)$$

$$= a(\zeta_\varphi - \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi)) = a\eta, \quad (48)$$

- Lo que puede ser resuelto para $\theta_\varphi^+ \leq \theta_\varphi \leq \theta_\varphi^-$

$$\eta(\theta_\varphi) = e^{a(\theta_\varphi - \theta_\varphi^+)} \eta(\theta_\varphi^+). \quad (49)$$

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- Por lo tanto

$$\zeta_{\varphi} = \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}) + e^{a(\theta_{\varphi} - \theta_{\varphi}^+)}(\zeta_{\varphi}^+ - \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^+)). \quad (50)$$

- Y como en la transición de la fase completamente actuada a la subactuada $\theta_{\varphi} = \theta_{\varphi}^-$

$$\zeta_{\varphi}^- = \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^-) + e^{a(\theta_{\varphi}^- - \theta_{\varphi}^+)}(\zeta_{\varphi}^+ - \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^+)). \quad (51)$$

- Entonces el mapa de poincaré para la fase completamente actuada queda

$$\rho_{\varphi}(\zeta_v^-) = (\delta_v^{\varphi})^2 e^{a(\theta_{\varphi}^- - \theta_{\varphi}^+)} \zeta_v^- + \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^-) - e^{a(\theta_{\varphi}^- - \theta_{\varphi}^+)} \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^+). \quad (52)$$

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- El mapa de Poincaré global queda entonces definido por

$$\rho(\zeta_v^-) = (\delta_v^\varphi)^2 (\delta_v^v)^2 e^{a(\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+)} \zeta_v^- + (\delta_v^\varphi)^2 (\zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^-) - e^{a(\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+)} \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^+)) - V_{Z_v}(\theta_v^-)$$

- Asumiendo que el punto ζ^* cumple con

$$\zeta_\varphi^*(\theta_\varphi) > 0, \quad \forall \theta_\varphi \in [\theta_\varphi^+, \theta_\varphi^-] \quad (54)$$

$$(\delta_v^\varphi)^2 (\delta_v^v)^2 \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^-) - \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^+) = (\delta_v^\varphi)^2 V_{Z_v}(\theta_v^-). \quad (55)$$

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- Entonces el punto

$$\zeta_v^* = \frac{(\delta_\varphi^v)^2 \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^-) - (\delta_\varphi^v)^2 e^{a(\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+)} \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^+) - V_{Z_v}(\theta_v^-)}{1 - (\delta_v^\varphi)^2 (\delta_\varphi^v)^2 e^{a(\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+)}} \quad (56)$$

Es un punto fijo exponencialmente estable si y solo si

$$0 < (\delta_v^\varphi)^2 (\delta_\varphi^v)^2 e^{a(\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+)} < 1, \quad a < 0 \quad (57)$$

$$(\delta_\varphi^v)^2 \zeta_\varphi^*(\theta_\varphi^-) - V_{Z_v}^{max} > 0 \quad (58)$$

Análisis del efecto del torque del tobillo en la tasa de convergencia

- Luego, la tasa de convergencia de la solución del ciclo límite puede ser alterada por el torque del tobillo u_A , a través de la elección de a mientras que la restricción del punto FRI durante la etapa completamente actuada se cumpla.

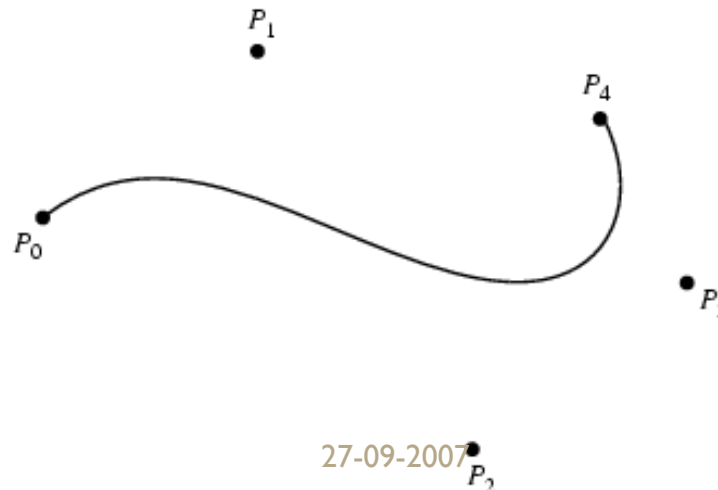
Integración de enfoques Activo y Pasivo



DISEÑO DE LAS RESTRICCIONES VIRTUALES

Parametrización usando polinomios de Bézier

- Para parametrizar la función de salida se utilizan las curvas de Bézier.
- Las curvas de Bézier son splines que utilizan los polinomios de Bernstein para generar una curva desde un conjunto de puntos.



Parametrización usando polinomios de Bézier

- Donde $M_\varphi > 3$, $M_v > 3$, $s_\varphi(\theta_\varphi) = \frac{\theta_\varphi - \theta_\varphi^+}{\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+}$, y

$$s_v(\theta_v) = \frac{\theta_v - \theta_v^+}{\theta_v^- - \theta_v^+}.$$
- Notar que $s_\varphi = 0$, $s_\varphi = 1$, $s_v = 0$, y $s_v = 1$ representan el comienzo y el fin de la fase completamente actuada y el comienzo y el fin de la fase subactuada respectivamente
- Definiendo la salida como

$$y_\varphi = h_\varphi(q_\varphi) = h_\varphi^t(q_\varphi) - h_\varphi^d \circ \theta_\varphi(q_\varphi) \quad (61)$$

$$y_v = h_v(q_v) = h_v^t(q_v) - h_v^d \circ \theta_v(q_v), \quad (62)$$

Parametrización usando polinomios de Bézier

- Las curvas quedan definidas como

$$h_{\varphi}^d(\theta_{\varphi}) = \begin{bmatrix} b_{\varphi}^1 \circ s_{\varphi}(\theta_{\varphi}) \\ \dots \\ b_{\varphi}^{N-2} \circ s_{\varphi}(\theta_{\varphi}) \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$h_v^d(\theta_v) = \begin{bmatrix} b_v^1 \circ s_v(\theta_v) \\ \dots \\ b_v^{N-1} \circ s_v(\theta_v) \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Parametrización usando polinomios de Bézier

- Por las propiedades de las curvas de Bézier, la salida al comienzo de cada fase está dada por

$$h_{\varphi}^d(s_{\varphi})|_{s_{\varphi}=0} = \alpha_0 \quad (65)$$

$$\left. \frac{\partial h_{\varphi}^d(s_{\varphi})}{\partial s_{\varphi}} \right|_{s_{\varphi}=0} = M_{\varphi}(\alpha_1 - \alpha_0) \quad (66)$$

$$h_v^d(s_v)|_{s_v=0} = \beta_0 \quad (67)$$

$$\left. \frac{\partial h_v^d(s_v)}{\partial s_v} \right|_{s_v=0} = M_v(\beta_1 - \beta_0), \quad (68)$$

Parametrización usando polinomios de Bézier

- Por las propiedades de las curvas de Bézier, la salida al fin de cada fase está dada por

$$h_{\varphi}^d(s_{\varphi})|_{s_{\varphi}=1} = \alpha M_{\varphi} \quad (69)$$

$$\left. \frac{\partial h_{\varphi}^d(s_{\varphi})}{\partial s_{\varphi}} \right|_{s_{\varphi}=1} = M_{\varphi}(\beta_{M_{\varphi}} - \beta_{M_{\varphi}-1}) \quad (70)$$

$$h_v^d(s_v)|_{s_v=1} = \beta_{M_v} \quad (71)$$

$$\left. \frac{\partial h_v^d(s_v)}{\partial s_v} \right|_{s_v=1} = M_v(\beta_{M_v} - \beta_{M_v-1}), \quad (72)$$

Parametrización usando polinomios de Bézier

- donde

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_i^1 \\ \vdots \\ \alpha_i^{N-2} \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, M_\varphi \quad (73)$$

$$\beta_j = \begin{bmatrix} \beta_j^1 \\ \vdots \\ \beta_j^{N-1} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, M_v \quad (74)$$

Parametrización usando polinomios de Bézier

- Cuando el torque del tobillo es usado para afectar la estabilidad, la trayectoria del momentum angular también debe ser diseñada.
- Dado $\zeta^* = \frac{(\sigma^*)^2}{2}$

$$\zeta^* \circ s_\varphi(\theta_\varphi) := \sum_{k=0}^m \gamma_k \frac{m!}{k!(m-k)!} s_\varphi^k (1 - s_\varphi)^{m-k}, \quad (75)$$

Parametrización usando polinomios de Bézier

- Y por las características de los polinomios de Bézier

$$\zeta^*(s_\varphi)|_{s_\varphi=0} = \gamma_0 \quad (76)$$

$$\zeta^*(s_\varphi)|_{s_\varphi=1} = \gamma_m. \quad (77)$$

Invarianza de la dinámica cero híbrida

- Las funciones deben ser invertibles

$$H_{\varphi}(q_{\varphi}) := \begin{bmatrix} h_{\varphi}^t(q_{\varphi}) \\ \theta_{\varphi}(q_{\varphi}) \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$H_v(q_v) := \begin{bmatrix} h_v^t(q_v) \\ \theta_v(q_v) \end{bmatrix} \quad (79)$$

Invarianza de la dinámica cero híbrida

- Luego, para lograr invarianza, se debe cumplir que

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \theta_v(q_v^+) \end{bmatrix} = H_v \circ \left[H_\varphi^{-1} \circ \begin{bmatrix} \alpha_{M_\varphi} \\ \theta_\varphi(q_\varphi^-) \end{bmatrix} \right]_\pi. \quad (82)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \theta_\varphi(q_\varphi^+) \end{bmatrix} = H_\varphi \circ \left(\begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \left(H_v^{-1} \circ \begin{bmatrix} \beta_{M_v} \\ \theta_v(q_v^-) \end{bmatrix} \right) \right), \quad (83)$$

Invarianza de la dinámica cero híbrida

- Como en la dinámica cero la salida debe anularse.

$$\dot{y}_\varphi = \frac{\partial h_\varphi^t(q_\varphi)}{\partial q_\varphi} \dot{q}_\varphi - \frac{\partial h_\varphi^d}{\partial s_\varphi} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \theta_\varphi} \dot{\theta}_\varphi = 0, \quad (84)$$

$$\dot{y}_v = \frac{\partial h_v^t(q_v)}{\partial q_v} \dot{q}_v - \frac{\partial h_v^d}{\partial s_v} \frac{\partial s_v}{\partial \theta_v} \dot{\theta}_v = 0. \quad (85)$$

Invarianza de la dinámica cero híbrida

- La condición para las velocidades del estado después de la transición desde la fase completamente actuada a la subactuada se puede obtener del mapa de transiciones

$$\beta_1 = \frac{\theta_\varphi^- - \theta_v^+}{M_v} \frac{\partial h_v^t}{\partial q_v} \Sigma \frac{\kappa_\varphi^1(\theta_\varphi^-)}{\kappa_v^1(\theta_v^+) \delta_\varphi^v} + \beta_0, \quad (86)$$

- donde

$$\Sigma = \left(\left[\frac{\partial H_\varphi}{\partial q_\varphi} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \frac{M_\varphi(\alpha_{M_\varphi} - \alpha_{M_\varphi-1})}{\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right). \quad (87)$$

Invarianza de la dinámica cero híbrida

- Considerando la otra transición

$$\alpha_1 = \frac{\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+}{M_\varphi} \frac{\partial h_\varphi^t}{\partial q_\varphi} \Delta_{\dot{q},v}^\varphi(q_v^-) \frac{\partial H_v}{\partial q_v}^{-1} \Xi \frac{\kappa_v^1(\theta_v^-)}{\kappa_\varphi^1(\theta_\varphi^+) \delta_v^\varphi} + \alpha_0, \quad (88)$$

- donde

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{M_v(\beta_{M_v} - \beta_{M_v-1})}{\theta_v^- - \theta_v^+} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Invarianza de la dinámica cero híbrida

- Cuando el torque del tobillo se usa para afectar la estabilidad, la trayectoria del momentum angular durante la fase completamente actuada $\zeta_{\varphi}^*(s_{\varphi})$ debe cumplir con la hipótesis de que el momentum angular no puede ser cero. (de 55,76,77)

$$\zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^+) = \gamma_0 \quad \zeta_{\varphi}^*(\theta_{\varphi}^-) = \gamma_m:$$

$$\gamma_0 = (\delta_v^v)^2 (\delta_v^{\varphi})^2 \gamma_m - (\delta_v^{\varphi})^2 V_{Z_v}(\theta_v^-), \quad (90)$$

Especificación de los demás parámetros libre

- La velocidad promedio de caminata es constante

$$v = \frac{L_s}{T_s}, \quad (91)$$

- Se cumple la condición de estabilidad 57

$$0 < (\delta_v^\varphi)^2 (\delta_\varphi^v)^2 e^{a(\theta_\varphi^- - \theta_\varphi^+)} < 1, \quad a < 0 \quad (57)$$

Especificación de los demás parámetros libre

- Se satisface la condición de no resbalar

$$\left| \frac{F_T}{F_N} \right| \leq \mu, \quad (92)$$

- La fuerza de reacción normal es positiva.
- La altura del pie que se balancea es positiva.
- El FRI se mantiene dentro del polígono convexo de soporte durante la fase completamente actuada

Especificación de los demás parámetros libre

- El pie que se apoyaba deja el piso inmediatamente después de la fase de doble soporte
- Se limitan los ángulos de las rodillas y tobillos para producir una caminata antropomórfica.
- El torque aplicado en cada articulación se limita a un valor físicamente realizable.

Especificación de los demás parámetros libre

- La función de salida para el momentum angular debe ser determinada sujeta a las condiciones de invarianza y a las restricciones establecidas.
- Este problema se puede formular como un problema de optimización numérica con función de costo.

$$J = \frac{1}{L_s} \int_{T_I^+}^{T_I^-} \sum_{k=1}^N |\dot{q}_k u_k| dt, \quad (93)$$

Integración de enfoques Activo y Pasivo



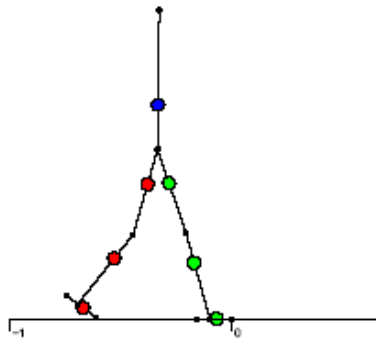
SIMULACIÓN

Simulación

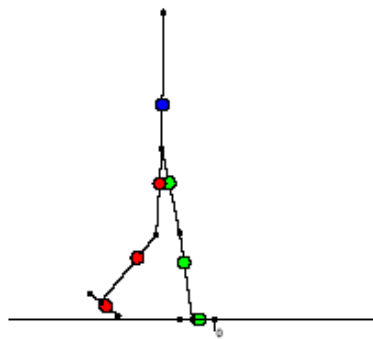
- Se utiliza $M_\varphi = 6$, $M_v = 6$, and $m = 5$.

Model Parameter	Units	Link	Label	Value
Mass	kg	Torso	M_{Torso}	36.044
		Femur	M_{Femur}	9.149
		Tibia	M_{Tibia}	3.000
		Foot	M_{Foot}	0.200
Length	m	Torso	L_{Torso}	0.625
		Femur	L_{Femur}	0.400
		Tibia	L_{Tibia}	0.400
		Toe	L_{Toe}	0.100
		Heel	L_{Heel}	0.060
Inertia	$m^2 kg$	Torso	I_{Torso}	5.527
		Femur	I_{Femur}	0.331
		Tibia	I_{Tibia}	0.149
		Foot	I_{Foot}	0.100
Mass center	m	Torso	l_{Torso}	0.200
		Femur	l_{Femur}	0.163
		Tibia	l_{Tibia}	0.137
		Foot	l_{Foot}	0.030

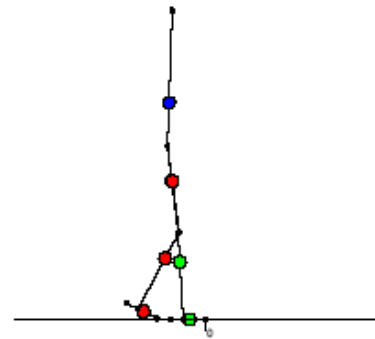
Simulación



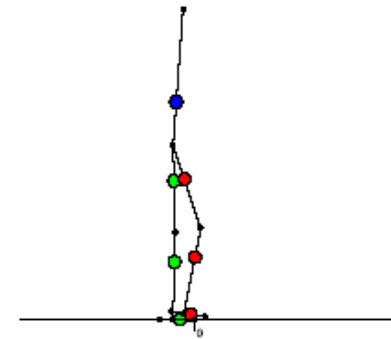
(a) 0.63% of a step



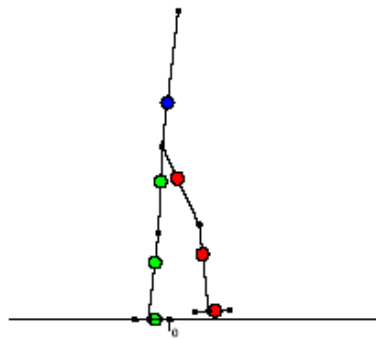
(b) 15.13% of a step



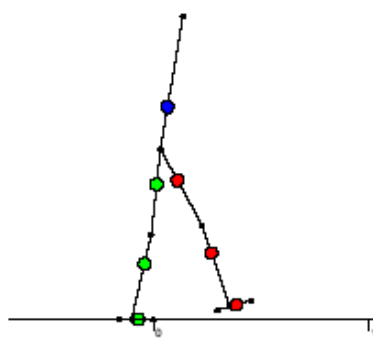
(c) 29.31% of a step



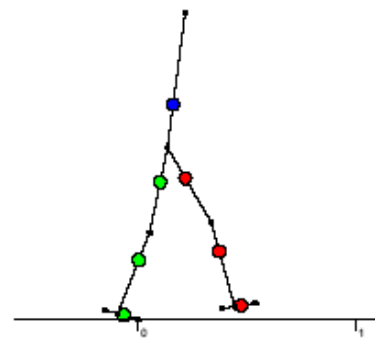
(d) 43.42% of a step



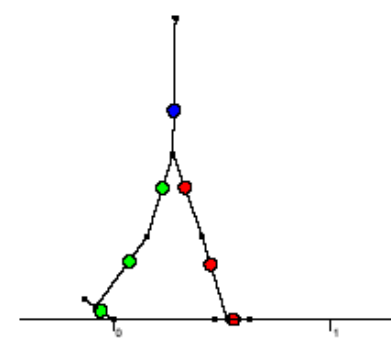
(e) 57.29% of a step



(f) 71.08% of a step



(g) 85.58% of a step



(h) 100.00% of a step