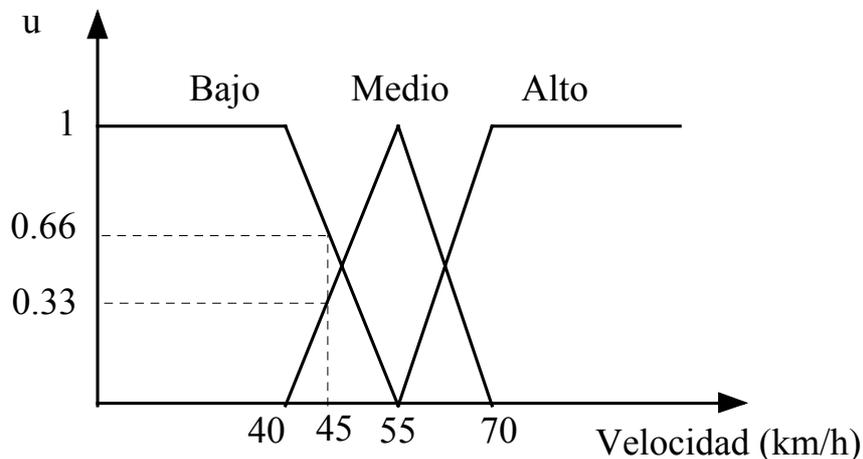


## FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA DIFUSA

La lógica difusa asocia incertidumbre a la estructura de un conjunto de datos (Zadeh, 1965). Los elementos de un conjunto difuso son pares ordenados que indican el valor del elemento y su grado de pertenencia.

Para un conjunto difuso  $A = \{(x, u_A(x)) / x \in X\}$ , se tiene que el elemento  $x$  pertenece al conjunto  $A$  con un grado de pertenencia  $u_A(x)$ , que puede variar entre 0 y 1. Por lo tanto, una variable puede ser caracterizada por diferentes valores lingüísticos, cada uno de los cuales representa un conjunto difuso.

Por ejemplo, la velocidad puede ser caracterizada por valores lingüísticos como "Bajo", "Medio" y "Alto", que representan "una velocidad aproximadamente menor que 40 km/h", "una velocidad cercana a 55 km/h" y "una velocidad sobre 70 km/h aprox." respectivamente. Estos términos se asocian a conjuntos difusos con funciones de pertenencia como las mostradas en la siguiente figura.



Por lo tanto, si la velocidad es 45 km/h, existen grados de pertenencia 0.6, 0.3 y 0 a los conjuntos difusos "Bajo", "Medio" y "Alto" respectivamente.

## Operaciones básicas de lógica difusa

Dados dos conjuntos difusos A y B en el mismo universo X, con funciones de pertenencia  $u_A$  y  $u_B$  respectivamente, se pueden definir las siguientes operaciones básicas:

**Unión.** La función de pertenencia de la unión de A y B se define como:

$$u_{A \cup B} = \max\{u_A(x), u_B(x)\}$$

**Intersección.** La función de pertenencia de la intersección de A y B es:

$$u_{A \cap B} = \min\{u_A(x), u_B(x)\}$$

**Complemento.** La función de pertenencia del complemento de A se define como:

$$u_{\bar{A}}(x) = 1 - u_A(x)$$

**Producto cartesiano.** Dados los conjuntos difusos  $A_1, \dots, A_n$  con universos  $X_1, \dots, X_n$  respectivamente, se define el producto cartesiano como un conjunto difuso en  $X_1 \times \dots \times X_n$  con la siguiente función de pertenencia:

$$u_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min\{u_{A_1}(x_1), \dots, u_{A_n}(x_n)\}$$

según Mamdani (1974)

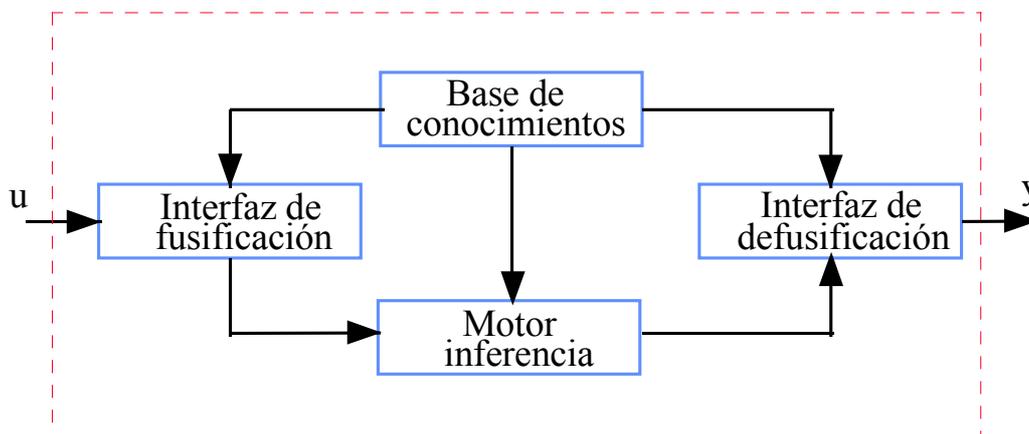
$$u_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = u_{A_1}(x_1) \cdot u_{A_2}(x_2) \cdots u_{A_n}(x_n)$$

según Larsen (1980).

## MODELOS DIFUSOS LINGÜÍSTICOS

Estos modelos se basan en un conjunto de reglas heurísticas donde las variables lingüísticas de las entradas y salidas se representan por conjuntos difusos.

La siguiente figura muestra las principales componentes de un modelo difuso lingüístico: interfaz de fusificación, base de conocimiento, motor de inferencia e interfaz de defusificación (Lee, 1990).



**Interfaz de fusificación.** Este elemento transforma las variables de entrada del modelo ( $u$ ) en variables difusas. Para esta interfaz se deben tener definidos los rangos de variación de las variables de entrada y los conjuntos difusos asociados con sus respectivas funciones de pertenencia.

**Base de conocimientos.** Contiene las reglas lingüísticas del control y la información referente a las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos.

Estas reglas lingüísticas, tienen típicamente la siguiente forma:

**Si  $u_1$  es A y  $u_2$  es B entonces y es C**

donde A, B y C son los conjuntos difusos de las variables de entrada  $u_1$  y  $u_2$ , y de la variable de salida y respectivamente.

Existen varias formas de derivar las reglas (Lee, 1990), entre las que destacan las basadas en:

- La experiencia de expertos y el conocimiento de ingeniería de control. La base de reglas se determina a partir de entrevistas con el operador o a través del conocimiento de la dinámica del proceso.
- La modelación del proceso. Los parámetros de la base de conocimiento se obtienen a partir de datos de entrada y salida del proceso.

**Motor de inferencia.** Realiza la tarea de calcular las variables de salida a partir de las variables de entrada, mediante las reglas del controlador y la inferencia difusa, entregando conjuntos difusos de salida.

Por ejemplo, dada una base de conocimiento con n reglas del tipo:

**Si  $u_1$  es  $A_i$  y  $u_2$  es  $B_i$  entonces y es  $C_i$**

la secuencia de cálculos que realiza el motor de inferencia incluye:

- Determinar el grado de cumplimiento  $W_i$  de cada regla a partir de los grados de pertenencia de las variables de entrada obtenidos en la etapa de fusificación, es decir,

$$W_i = \min(u_{A_i}, u_{B_i})$$

debido a que las premisas de las reglas están unidas por operadores AND, definidos como la intersección de conjuntos difusos.

- Para cada regla se tiene una consecuencia "y es  $C_i$ ", que tiene asociado una función de pertenencia  $u_{C_i}$ . Por lo tanto, se tiene un conjunto de salida  $C'_i$ , cuya función de pertenencia es:

$$u_{C'_i} = \min(W_i, u_{C_i})$$

donde  $W_i$  es el grado de cumplimiento para la regla  $i$ .

- Para evaluar el conjunto total de reglas, se unen los conjuntos difusos  $C'_i$  resultantes de cada regla, generándose un conjunto de salida con la siguiente función de pertenencia:

$$u_{C'} = \max(u_{C'_i}) \quad i = 1, \dots, n$$

De esta forma, se obtiene una salida difusa del controlador, con una función de pertenencia  $u_{C'}$ .

**Interfaz de defusificación.** Este elemento provee salidas discretas y determinísticas a partir de los conjuntos difusos  $C'$  obtenidos como resultado de la inferencia.

Existen diferentes métodos de defusificación, algunos de los cuales se describen a continuación:

- Método del máximo. La salida corresponde al valor para el cual la función de pertenencia  $u_{C'}$  alcanza su máximo.

- Media del máximo. La salida es el promedio entre los elementos del conjunto  $C'$  que tienen un grado de pertenencia máximo.

- Centro de área. Genera como salida el valor correspondiente al centro de gravedad de la función de pertenencia del conjunto de salida  $C'$ .

En particular, los modelos dinámicos difusos lingüísticos, se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} R_i: & \text{ Si } y(t-1) \text{ es } A1_i \text{ y } \dots \text{ y } y(t-ny) \text{ es } Any_i \text{ y} \\ & \quad u(t-1) \text{ es } B1_i \text{ y } \dots \text{ y } u(t-nu) \text{ es } Bnu_i \\ & \quad \text{Entonces } y_i(t) \text{ es } C_i \end{aligned}$$

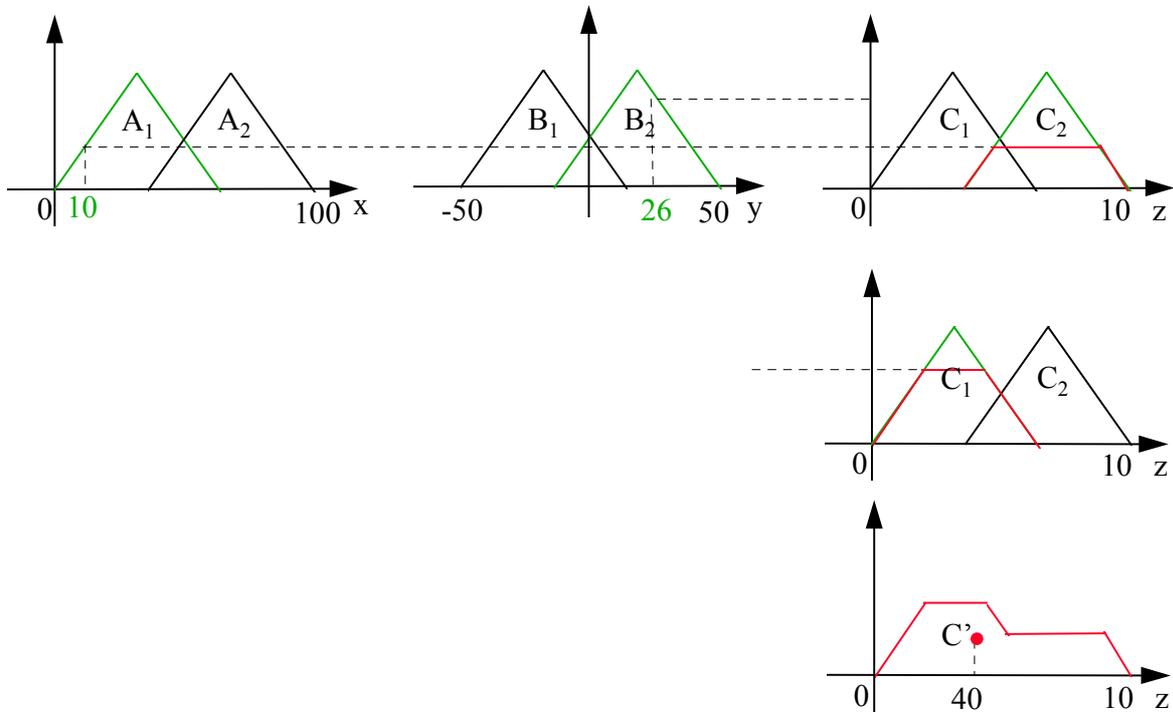
donde  $y_i$  es la salida de la regla  $i$ .

## Ejemplo

Reglas Si  $x$  es  $A$  e  $y$  es  $B$  entonces  $z$  es  $C$

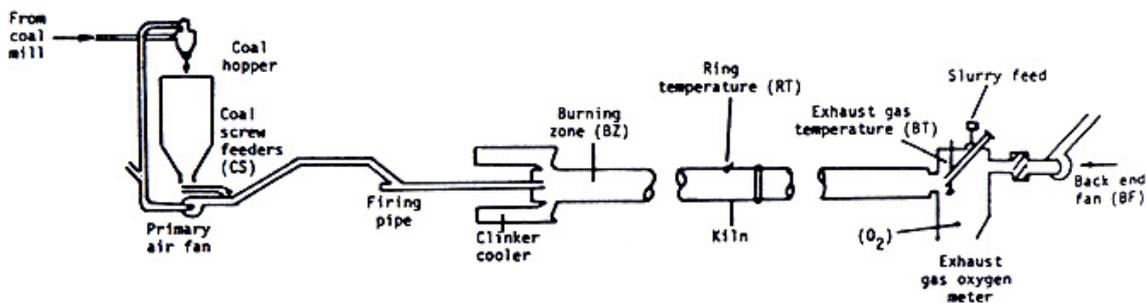
$R_1$  Si  $x$  es  $A_1$  e  $y$  es  $B_2$  entonces  $z$  es  $C_2$

$x = 10$   $y = 26$   $z?$

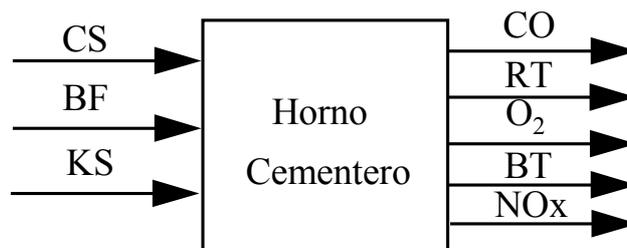


## Ejemplo 2 Modelación de las acciones de control de un operador de un horno cementero.

En la siguiente figura se presenta un diagrama del proceso, donde el carbón proveniente de un molino, alimenta una tolva y es transportado hacia el horno. El ventilador primario sirve para mantener la llama en la zona de cocción.



La mezcla, que permite la formación de los compuestos del cemento, se desplaza desde la parte posterior del horno (derecha de la figura) en contracorriente al flujo de calor, calcinándose y cociéndose, hasta obtenerse el clinker o producto final del horno que pasa posteriormente al enfriador. El ventilador de inducción sirve para succionar los gases producidos en la combustión.



El diagrama muestra las variables de entrada y de salida del proceso:

- el flujo de alimentación del carbón (CS),
- la velocidad del ventilador de inducción (BF) y
- la velocidad del horno (KS).

- el porcentaje de monóxido de carbono en los gases (CO),
- la temperatura de los gases en la zona intermedia (RT),
- el porcentaje de oxígeno en los gases (O<sub>2</sub>),
- la temperatura de los gases en la zona posterior (BT) y
- el porcentaje de óxido nitroso en los gases (NO<sub>x</sub>).

Experimentalmente, se ha comprobado que la dinámica de este sistema es no lineal, con retardos, fuertes interacciones y muy dependiente de las condiciones iniciales.

A partir de la experiencia de operadores para hornos cementeros, se puede deducir, en términos generales, que el flujo de carbón es la variable manipulada que produce el mayor efecto. Por ejemplo, un aumento de CS genera:

- una disminución de O<sub>2</sub> y CO, y
- un aumento de las temperaturas RT y BT, y del NO<sub>x</sub>.

Por su parte, un aumento en BF

- aumenta el O<sub>2</sub>, CO y BT, y
- disminuye RT y NO<sub>x</sub>.

Al aumentar KS, aumentan RT y BT.

A partir de estas afirmaciones, una regla que representa las acciones de control del operador puede ser:

**SI CO ES ALTO ENTONCES CS AUMENTA Y BF DISMINUYE**

## MODELOS DIFUSOS DE TAKAGI Y SUGENO

Estos modelos se caracterizan por relaciones basadas en reglas difusas, donde las premisas de cada regla representan subespacios difusos y las consecuencias son una relación lineal de entrada-salida (Takagi y Sugeno, 1995).

Las variables de entrada en las premisas de cada regla son relacionadas por operadores "y" y la variable de salida es función de las variables de estado, en general, una función lineal. Por lo tanto, las reglas del modelo tienen la siguiente forma:

$R_i$  : Si  $X_1$  es  $A_{1_i}$  y ... y  $X_k$  es  $A_{k_i}$   
entonces  $Y_i = f_i(X_1, \dots, X_k)$

donde  $X_1, \dots, X_k$  son las variables de entrada o premisas de las reglas,  
 $A_{1_i}, \dots, A_{k_i}$  son los conjuntos difusos asociados a las variables de entrada,  
 $p_0^i, \dots, p_k^i$  son los parámetros de la regla  $i$ , e  
 $Y_i$  es la salida de la regla  $i$ .  
 $f_i$  es una función que generalmente es lineal, es decir:

$$Y_i = p_0^i + p_1^i X_1 + \dots + p_k^i X_k$$

Por lo tanto, la salida del modelo,  $Y$ , se obtiene ponderando la salida de cada regla por su respectivo grado de cumplimiento  $W_i$ , es decir:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^M (W_i Y_i)}{\sum_{i=1}^M W_i}$$

donde  $M$  es el número de reglas del modelo y  $W_i$  corresponde al grado de activación de la regla  $i$ , que se define como:

$$w_i = \text{oper}(\mu_{A1_i}, \dots, \mu_{Am_i}, \dots, \mu_{Ak_i})$$

donde “oper” es el operador mínimo o el producto, y  $\mu_{Am_i}$  es el grado de pertenencia de la variable de entrada  $X_m$  al conjunto difuso  $Am_i$  para  $m = 1, \dots, k$ .

En particular, los modelos dinámicos de tiempo discreto de Takagi y Sugeno están dados por:

$$\begin{aligned} R_i: & \text{ Si } y(t-1) \text{ es } A1_i \text{ y } \dots \text{ y } y(t-ny) \text{ es } Any_i \text{ y} \\ & \quad u(t-1) \text{ es } B1_i \text{ y } \dots \text{ y } u(t-nu) \text{ es } Bnu_i \\ & \text{ entonces } y_i(t) = a_1^i y(t-1) + \dots + a_{ny}^i y(t-ny) + \\ & \quad b_1^i u(t-1) + \dots + b_{nu}^i u(t-nu) + c^i \end{aligned}$$

donde  $a_j^i$ ,  $b_j^i$  y  $c^i$  son parámetros de los modelos de las consecuencias.

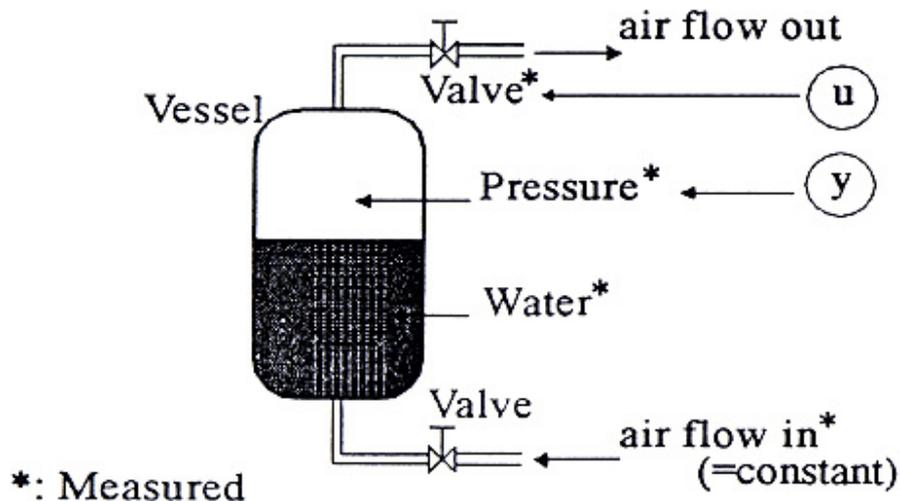
También los modelos dinámicos de Takagi y Sugeno se pueden representar en variables de estado, es decir:

$$\begin{aligned} R_i: & \text{ Si } x_1(t) \text{ es } A1_i \text{ y } \dots \text{ y } x_n(t) \text{ es } An_i \\ & \text{ entonces } x_i(t+1) = A^i x(t) + B^i u(t) + C^i \end{aligned}$$

donde  $x = [x_1, \dots, x_n]$  es un vector de variables de estado del proceso, y  $A^i$ ,  $B^i$  y  $C^i$  son las matrices de los modelos lineales en variables de estado de las consecuencias.

Ejemplo Modelo difuso de Takagi y Sugeno para un fermentador batch de alimentación.

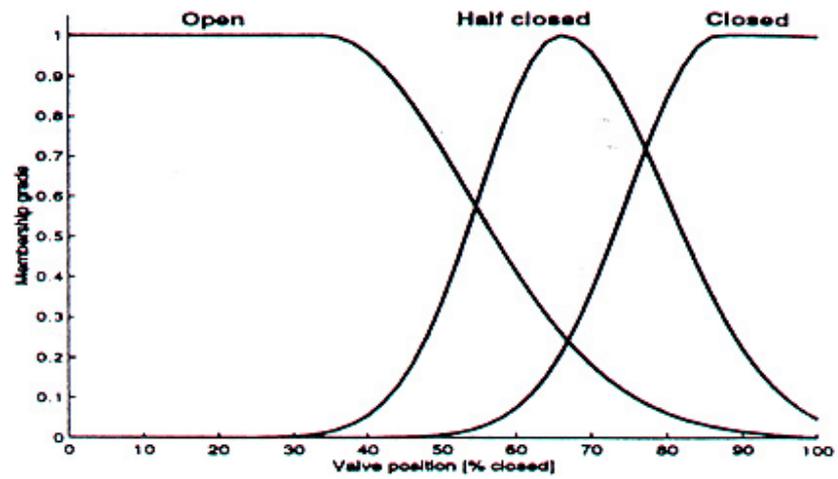
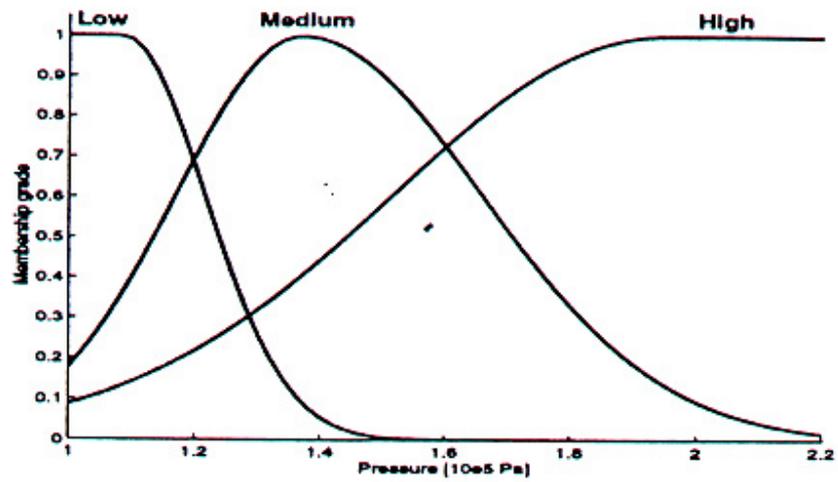
La presión en el estanque de fermentación puede ser controlada a través del cambio de flujo de aire de salida manteniendo constante el flujo de aire de entrada.



A continuación se presentan la base de reglas del modelo de Takagi y Sugeno que caracterizan al fermentador.

1	If pressure $y(k)$ is <i>Low</i> and valve $u(k)$ is <i>Open</i> then $y(k + 1) = 0.67y(k) + 0.0007u(k) + 0.35$
2	If $y(k)$ is <i>Medium</i> and $u(k)$ is <i>Half Closed</i> then $y(k + 1) = 0.80y(k) + 0.0028u(k) + 0.07$
3	If $y(k)$ is <i>High</i> and $u(k)$ is <i>Closed</i> then $y(k + 1) = 0.90y(k) + 0.0071u(k) - 0.39$

## Funciones de pertenencia del modelo de Takagi y Sugeno que caracterizan al fermentador



## CONTROL BASADO EN MODELOS DE TAKAGI & SUGENO

Los modelos difusos propuestos por Takagi y Sugeno (1985), tienen la particularidad de que las consecuencias de cada regla son ecuaciones lineales. Esta característica permite que para cada subespacio lineal o regla del modelo, se pueda derivar un controlador basado en la teoría de control lineal. Por lo tanto, se puede obtener un controlador difuso, que combine las acciones de los controladores lineales de cada regla.

La secuencia de pasos, propuesta por Sugeno y Kang (1986), para diseñar un controlador basado en modelo difuso consiste en:

- a) Identificar un modelo basado en reglas como el siguiente:

$$R_i : \text{Si } Z_1 \text{ es } F_{1i} \text{ y } \dots \text{ y } Z_m \text{ es } F_{mi} \\ \text{entonces } Y_i = p_0^i + p_1^i X_1 + \dots + p_k^i X_k \quad (*)$$

donde  $Z_1, \dots, Z_m$  son las variables de entrada del modelo y  $X_1, \dots, X_k$  son las variables de estado.

Los parámetros de las premisas y de las consecuencias se obtienen utilizando los métodos descritos anteriormente.

- b) Para cada regla de modelo, se tiene una consecuencia que representa un submodelo lineal del proceso. Esta relación está dada por:

$$Y_i = p_0^i + p_1^i X_1 + \dots + p_k^i X_k$$

- c) A partir de este submodelo, se puede derivar un controlador lineal convencional, como por ejemplo: un controlador de varianza mínima, un controlador lineal cuadrático, etc. De esta manera, se obtiene una acción de control para la regla  $i$  dada por:

$$u_i = f_i(Y_i, X_1, \dots, X_k) \quad (**)$$

donde  $f_i$  es una función lineal descrita por el controlador lineal empleado.

- d) Para construir la base de reglas del controlador difuso, se utilizan las mismas premisas del modelo difuso descritas por la ecuación (\*), mientras las consecuencias se cambian por las acciones de control dadas por la ecuación (\*\*). Por lo tanto, las reglas del controlador son:

$$R_i : \text{Si } Z_1 \text{ es } F_{1i} \text{ y } \dots \text{ y } F_m \text{ es } A_{mi} \\ \text{entonces } u_i = f_i(Y_i, X_1, \dots, X_k)$$

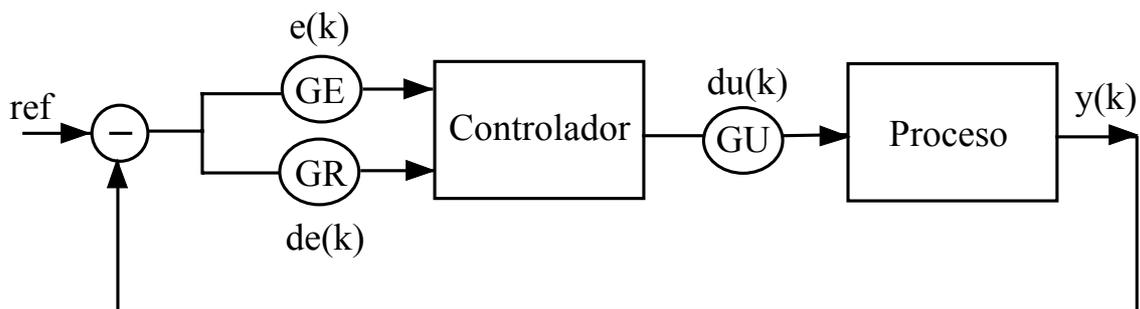
- e) Por último, cabe mencionar que para calcular la acción de control final se utiliza la ponderación de la salida de cada regla por su respectivo grado de cumplimiento  $W_i$ . De esta manera, la acción de control final  $u$  es:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^M (W_i u_i)}{\sum_{i=1}^M W_i}$$

donde  $W_i$  es el grado de activación de la regla  $i$  y  $M$  es el número de reglas del modelo difuso.

## CONTROLADORES PI DIFUSOS

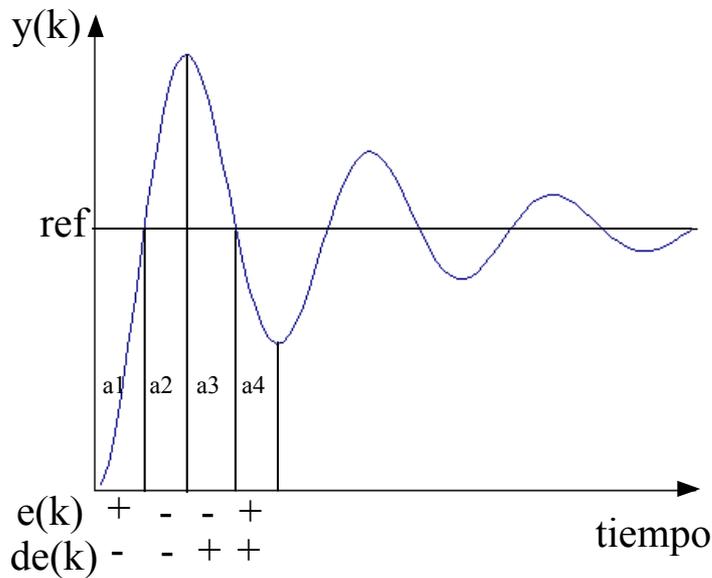
La Figura presenta un diagrama de un controlador PI difuso incremental, donde las entradas son el error  $e(k) = \text{ref} - y(k)$  y su tasa de cambio  $de(k) = e(k) - e(k-1)$ , y la salida es el cambio incremental en la variable manipulada  $du(k)$ .



Los parámetros del controlador son las ganancias GE, GR y GU, que multiplican a  $e(k)$ ,  $de(k)$  y  $du(k)$  respectivamente.

En general, estos controladores presentan las siguientes características: dos o siete conjuntos difusos para las variables de entrada, tres o siete conjuntos difusos para la variable de salida, funciones de pertenencia triangulares, fusificación con universos continuos, implicación utilizando operador min, inferencia basada en implicancia difusa y defusificación por el método de la media de los máximos modificada.

Este tipo de controlador difuso se deriva a partir del comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado. En la siguiente figura se aprecia la respuesta típica de un sistema controlado, donde las entradas al controlador son  $e(k)$  y  $de(k)$ , y la salida es  $du(k)$ .



Analizando en detalle esta respuesta se pueden observar diferentes situaciones. Considerando el valor de  $e(k)$  y el signo de  $de(k)$ , se tienen los casos presentados en la tabla 1(a). Además, existen dos tipos de situaciones especiales, cuando el error  $e(k)$  es cero y cuando su tasa de cambio  $de(k)$  es cero. Estas situaciones se muestran en las siguientes figuras y en las tablas 1(b) y 1 (c).

Tabla 1: Situaciones de las variables  $e(k)$  y  $de(k)$

	$e(k)$	$de(k)$
a1	$>0$	$<0$
a2	$<0$	$<0$
a3	$<0$	$>0$
a4	$>0$	$>0$

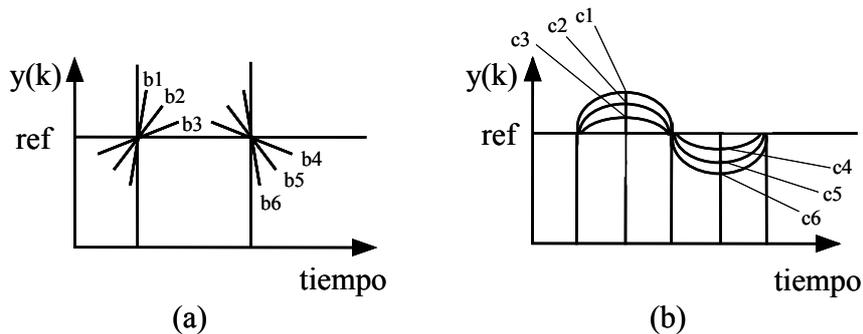
(a)

	$e(k)$	$de(k)$
b1	$=0$	$\lll<0$
b2	$=0$	$\ll<0$
b3	$=0$	$<0$
b4	$=0$	$>0$
b5	$=0$	$\gg>0$
b6	$=0$	$\ggg>0$

(b)

	$de(k)$	$e(k)$
c1	$=0$	$\lll<0$
c2	$=0$	$\ll<0$
c3	$=0$	$<0$
c4	$=0$	$>0$
c5	$=0$	$\gg>0$
c6	$=0$	$\ggg>0$

(c)



A partir de estas condiciones, se puede configurar una tabla en función de las variables de entrada del controlador (ver Tabla 2). En ella se consideran siete conjuntos difusos NB ("Negative Big"), NM ("Negative Medium"), NS ("Negative Small"), ZE ("Zero"), PS ("Positive Small"), PM ("Positive Medium") y PB ("Positive Big") para las variables de entrada que describen los estados  $\lll, \ll, <, =, >, \gg$  y  $\ggg > 0$ , respectivamente.

Tabla 2: Diagrama de estados  $e(k)$  y  $de(k)$ .

		de(k)						
		NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
e(k)	NB	a2	a2	a2	c1	a3	a3	a3
	NM	a2	a2	a2	c2	a3	a3	a3
	NS	a2	a2	a2	c3	a3	a3	a3
	ZE	b1	b2	b3	ZE	b4	b5	b6
	PS	a1	a1	a1	c4	a4	a4	a4
	PM	a1	a1	a1	c5	a4	a4	a4
	PB	a1	a1	a1	c6	a4	a4	a4

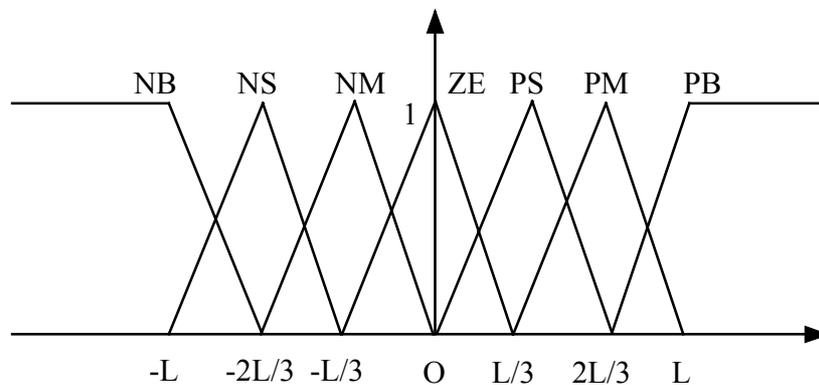
Las acciones de control, es decir, los incrementos en la variable manipulada, se definen a partir de la proposición de MacVicar-Whelan (1976), como lo muestra la Tabla 3. Por ejemplo, para el elemento de la tercera fila y sexta columna, la regla de control se interpreta como: "Si el error es negativo pequeño y la variación incremental del error es positiva

mediana, entonces hacer positiva pequeña la variación incremental en el control".

Tabla 3: Reglas de control PI difuso.

		de(k)						
		NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
e(k)	NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	ZE
	NM	NB	NB	NM	NM	NS	ZE	PS
	NS	NB	NM	NS	NS	ZE	PS	PM
	ZE	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
	PS	NM	NS	ZE	PS	PS	PM	PB
	PM	NS	ZE	PS	PM	PM	PB	PB
	PB	ZE	PS	PM	PB	PB	PB	PB

El diseño de un controlador difuso PI incluye, además de definir las reglas de control, determinar las funciones de pertenencia de cada conjunto difuso. En general, se utilizan funciones triangulares como se muestran en la siguiente figura, donde el universo varía entre  $-L$  y  $L$ , siendo  $L$  un factor de escalamiento de las variables.



Los principales parámetros de sintonía de estos controladores son las ganancias  $G_E$ ,  $G_R$  y  $G_U$ . Existen diversos trabajos que describen la equivalencia entre un controlador PI convencional y un controlador PI difuso (Tang, 1987).

