

EL 42D

Control de Sistemas

Profesora: Dra. Doris Sáez H.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

Unidad 3:

Técnica Gráfica de Control en el Dominio del Tiempo

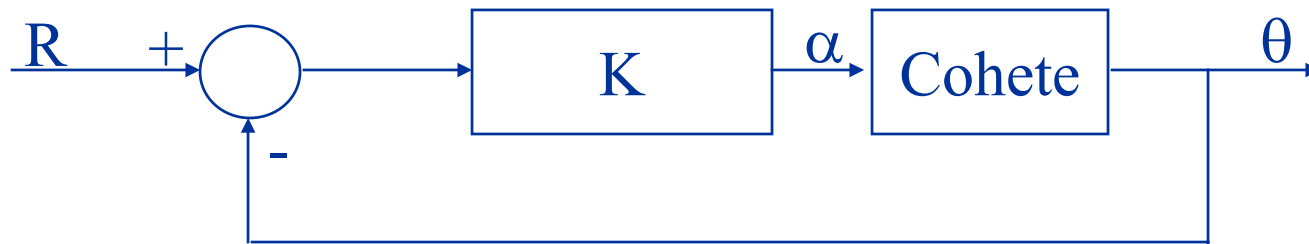
Elaborado por: D. Sáez
Colaboradores: R. Zúñiga & S. Sippa

Estabilidad de Sistemas Realimentados en el Dominio del Tiempo

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Ejemplo: Control de un Cohete

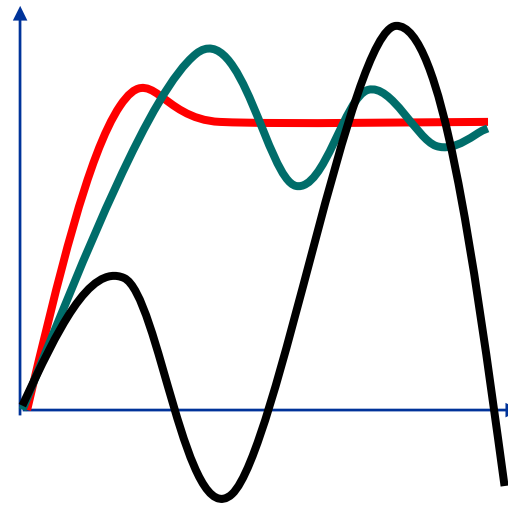
$$\frac{\theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{s(s+6)(s+0.13)}$$



$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+6)(s+0.13) + K}$$

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Ecuación característica: $s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K = 0$



K=0.002 $\longrightarrow S_{1,2,3} = -0.607; -0.04; -0.084$

K=0.01 $\longrightarrow S_{1,2,3} = -0.63; -0.05 \pm 0.116j$

K=1 $\longrightarrow S_{1,2,3} = -1.27; 0.275 \pm 0.84j$

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Criterio de Routh-Hurwitz:

$$\text{Ec : } q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Interesa saber si hay raíces en el semiplano derecho.

Para que exista estabilidad se requiere:

- Coeficientes del polinomio $q(s)$ sean todos del mismo signo.
- Coeficientes distintos de cero.

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Tabla de Routh – Hurwitz:

S^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$
S^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	
S^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$
S^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	
$\vdots$				
S^0	x			$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Criterio de Routh – Hurwitz:

El número de raíces de $q(s)$ con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de la primera columna de la tabla.

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Ej: Cohete $\rightarrow q(s) = s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K \quad K > 0$

s^3	1	0.078	0
s^2	0.73	K	0
s^1	$\frac{0.056 - K}{0.73}$	0	0
s^0	K		

El sistema es estable si $0.056 - K > 0 \Rightarrow K \leq 0.056$

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Caso particular: Ceros en la primera columna

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

$$S^5 \quad 1 \quad 2 \quad 11 \quad 0$$

$$S^4 \quad 2 \quad 4 \quad 10 \quad 0$$

$$S^3 \quad \text{○} \quad 6 \quad 0$$

$$S^2 \quad c_1 \quad 10 \quad 0$$

$$S^1 \quad d_1 \quad 0$$

$$S^0 \quad 10$$

$\varepsilon \sim 0$

Hay dos cambios de signo,
entonces existen 2 raíces con
parte real positiva

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon} < 0 \text{ porque } \varepsilon \sim 0^+$$

$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \rightarrow 6 > 0$$

Estabilidad en el Dominio del Tiempo

Problema: Determine el rango de valores de K para la estabilidad de un sistema de control con retroalimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es:

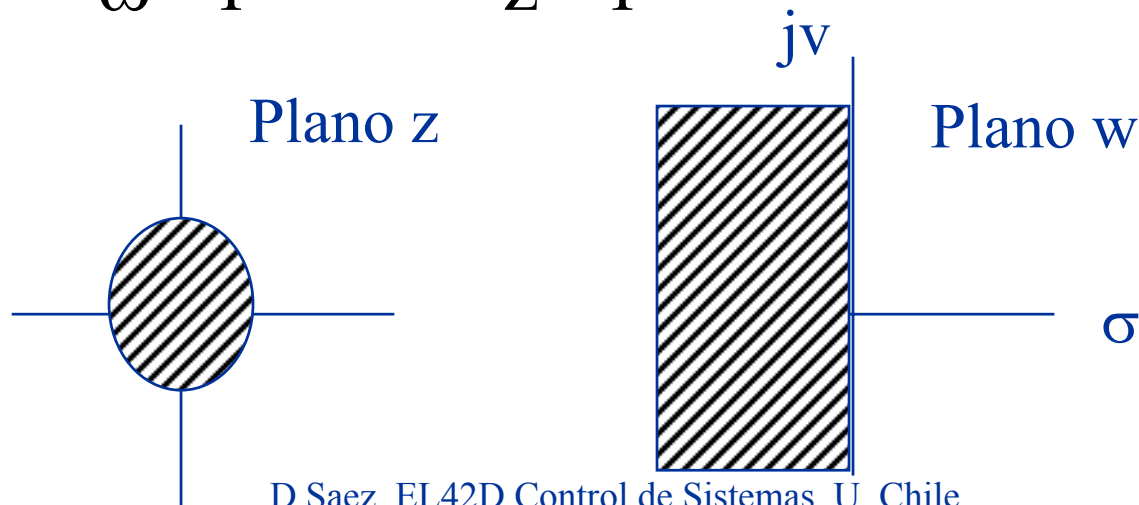
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Analice para diferentes K.

Criterio de Routh – Hurwitz para Sistemas Discretos

Se requiere de una transformación bilinear desde el plano Z al plano ω (no frecuencia!!!).

$$Z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \rightarrow \omega = \frac{Z + 1}{Z - 1}$$



Criterio de Routh – Hurwitz para Sistemas Discretos

Si: $\omega = \sigma + jv$

Estabilidad para sistemas discretos:

$$\left| \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \right| < 1$$

$$\left| \frac{\sigma + jv + 1}{\sigma + jv - 1} \right| < 1 \rightarrow \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 + v^2}}{\sqrt{(\sigma - 1)^2 + v^2}} < 1$$

$$(\sigma + 1)^2 + v^2 < (\sigma - 1)^2 + v^2 \rightarrow \sigma < 0 \leftrightarrow |z| < 1$$

Criterio de Routh – Hurwitz para Sistemas Discretos

Nota: El plano ω es similar al plano S, pero no igual.

Sustituyendo en la ecuación característica $z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$

$$P(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_0 = 0$$

$$\rightarrow a_0 \left(\frac{\omega + 1}{\omega - 1} \right)^n + \dots + a_{n-1} \left(\frac{\omega + 1}{\omega - 1} \right) + a_0 = 0$$

$$Q(\omega) = b_0 \omega^n + b_1 \omega^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

Entonces con este polinomio se puede aplicar
el criterio de R - H de manera similar que a sistemas continuos

MÉTODO DE JURY (Tiempo Discreto)

$$\Delta_n(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$$

1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}			$\cdots$		a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	$\cdots$	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_1	b_0			
5	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}			
$\vdots$								
$2n-3$	h_0	h_1	h_2					

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

- El polinomio es estable si solo si:

$$(1) \quad \Delta_n(1) > 0$$

$$(2) \quad \Delta_n(-1) > 0, \quad n \text{ par} \\ < 0, \quad n \text{ impar}$$

$$(3) \quad |a_0| < |a_n|$$

$$(4) \quad |b_0| > |b_{n-1}|$$

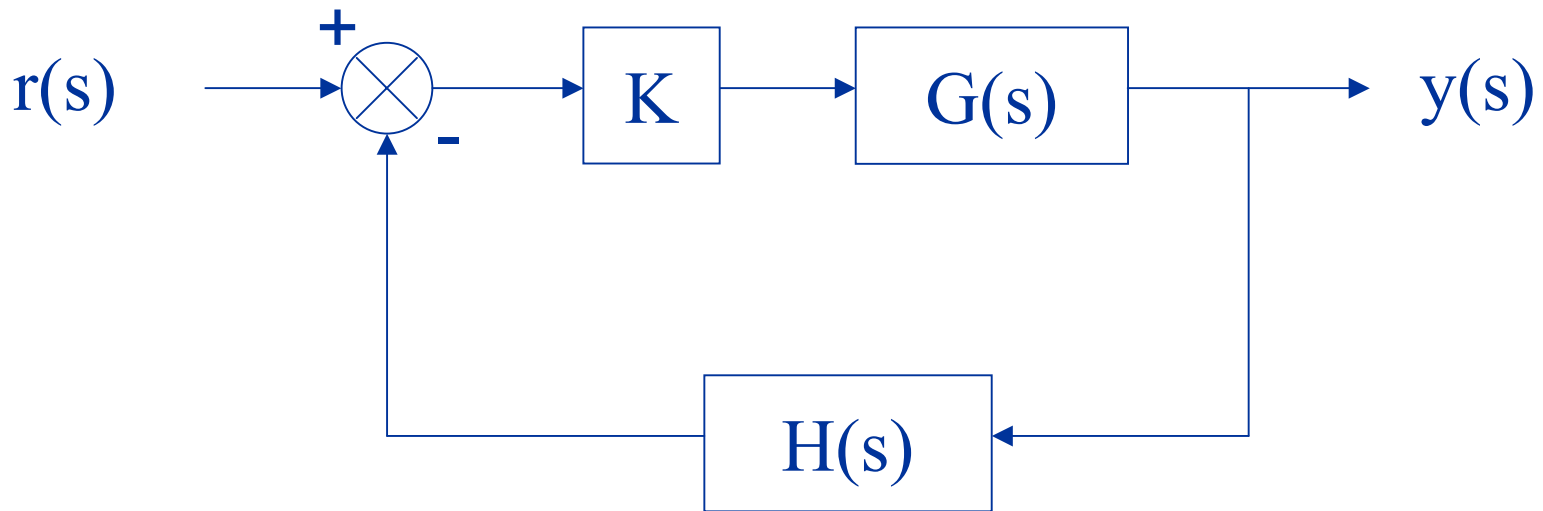
$$(5) \quad |c_0| > |c_{n-2}|$$

$\vdots$

$$(n+1) \quad |h_0| > |h_2|$$

Lugar Geométrico de las Raíces

Lugar Geométrico de las Raíces



$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Lugar Geométrico de las Raíces

- Ecuación característica:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

o bien $1 + K \frac{B(s)}{A(s)} = 0$

$A(s)$ $\longrightarrow$ polos en lazo abierto de $G(s)H(s)$.

$B(s)$ $\longrightarrow$ ceros en lazo abierto de $G(s)H(s)$.

Lugar Geométrico de las Raíces

- Definición: Lugar geométrico de las raíces del plano s es donde se mueven los polos al variar K .

$$0 < K < \infty$$

- Si $\frac{B(s)}{A(s)} = P(s) \longrightarrow 1 + KP(s) = 0$

Lugar Geométrico de las Raíces

- Como s es una variable compleja, se puede escribir en notación polar.

$$P(s) = |P(s)| \angle P(s)$$

- Entonces la ecuación característica queda:

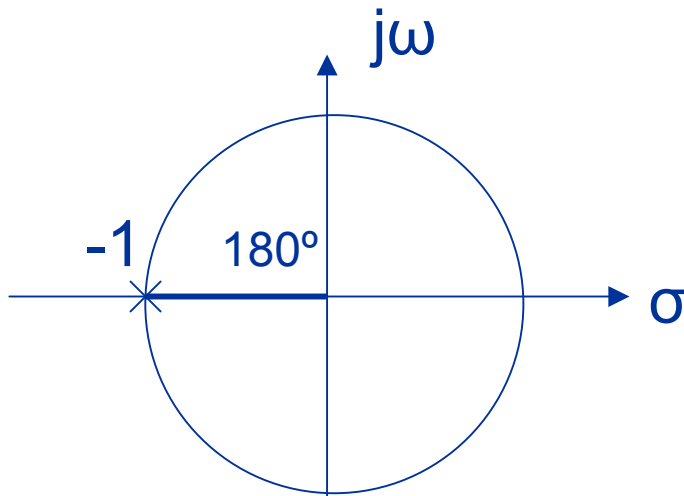
$$1 + |KP(s)| \angle KP(s) = 0$$

Lugar Geométrico de las Raíces

- De forma equivalente:

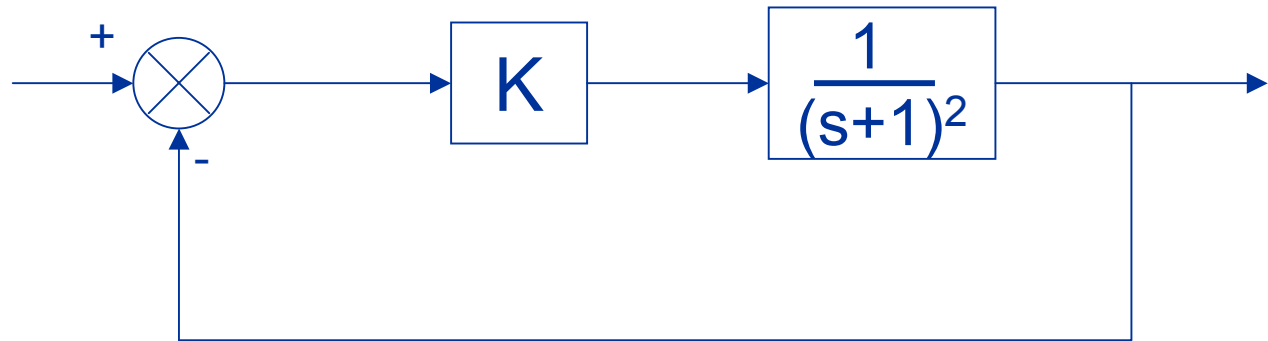
$$|KP(s)| \angle KP(s) = -1$$

$$\Rightarrow |KP(s)| = 1 \quad y \quad \angle KP(s) = \pm 180^\circ$$



Lugar Geométrico de las Raíces

- Ejemplo:



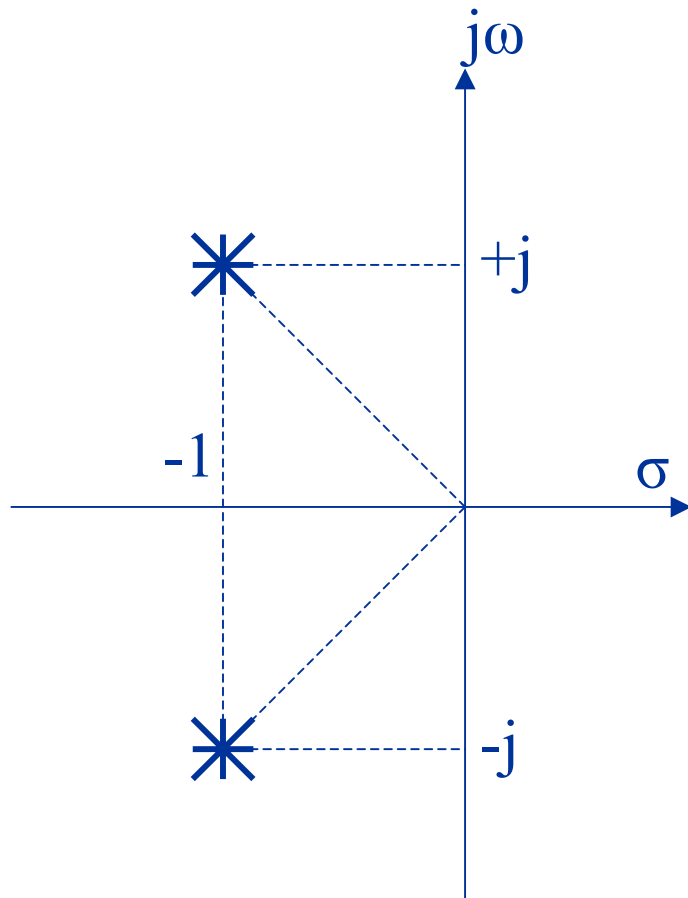
– Ecuación característica:

$$1 + \frac{K}{(s+1)^2} = 0$$

Polos:

$$s = -1 \pm \sqrt{K}j$$

Lugar Geométrico de las Raíces



Si se desea $\xi = 0.7$,
calcular K .

El polo s^* debe cumplir:

$$\left| \frac{K}{(s^* + 1)^2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow K = 1$$

Procedimiento para graficar el

LGR

- Sistema general: $1 + KG(s) = 0$

- Ecuación característica:
$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^m (s + p_j)} = 0$$

1) $K = 0$; raíces = polos de la planta.

2) $K = \infty$; raíces = ceros de la planta.

Procedimiento para graficar el LGR

- 3) El LGR existe en el eje real siempre que a la derecha del mismo el número de polos y ceros sea impar.
- 4) Como los LGR (trazos) se inician en los polos y terminan en los ceros, el número de LGR es igual al $\text{Max}\{\#p, \#z\}$.
- 5) Los LGR son simétricos con respecto al eje real (raíces complejas conjugadas).

Procedimiento para graficar el LGR

6) Si $\# \text{ceros} < \# \text{polos}$ y $\# \text{polos} - \# \text{ceros} = N$, entonces N polos del LGR deben terminar en ceros en el infinito.

Estas raíces se dirigen a infinito aproximándose a lo largo de asíntotas a medida que $K \rightarrow \infty$.

Punto de partida de las asíntotas $= \frac{\sum p_i - \sum z_j}{\# p - \# z}$

Procedimiento para graficar el LGR

Ángulo de las asíntotas con respecto al eje real:

$$\theta = \frac{(2\lambda + 1) \cdot 180^\circ}{\#p - \#z} \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, \#p - \#z - 1$$

7) El punto en el cual el LGR cruza el eje imaginario se calcula usando el criterio de Routh-Hurwitz.

Procedimiento para graficar el LGR

8) El punto de salida de los polos del LGR del eje real se calcula como:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{G(s)} \right) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación que pertenecen al LGR del eje real son los puntos de salida y/o llegada al eje real.

$$\text{Si } 1 + KG(s) = 0 \rightarrow K = -\frac{1}{G(s)}$$

Procedimiento para graficar el LGR

9) El ángulo de salida de un polo o el ángulo de llegada de un cero en el LGR pueden determinarse por el criterio del ángulo de fase.

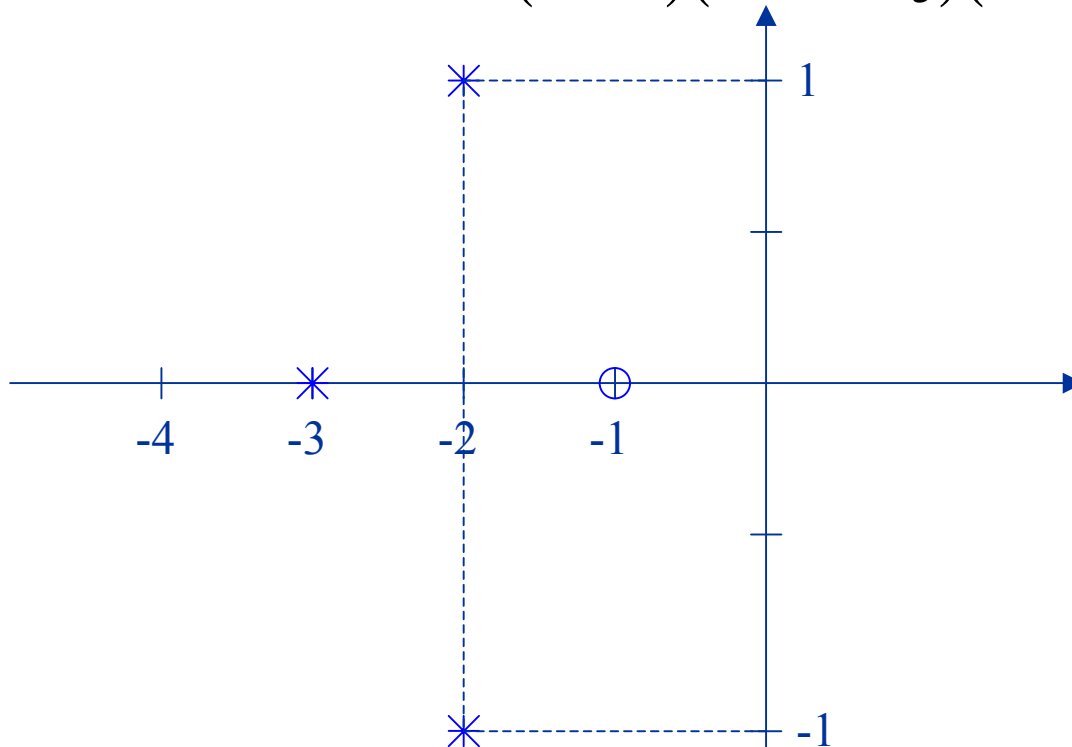
$$\pm 180^\circ (2\lambda + 1) \quad \angle KG(s) = \pm 180^\circ$$

$$\angle z - \angle p = 180^\circ$$

Ejemplo

- Sea

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 3)(s + 2 - j)(s + 2 + j)}$$

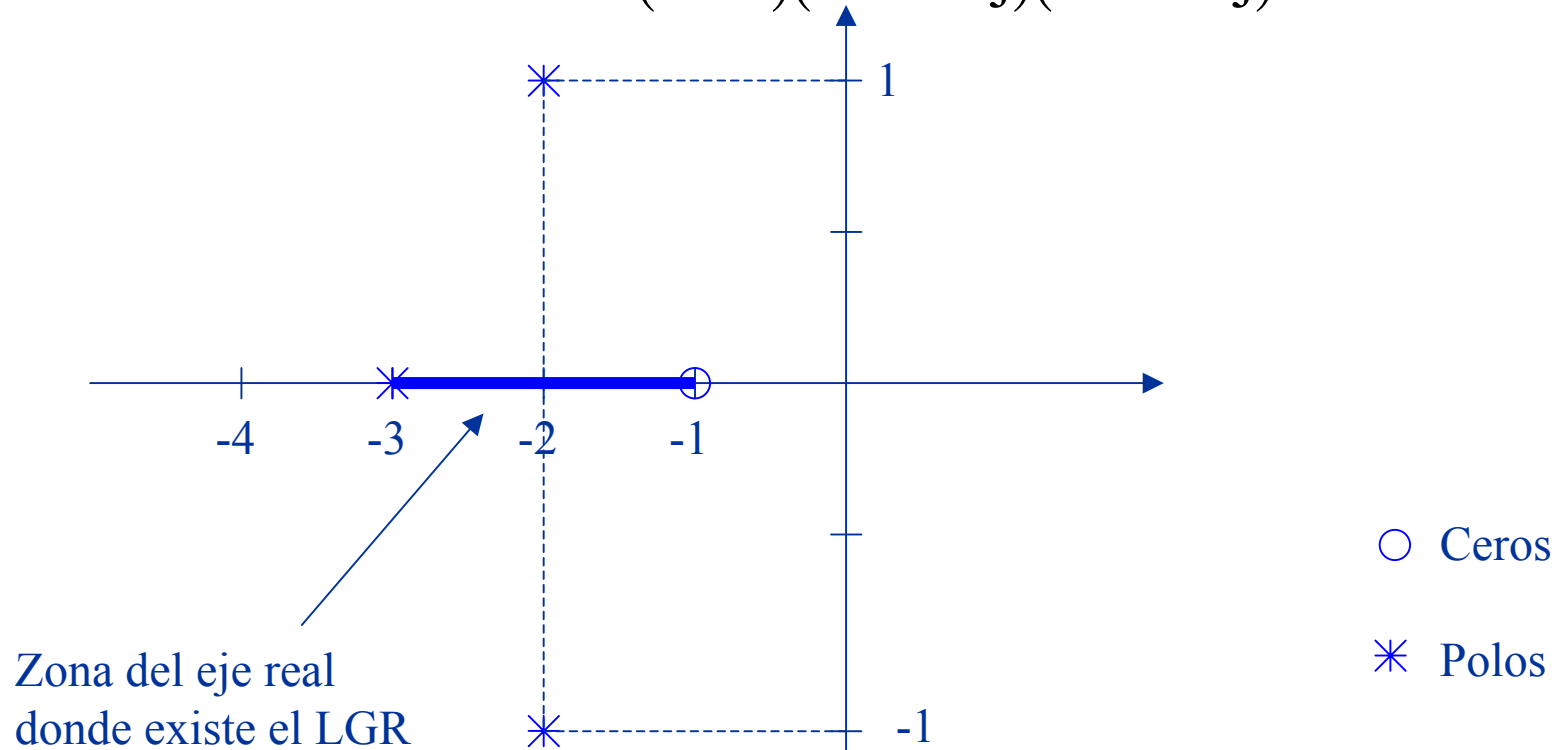


○ Ceros

* Polos

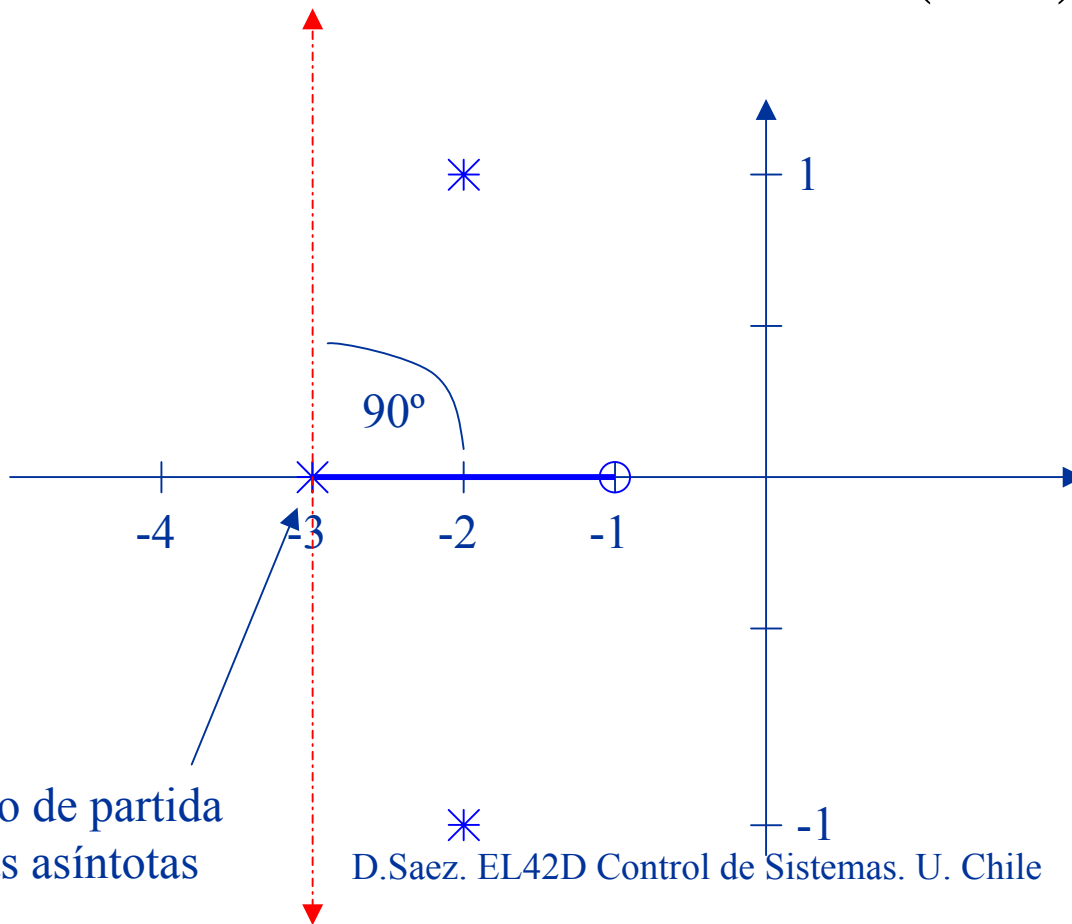
Ejemplo

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 3)(s + 2 - j)(s + 2 + j)}$$



Ejemplo

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 3)(s + 2 - j)(s + 2 + j)}$$



$\circ$ Ceros

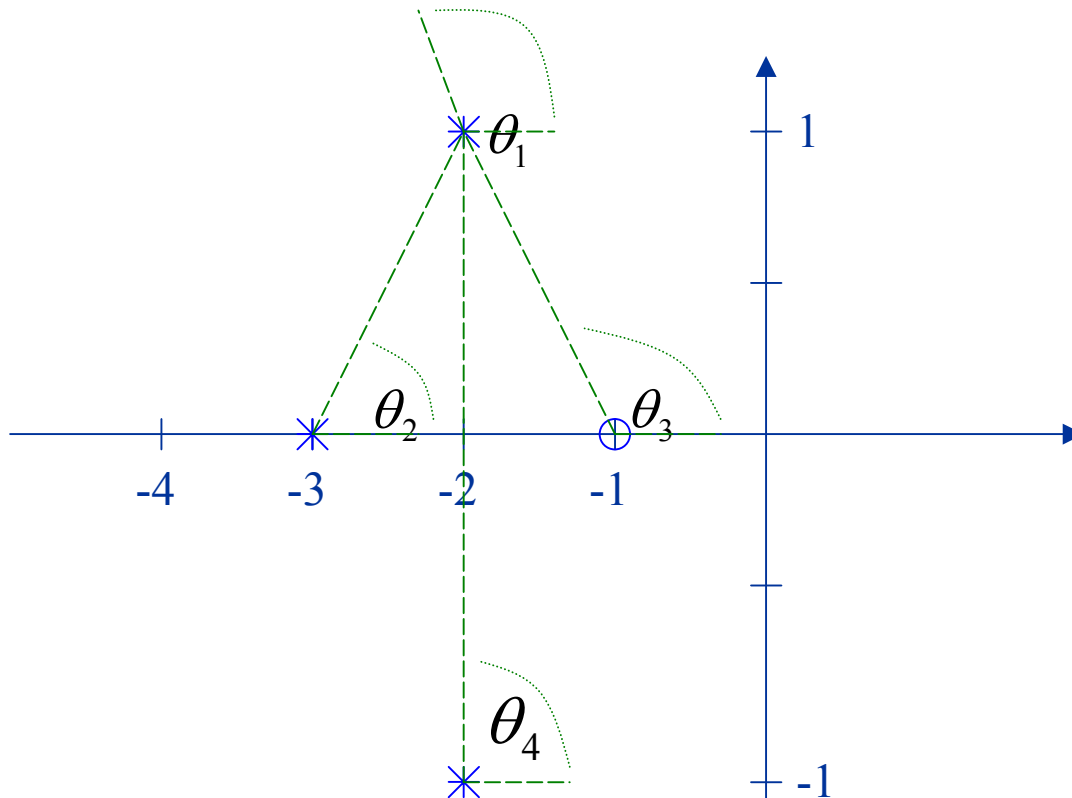
$*$ Polos

Punto de partida
de las asíntotas

Ejemplo

$$\theta_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_4 = 180^\circ$$

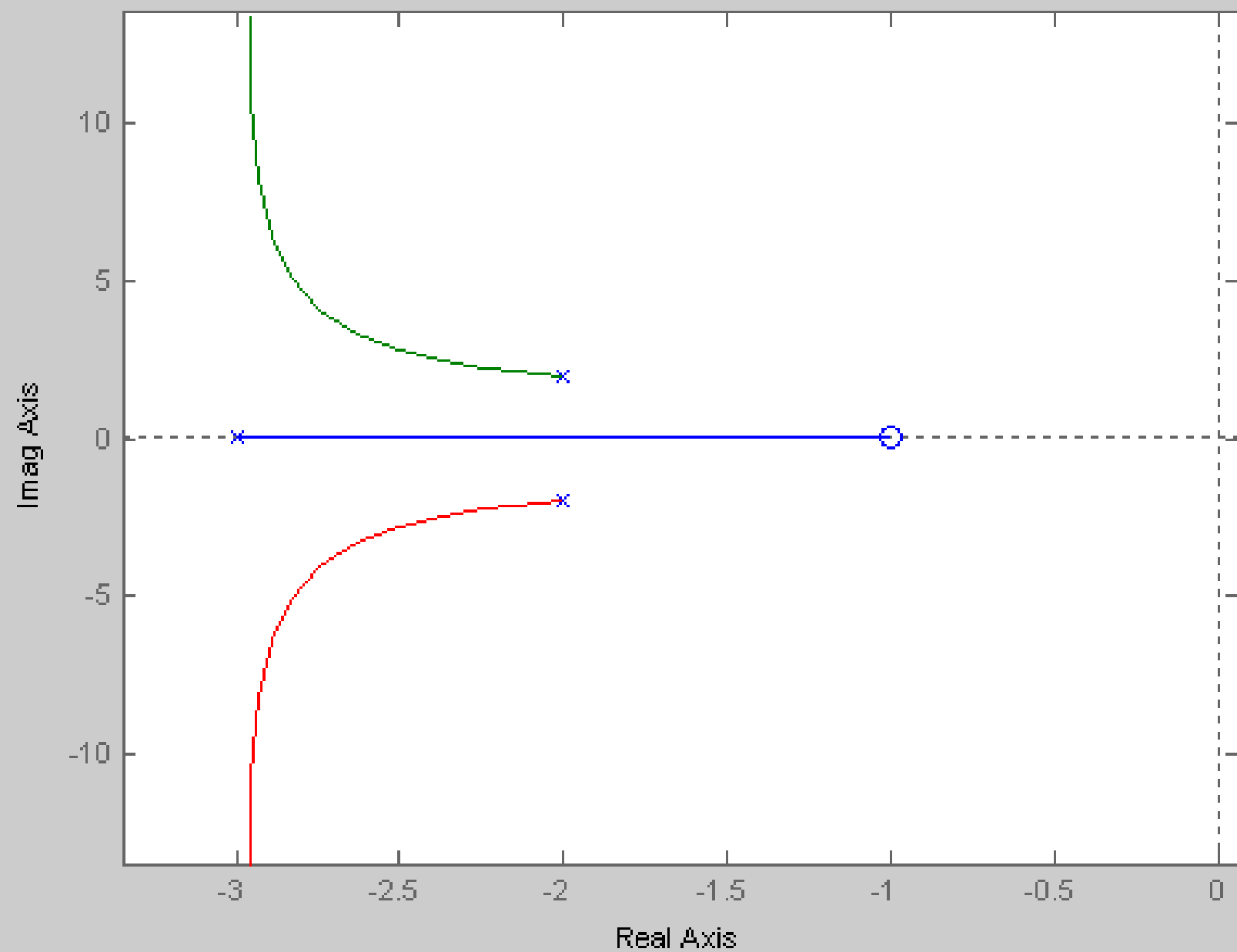
$$135^\circ - \theta_1 - 45^\circ - 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta_1 = -180^\circ$$



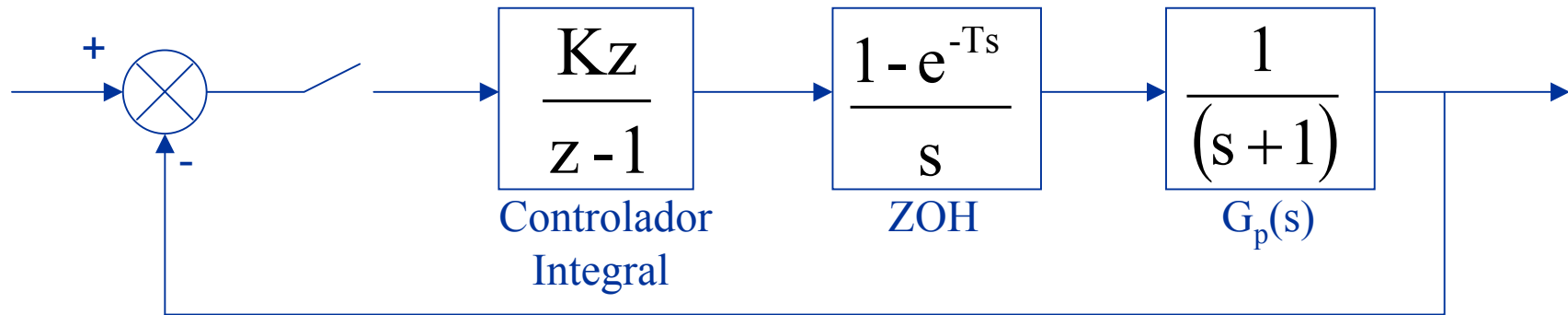
○ Ceros

* Polos

Root Locus



LGR para Sistemas Discretos



$$\begin{aligned}
 Z(G_n(s)G_p(s)) &= Z\left(\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right) \\
 &= \frac{z-1}{z}Z\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right) \\
 &= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}
 \end{aligned}$$

LGR para Sistemas Discretos

Si $G(z)$ representa el lazo abierto, entonces:

$$G(z) = G_D(z)Z(G_n(s)G_p(s)) = \frac{Kz}{z-1} \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

Si $T=1$

$$G(z) = \frac{0.6321Kz}{(z-1)(z-0.3679)}$$

LGR para Sistemas Discretos

- Punto de partida del eje real

$$1 + KG(z) = 0$$

$$1 + \frac{K0.6321z}{(z-1)(z-0.3679)} = 0$$
$$K = \frac{-z^2 + 1.36z + 0.36}{0.623z}$$

$$\frac{dK}{dz} = \frac{-z^2 + 0.36}{0.623z^2} = 0 \quad \Rightarrow z = \pm 0.6$$

LGR para Sistemas Discretos

- Corte en el eje imaginario (Para LGR discreto y no para estabilidad)

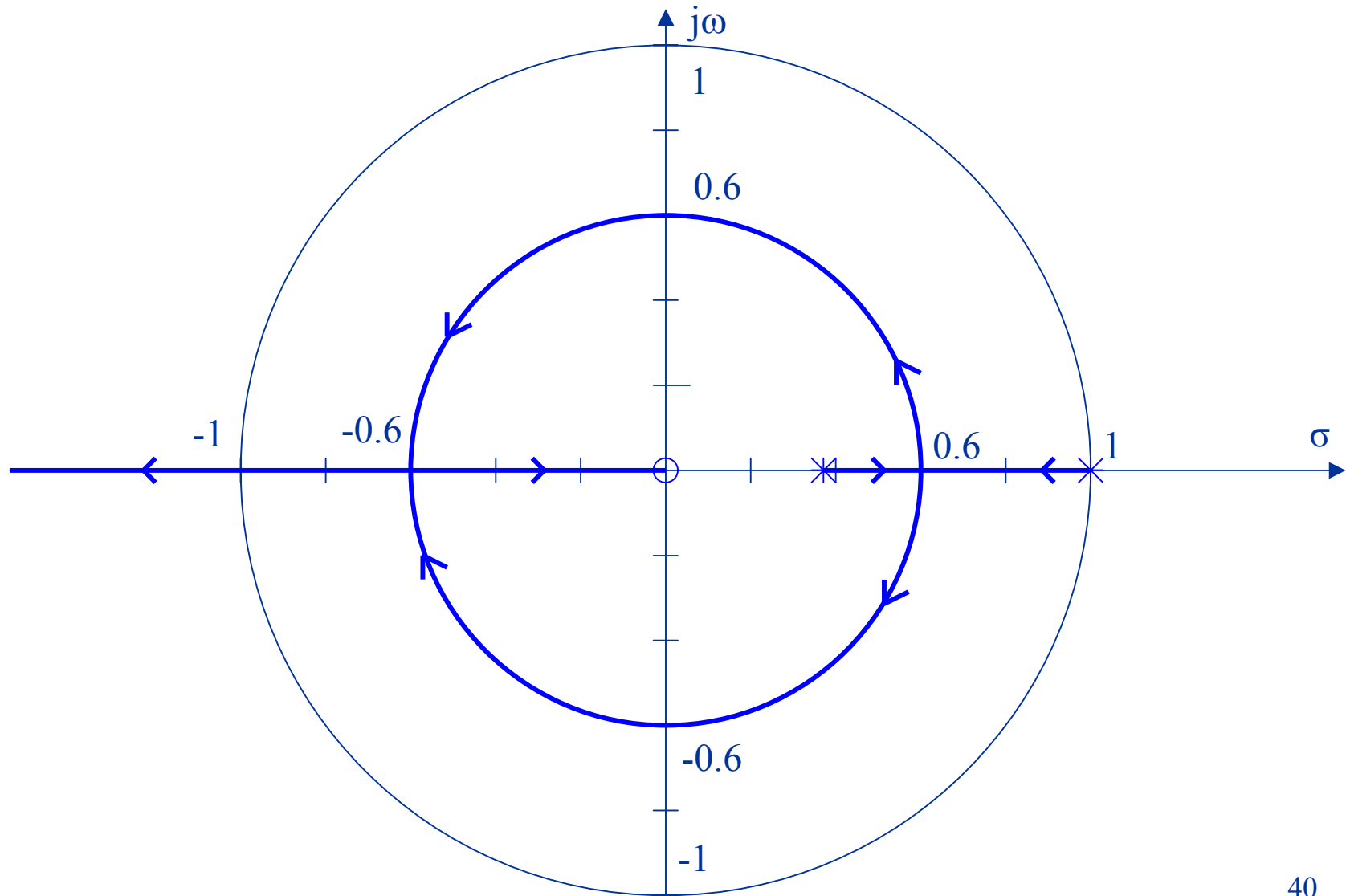
$$1 + \frac{K0.6321z}{(z-1)(z-0.3679)} = 0$$

$$z^2 - 1.36z + 0.36 + 0.63Kz = 0$$

$$\text{Si } z = j\omega \quad (j\omega)^2 - 1.36j\omega + 0.36 + 0.63Kj\omega = 0$$

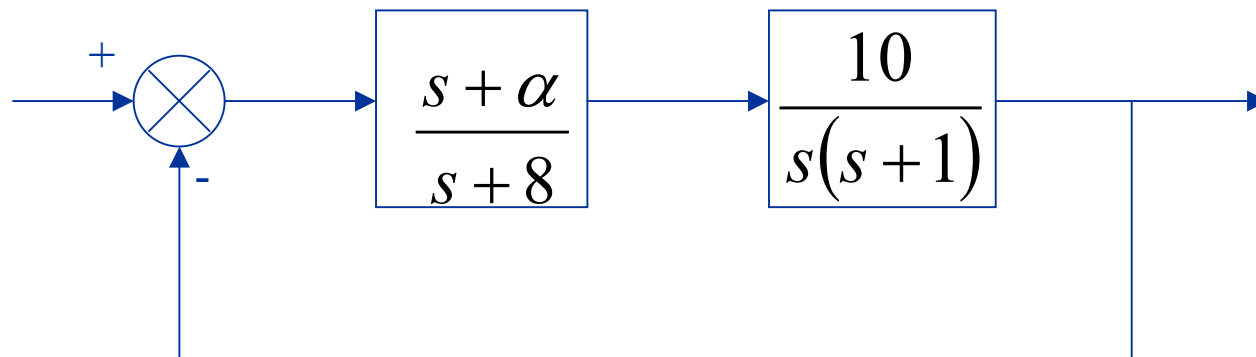
$$\omega^2 + 0.36 = 0 \quad \Rightarrow \omega = \pm 0.6j$$

LGR para Sistemas Discretos



Diseño de Controladores con LGR

- Ejemplo: Determine el valor de α tal que la relación de amortiguamiento ξ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5.



$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{10(s + \alpha)}{s(s + 1)(s + 8) + 10(s + \alpha)}$$

- Ecuación característica: $s(s + 1)(s + 8) + 10(s + \alpha) = 0$
 $s^3 + 9s^2 + 18s + 10\alpha = 0$

$$1 + \frac{10\alpha}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

- Si $K = 10\alpha \Rightarrow \boxed{1 + \frac{K}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0}$

- Polos: $s=0$, $s=-3$, $s=-6$.
- El LGR sobre el eje real existe entre $(-\infty, -6)$ y entre $(-3, 0)$.
- Como no tenemos ceros, habrán tres asíntotas. $\#p - \#z = 3$.
- Punto de partida de las asíntotas:

$$\frac{\sum p - \sum z}{\#p - \#z} = \frac{-6 - 3}{3 - 0} = -3$$

- Ángulo de las asíntotas:

- $\lambda=0 \Rightarrow 60^\circ$
- $\lambda=1 \Rightarrow 180^\circ$
- $\lambda=2 \Rightarrow 300^\circ$

$$\frac{180^\circ(2\lambda + 1)}{\#p - \#z}$$

- Cruce con el eje imaginario (K crítico). Aplicando Routh-Hurwitz.

– s^3	1	18
– s^2	9	K
– s^1	$\frac{162 - K}{9}$	0
– s^0	K	

- $K < 162$
- $K > 0$

$$\Rightarrow K \text{ crítico} = 162$$

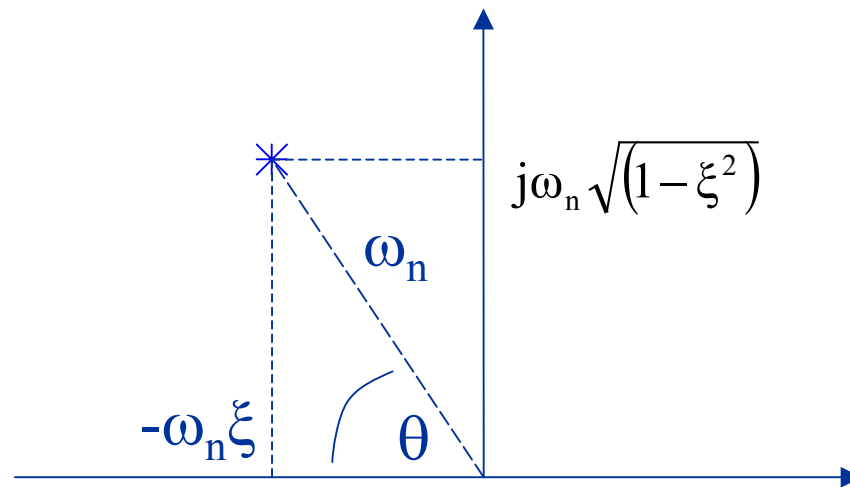
- Punto de salida del eje real.

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{G(s)} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(-\left(s^3 + 9s^2 + 18s \right) \right) &= 0 \\ \Rightarrow -3s^2 - 18s - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 + 6s + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s = -4.73 \quad (\text{no hay LGR})$$

$$s = -1.27 \quad (\text{punto de salida})$$



- Si $\xi=0.5$, entonces $\theta=\cos^{-1}(\xi) = 60^\circ$
- Polos dominantes = $-1 \pm 1.72j$
- Aplicando condición de magnitud

$$|KG(s)| = 1$$

$$\left| \frac{K}{s^3 + 9s^2 + 18s} \right|_{s=-1 \pm 1.72j} = 1 \Rightarrow K = 28 \Rightarrow \alpha = 2.8$$

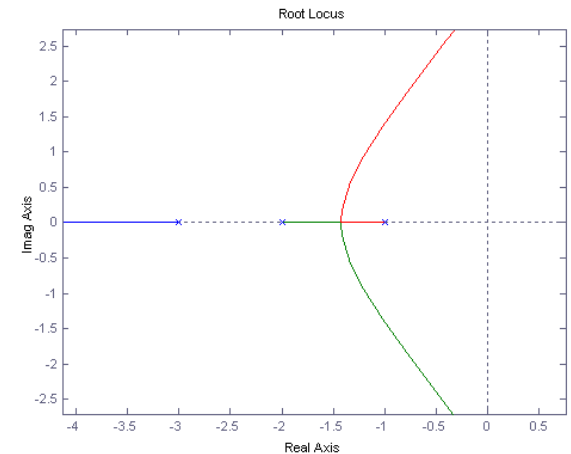
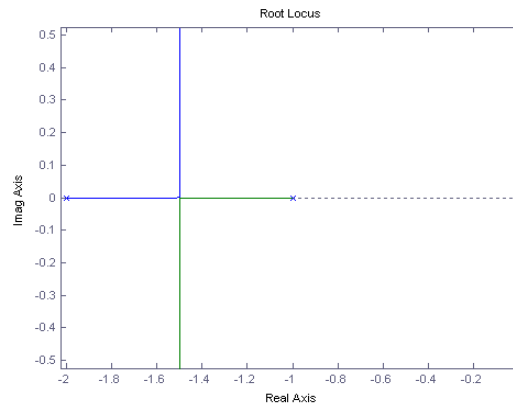
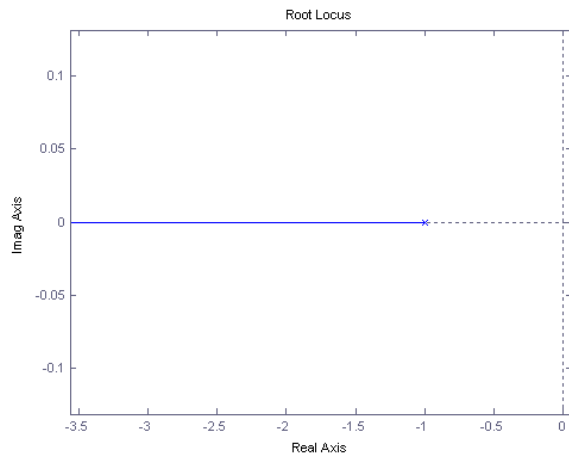
Diseño de Controladores utilizando Lugar Geométrico de las Raíces

Diseño de Controladores con LGR

- Se realiza a partir de la especificación de ξ y ω_n para un par de polos dominantes.
- En primer lugar se debe entender el efecto de añadir polos y ceros en la función de transferencia de lazo abierto.

Diseño de Controladores con LGR

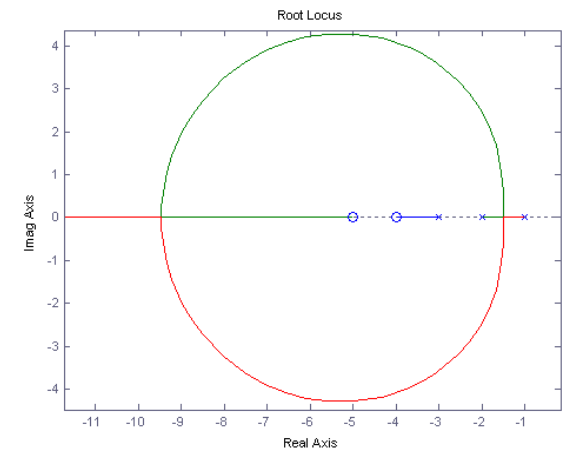
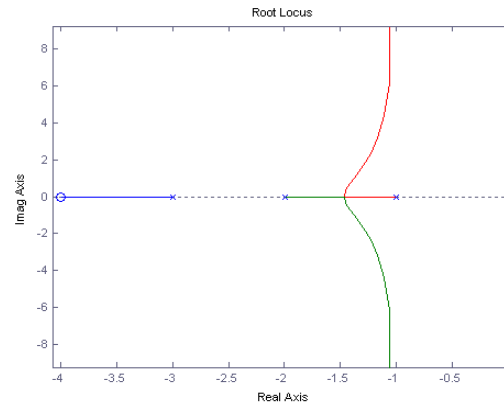
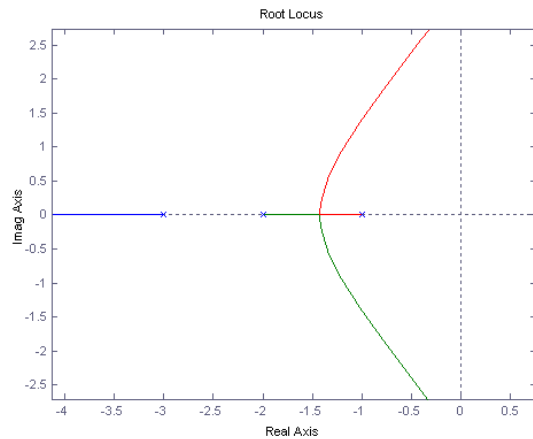
- Efecto de la adición de polos



- El LGR se mueve a la derecha, disminuyendo la estabilidad relativa y aumentando el tiempo de estabilización.

Diseño de Controladores con LGR

- Efecto de la adición de ceros



- El LGR se mueve a la izquierda, el sistema se vuelve más estable y disminuye el tiempo de estabilización.

Diseño de un Controladores de Adelanto utilizando LGR

- 1) Trace el LGR del sistema no compensado, ubicando los polos dominantes deseados del sistema.
- 2) Determine el ángulo deseado del sistema compensado en base a las especificaciones del problema. A continuación determine el ángulo ϕ necesario para que el sistema no compensado cumpla con las especificaciones de diseño.

Diseño de un controlador de adelanto utilizando LGR

3) Fijando entonces el compensador de adelanto como

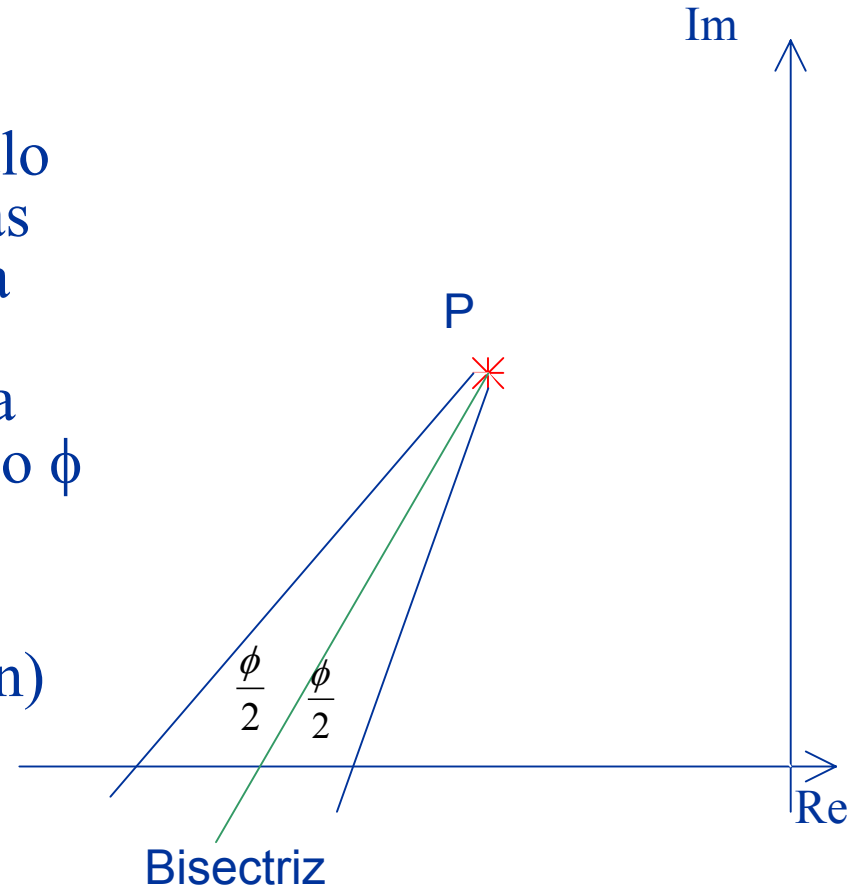
$$G_C(s) = K_C \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

4) Luego, corresponde fijar la posición del polo y del cero del controlador. Para esto, se fija una línea que parta desde el origen hasta el punto P, el cual corresponde a la posición del polo deseado, y desde éste se traza una línea horizontal en sentido negativo.

Diseño de un controlador de adelanto utilizando LGR

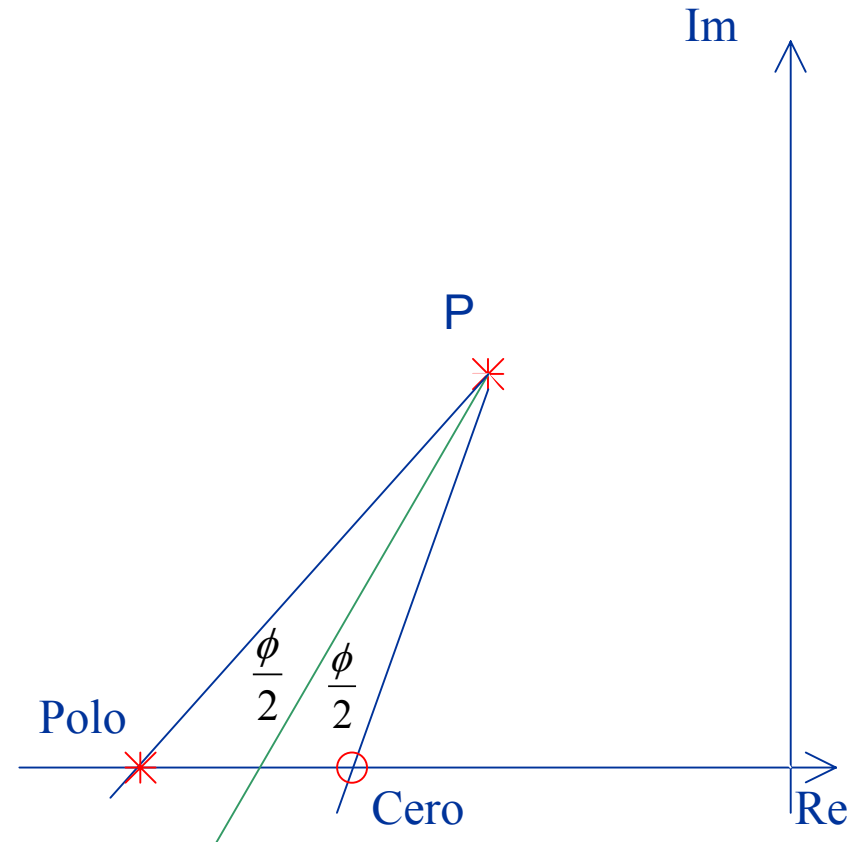
- 5) Se dibuja la bisectriz del ángulo formado por las líneas trazadas anteriormente. De modo que a cada lado de la bisectriz se agrega un ángulo cuya medida será igual a la mitad del ángulo ϕ calculado antes.

(Existen otras soluciones también)



Diseño de un controlador de adelanto utilizando LGR

- 6) Luego, los puntos del eje real que se intersectan con las líneas de los ángulos corresponderán a la posición de polo y del cero del controlador de adelanto. Con esto se hará cumplir la condición de ángulo del LGR.



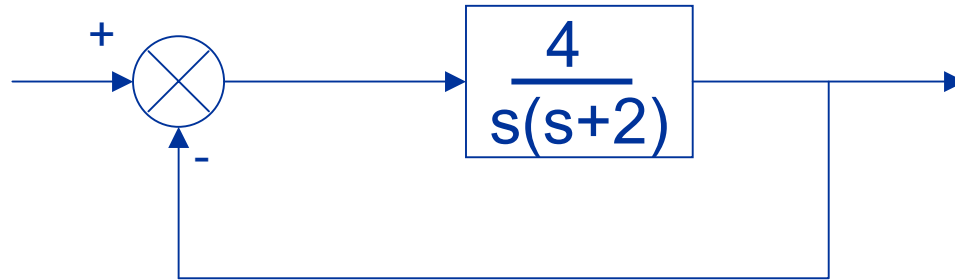
Diseño de Controlador de Adelanto utilizando LGR

- 7) Entonces el valor del polo permitirá calcular T , mientras que con el cero y T se podrá calcular α .
- 8) Finalmente, para calcular el valor de K en la red de adelanto, se usará la condición de magnitud del LGR, donde que el módulo del sistema controlado deberá ser igual a 1.

$$\left| K \alpha \frac{1 + Ts}{\alpha Ts + 1} \right| |G(s)|_P = 1$$

Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

- Ejemplo:



Ecuación de lazo cerrado del sistema no controlado:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Polos del sistema no controlado: $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$

Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

Para este sistema, $\xi = 0.5$, $\omega_n = 2$.

Mientras que la constante de error estático $K_v = 2$.

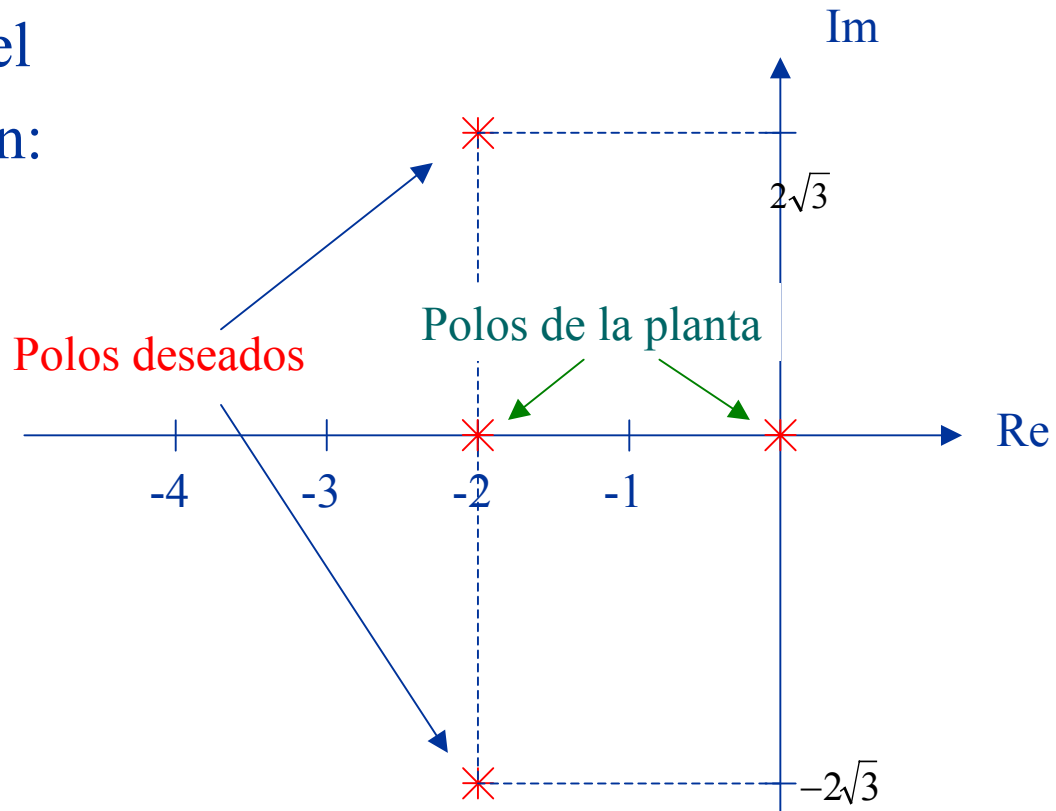
Se desea diseñar un controlador de modo que los polos del lazo cerrado conserven su razón de amortiguamiento ($\xi = 0.5$) y tengan una velocidad angular $\omega_n = 4$.

Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

Los polos deseados del sistema controlado son:

$$s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

Entonces, primero se debe calcular el ángulo de la planta en el polo del lazo cerrado.



Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

$$\angle G(s)\Big|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = \angle \frac{4}{s(s+2)}\Big|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210^\circ$$

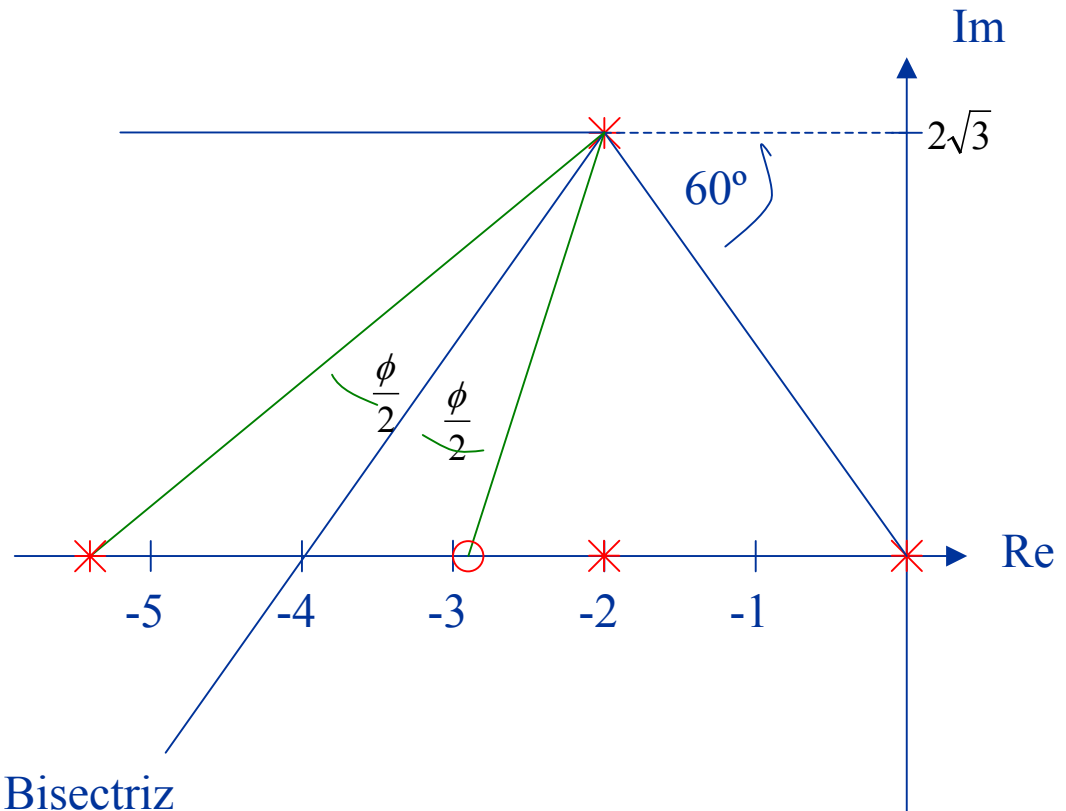
Por lo tanto, el ángulo ϕ que el controlador de adelanto debe aportar será $-180^\circ + 210^\circ = 30^\circ$.

A continuación, se deben ubicar el cero y el polo del controlador usando el ángulo $\phi/2$.

Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

Como $\phi = 30^\circ$, se colocará un ángulo de 15° a cada lado de la bisectriz, de modo de indicar la posición del polo y el cero del controlador de adelanto.

(existen también otras soluciones)



Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

Por lo tanto, del dibujo se aprecia que la posición de polo es $s = -5.4$ y la del cero es $s = -2.9$.

Luego, el controlador de adelanto se podrá escribir como:

$$G_C(s) = K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K \frac{s + 2.9}{s + 5.4}$$

Donde $T=0.345$, $\alpha=0.185$

Diseño de Controladores de Adelanto utilizando LGR

Finalmente, sólo falta calcular K del controlador de adelanto, para lo cual se usa la condición de magnitud del LGR.

$$\left| K \left(\frac{s + 2.9}{s + 5.4} \right) \left(\frac{4}{s(s + 2)} \right) \right|_{s = -2 + j2\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow K = 4.68$$

$$\Rightarrow G_C(s) = 4.68 \left(\frac{s + 2.9}{s + 5.4} \right)$$

Procedimiento de Diseño para Controladores de Atraso utilizando LGR.

1) Trace el LGR para el sistema no compensado $G(s)$ con las especificaciones de respuesta transitoria, ubique los polos dominantes del LGR.

2) Compensador $G_c(s) = K_c \beta \frac{T_s + 1}{\beta T_s + 1}$

Calcule $G_c(s)G(s)$

Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

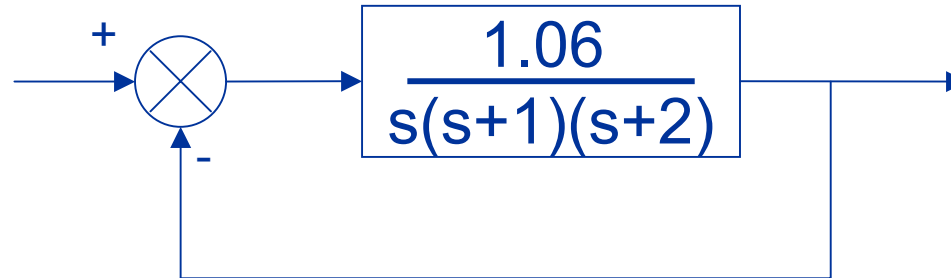
- 3) Calcule la constante de velocidad estática especificada.
- 4) Determine la magnitud de aumento del coeficiente de error estático para satisfacer requerimientos.
- 5) Determine el polo y el cero del $G_c(s)$ que produce el aumento necesario del coeficiente de velocidad estática, sin alterar mucho el LGR.

Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

- 6) Trace un nuevo LGR para el sistema compensado.
Ubique los polos dominantes el lazo abierto.
- 7) Ajuste la ganancia K_c del compensador partiendo de la condición de magnitud tal que los polos dominantes del lazo cerrado queden en las ubicaciones deseadas.

Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

- Ejemplo:



Ecuación de lazo cerrado del sistema no controlado:

$$\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)+1.06}$$

Polos dominantes: $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$

Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

Para este sistema, $\xi = 0.5$, $\omega_n = 0.67$.

Mientras que la constante de error estático $K_v = 0.53$.

Se desea incrementar K_v hasta casi $5 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ sin cambiar de forma notable la ubicación de los polos dominantes en el lazo cerrado.

Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

El compensador de atraso se puede escribir como:

$$G_C(s) = K_C \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T\beta}}$$

Para aumentar K_v en un factor 10, se selecciona $\beta=10$, de modo que si elegimos el cero en $s = -0.05$, entonces el polo quedará ubicado en $s = -0.005$.

El ángulo que aporta este controlador cerca de un polo dominante es pequeño, alrededor de 4° .

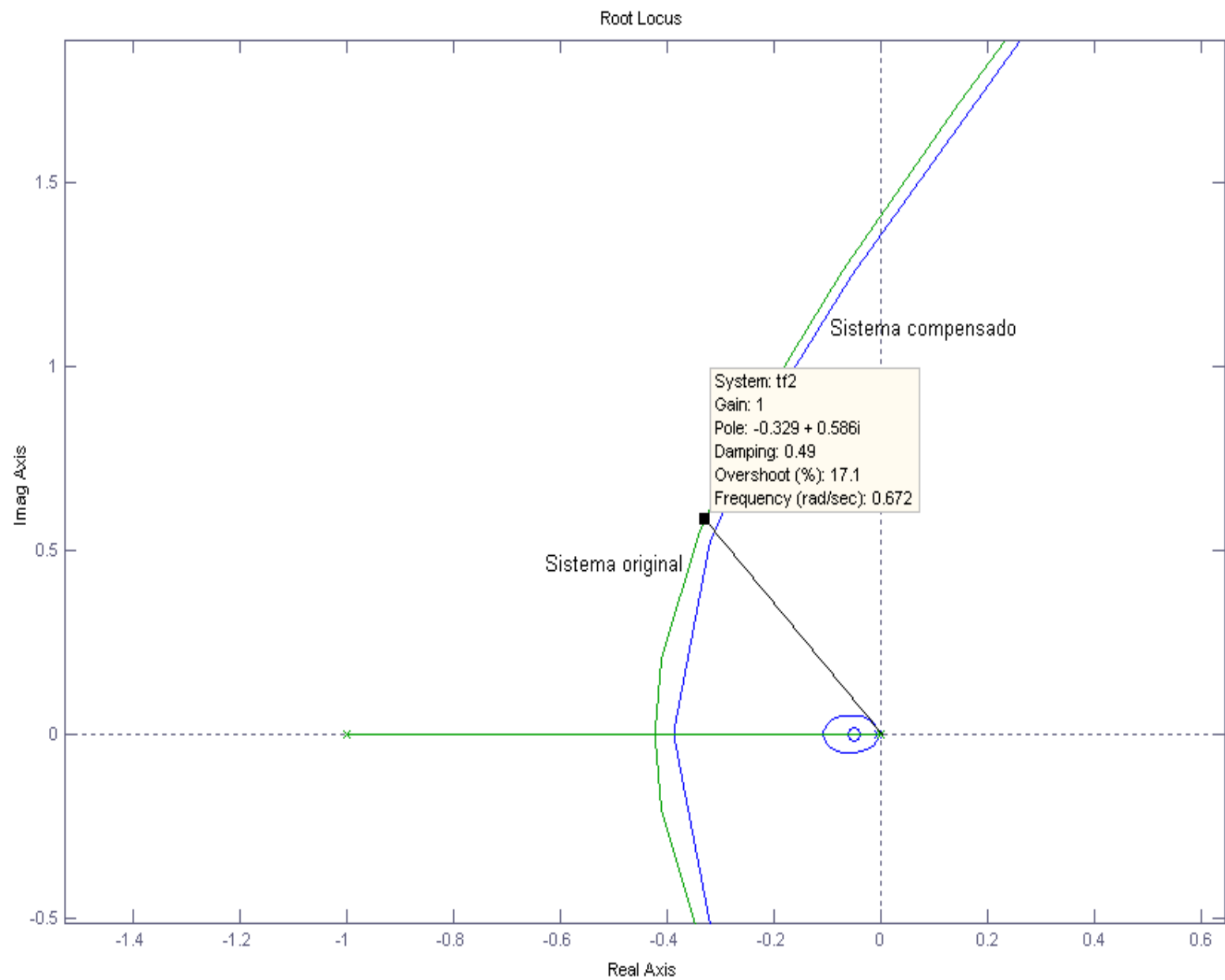
Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema compensado tendrá la forma de:

$$G_C(s)G(s) = K_C \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Si $K = 1.06K_C$

$$G_C(s)G(s) = K \frac{s + 0.05}{s(s + 1)(s + 2)(s + 0.005)}$$



Diseño de Controladores de Atraso utilizando LGR

Para esta configuración, los polos dominantes son:

$$s_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$$

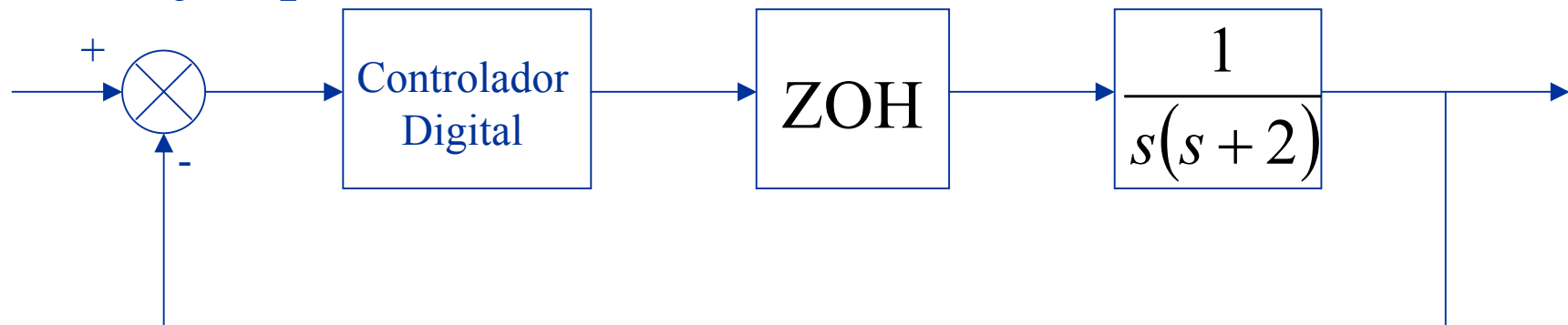
Finalmente, aplicando la condición de magnitud se obtiene el valor de K_C .

$$\left| K_C \frac{1.06(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)} \right|_{s=-0.31+0.55j} = 1$$

$$\Rightarrow K_C = 0.9656$$

Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

- Ejemplo



- Diseñar un controlador digital que posea un $\xi=0.5$, $t_s = 2$ [s] y $T = 0.2$ [s].

Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

Tiempo de asentamiento $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow \omega_n = 4$

$$|z| = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.4} = 0.6703$$

$$\angle z = T\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0.2 \cdot 4 \sqrt{1 - 0.25} = 0.6927 [rad]$$

$$z = 0.5158 + j0.4281$$

Polos dominantes:

Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

Discretizando la planta por medio de un retenedor de orden cero.

$$G(z) = \text{ZOH} \cdot P(s) = Z \left(\frac{1 - e^{-0.2s}}{s} \left(\frac{1}{s(s+2)} \right) \right)$$
$$\Rightarrow G(z) = \underbrace{\frac{0.01758(z + 0.876)}{(z - 1)(z - 0.6703)}}_{\text{Planta}} \underbrace{K \frac{z + \alpha}{z + \beta}}_{\text{Controlador}}$$

Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

Analizando ahora el
ángulo de desfase ϕ .

$$\Rightarrow \angle G(z)$$

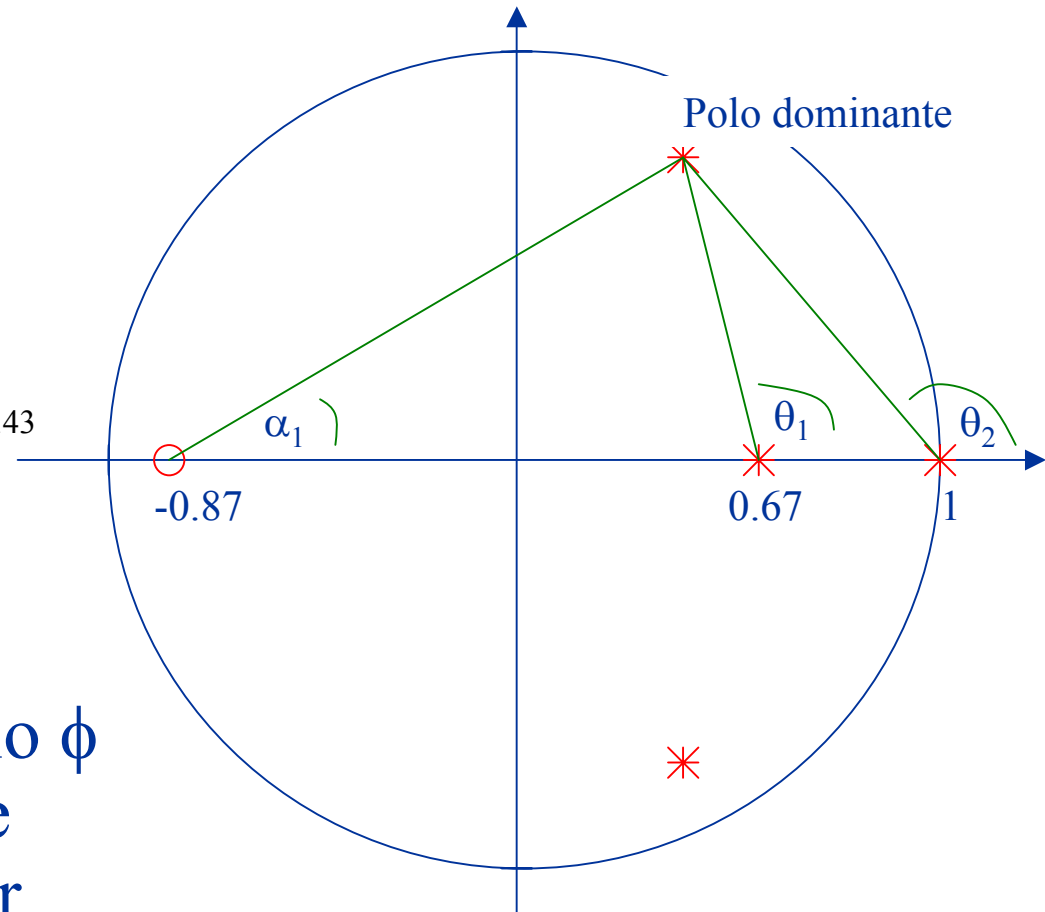
$$= \angle \left. \frac{0.01758(z + 0.876)}{(z - 1)(z - 0.6703)} \right|_{z=0.51+j0.43}$$

$$= \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2$$

$$= 17.10 - 109.84 - 138.52$$

$$= -231.26$$

Por lo tanto, el ángulo ϕ
que el controlador de
adelanto debe aportar
será 51.26°



Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

Por lo tanto, el compensador debe contribuir con 51.26° .

Para simplificar el diseño se propone cancelar uno de los polos de la planta con el cero del controlador.

De este modo, se escoge α del controlador igual a -0.6703 , así se simplifica el cálculo del controlador,

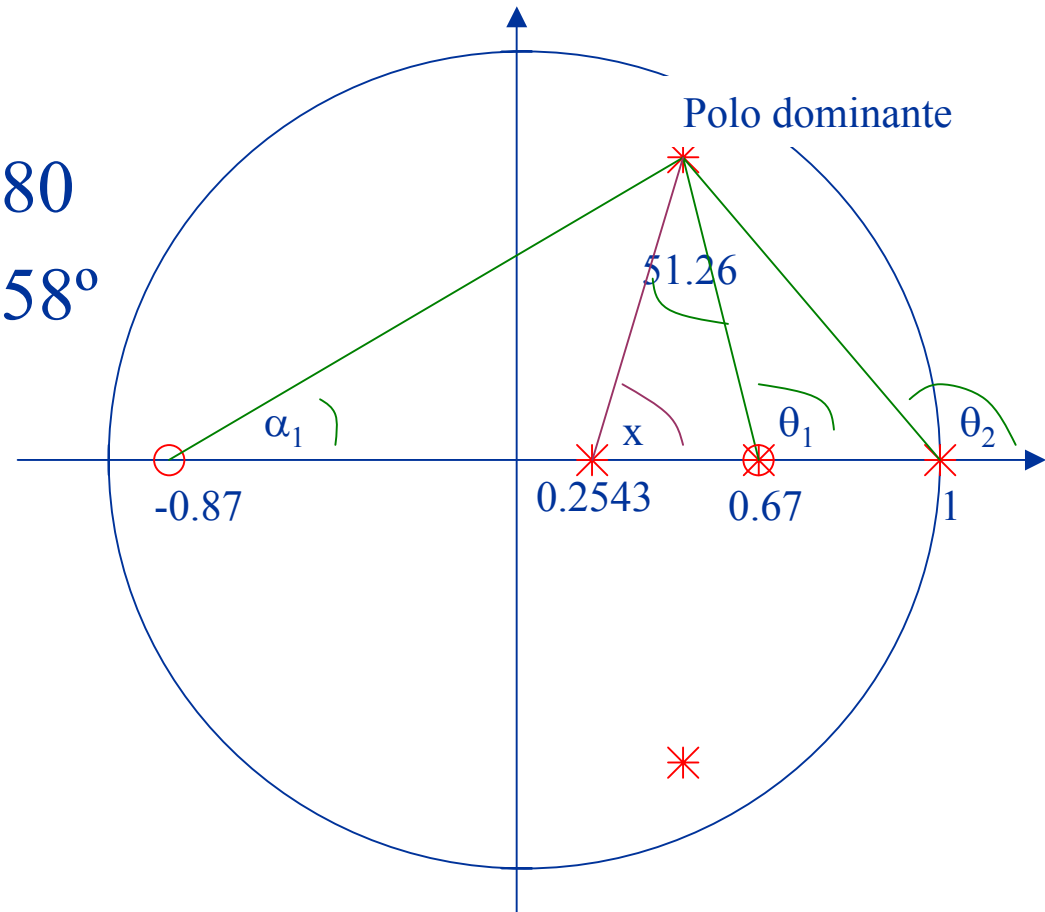
Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

$$\alpha_1 - x - \theta_2 = 180$$

$$17.1^\circ - x - 138.52 = 180$$

$$x = -301.4200 = 58.58^\circ$$

El polo asociado a
este ángulo estará
ubicado en 0.2543.



Diseño de Controladores Discretos utilizando LGR

El controlador discreto será:

$$G_d(z) = K \frac{z - 0.6703}{z - 0.2543}$$

Aplicando ahora la condición de magnitud del LGR
para obtener K .

$$|G_d(z)G(z)| = \left| K \frac{z - 0.6703}{z - 0.2543} \frac{0.01758(z + 0.876)}{(z - 0.6743)(z - 1)} \right|_{z=0.5158 \pm j0.4281} = 1$$

$$\Rightarrow K = 12.67$$