

EL 42D

Control de Sistemas

Profesora: Dra. Doris Sáez H.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

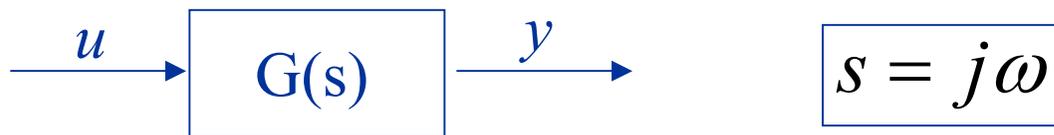
Unidad 4:

Técnica de Control

en el Dominio de la Frecuencia

Elaborado por: D. Sáez
Colaboradores: G. Sáez & S. Sippa

Análisis en Frecuencia



Si $u(t) = A \sin(\omega_0 t) \longrightarrow y(t) = B \sin(\omega_0 t + \alpha)$

amplitud frecuencia amplitud frecuencia

$$B = A|G(j\omega)| \quad \alpha = \angle G(j\omega)$$

Análisis en Frecuencia

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{\underbrace{\omega^2 T^2 + 1}_{X(\omega)}} - j \frac{K\omega T}{\underbrace{1 + \omega^2 T^2}_{R(\omega)}}$$

Análisis en Frecuencia

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

si

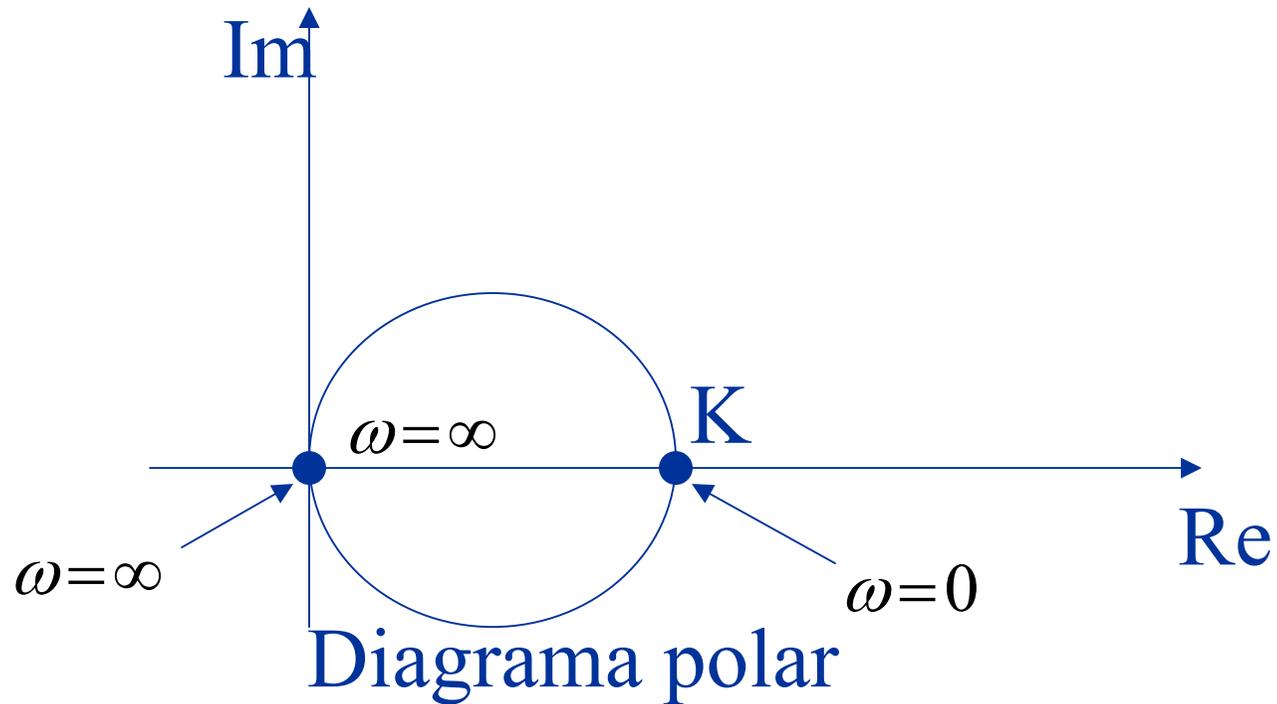
$$\omega = 0 \rightarrow G(0) = K_p$$

$$\omega = \infty \rightarrow G(\infty) = 0$$

$$\omega \neq 0 \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{j\omega + 1}$$

Análisis en Frecuencia

Diagrama polar



Análisis en Frecuencia

Caso general

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

↑
real

↑
imaginario

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

$$\phi(j\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$$

Diagrama de Bode

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

$[d_B]$

Ganancia logarítmica

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

Diagrama de Bode

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10} \left| \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega T)^2}} \right| = -10 \log(1 + (\omega T)^2)$$

Diagrama de Bode

Si

$$\left. \begin{aligned} \omega \ll \frac{1}{T} &\rightarrow A(\omega) = -10 \log(1) = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \frac{1}{T} &\rightarrow A(\omega) = -20 \log(\omega T) \\ \omega = \frac{1}{T} &\rightarrow A(\omega) = -10 \log(2) = -3 \text{ dB} \end{aligned} \right\} \omega = \frac{1}{T}$$

frecuencia de corte

Diagrama de Bode

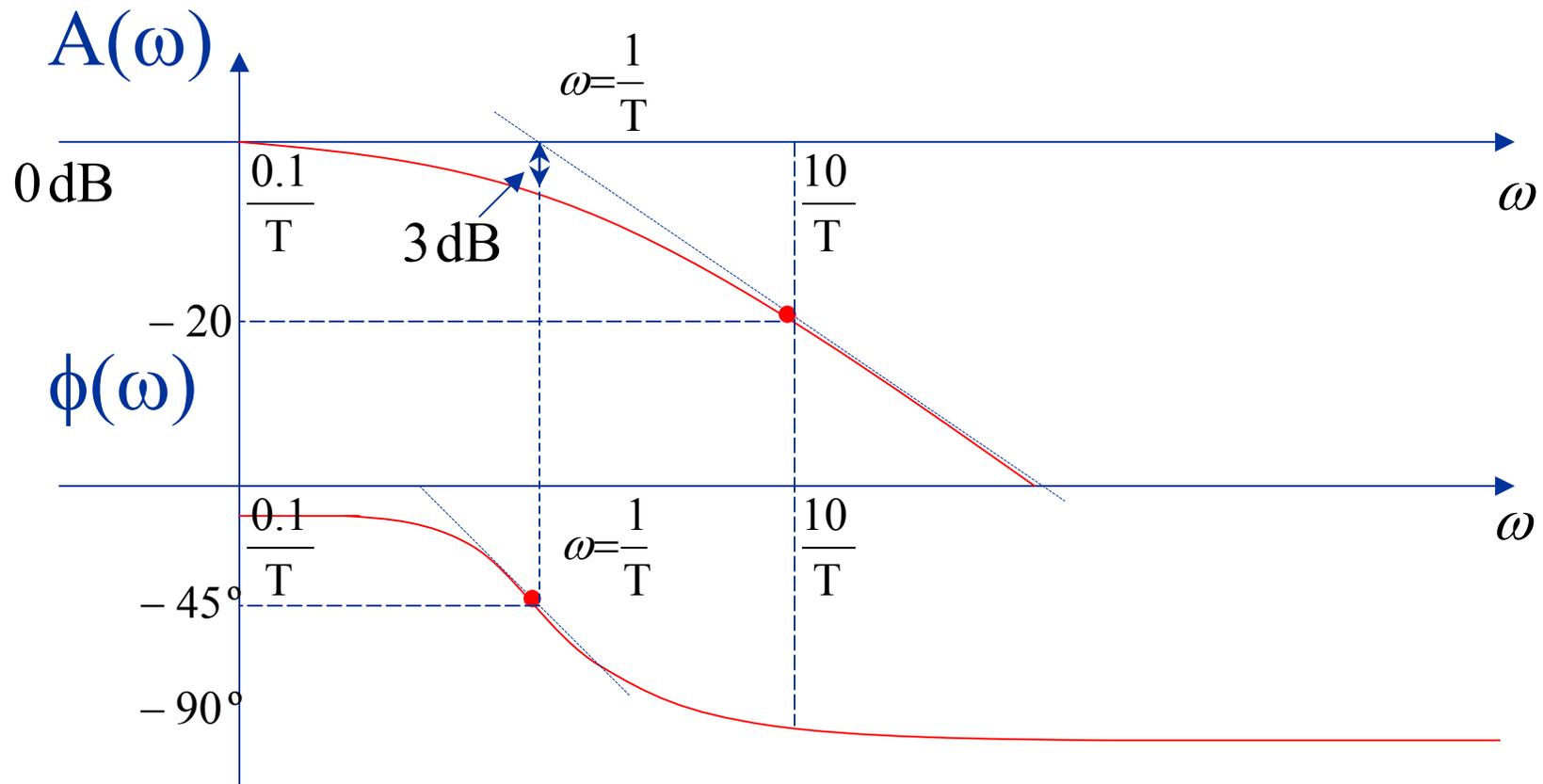


Diagrama de Bode

Definiciones:

En los diagramas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas.

- Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$, en donde ω_1 es cualquier frecuencia
- Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$, en donde, ω_1 es cualquier frecuencia.

Diagrama de Bode

Construcción de Diagrama de Bode

Factores básicos de $G(j\omega)$

Ganancias K.

1. Factores de integral y de derivada $(j\omega)^{\pm 1}$
2. Factores de primer orden $(1 + j\omega)^{\pm 1}$
3. Factores cuadráticos $\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

Diagrama de Bode

1. Ganancia K $G(j\omega) = K$

$$A(\omega) = 20 \log K [dB]$$

$$\phi(\omega) = 0$$

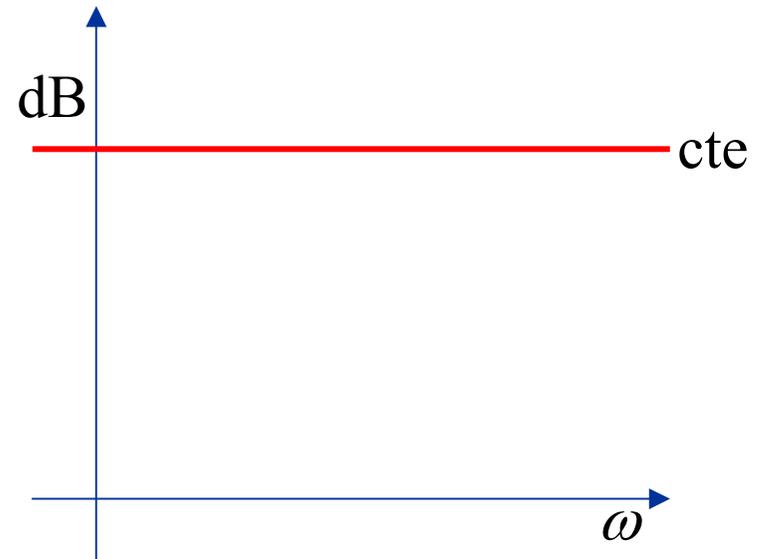
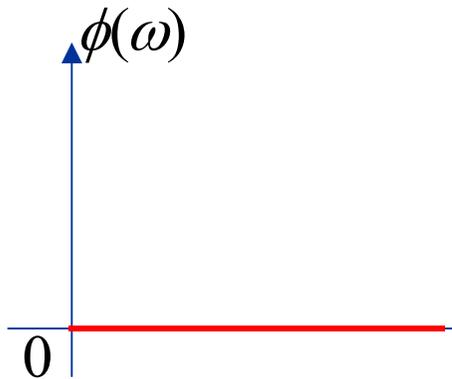


Diagrama de Bode

2. Factores de de integral y de derivada $(j\omega)^{\pm 1}$
(polos y ceros en el origen).

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log(\omega) \text{ [dB]} \quad \text{pendiente} = -20 \frac{dB}{dec}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

Diagrama de Bode

Polo en el origen

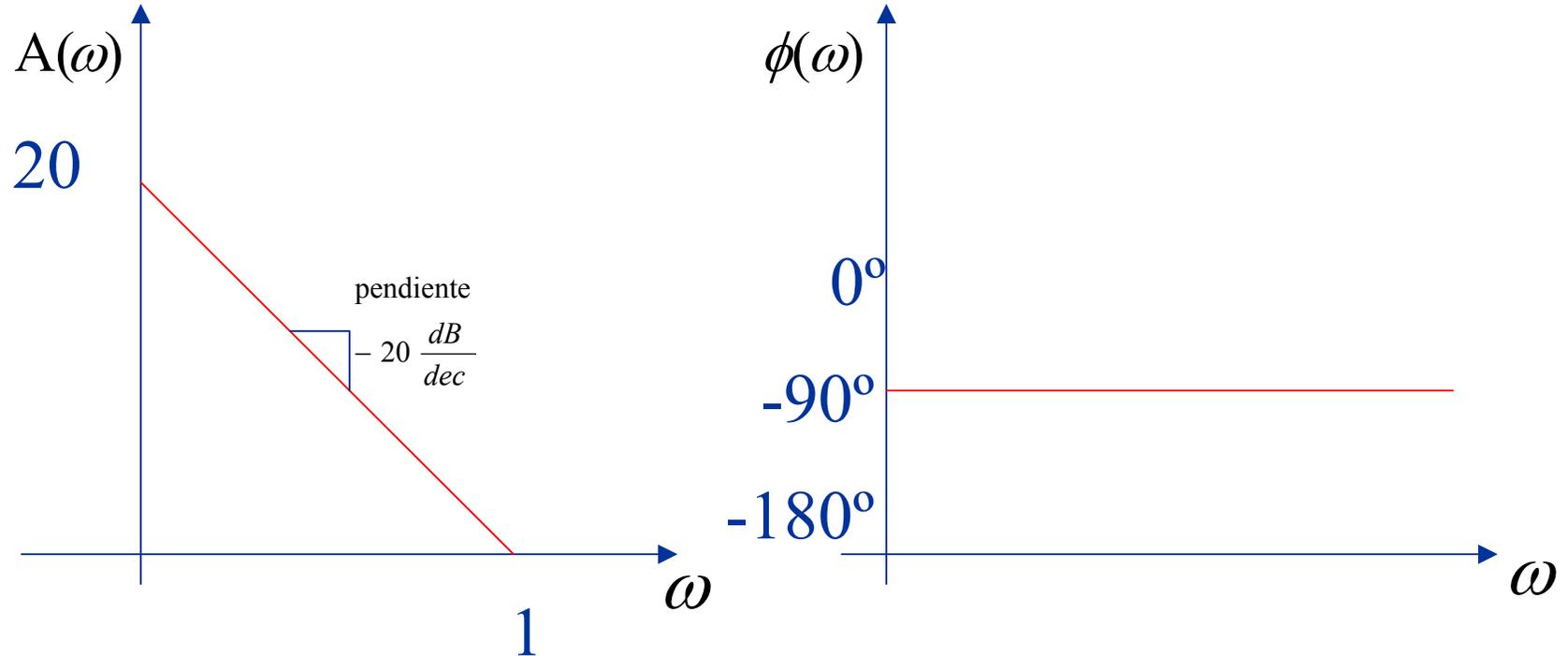


Diagrama de Bode

Polos en origen múltiples: $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| = -20N \log(\omega) \text{ [dB]}$$

$$\phi(\omega) = -90N$$

$$\text{pendiente} = -20N \frac{dB}{dec}$$

Diagrama de Bode

Cero en origen $G(j\omega) = j\omega$

$$A(\omega) = 20 \log|j\omega| = 20 \log(\omega) [dB]$$

$$\phi(\omega) = 90^\circ$$

$$pendiente = 20 \frac{dB}{dec}$$

Diagrama de Bode

Cero en el origen

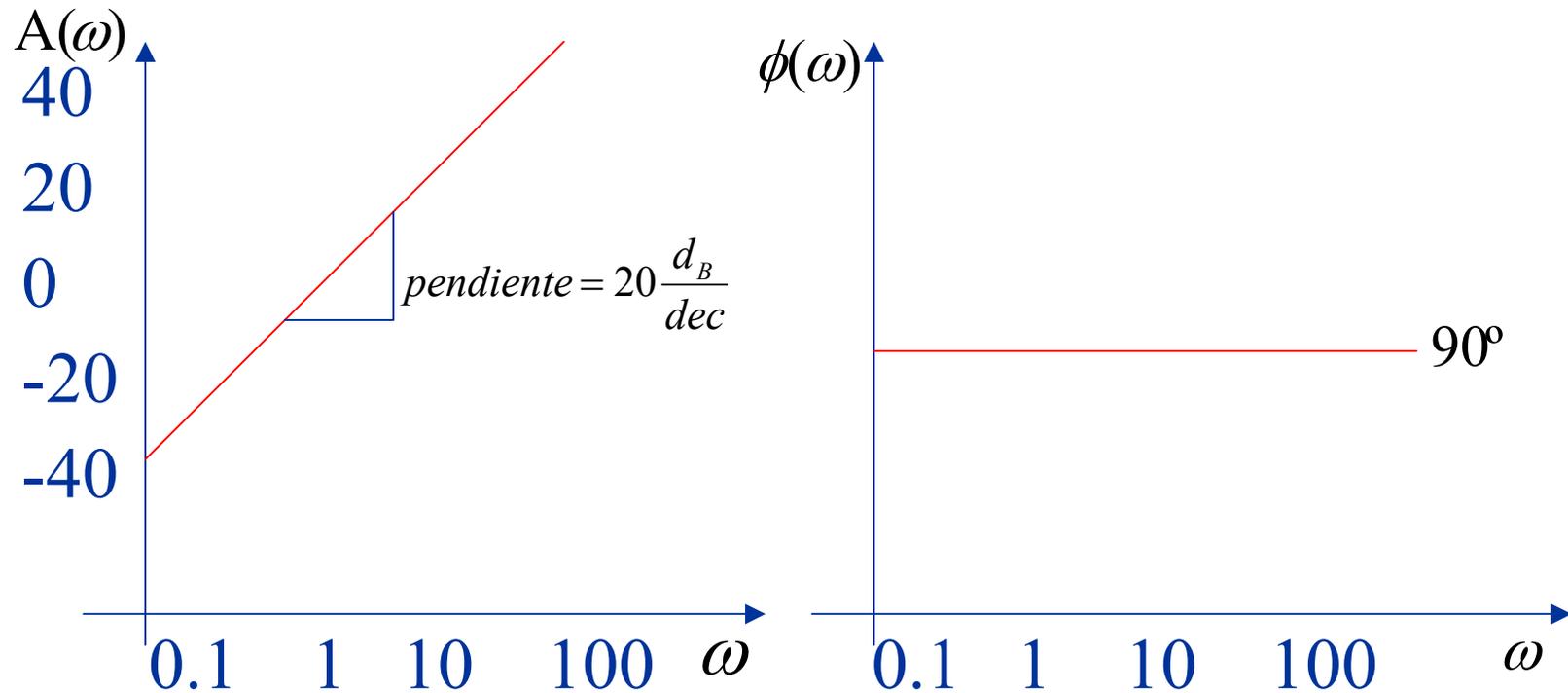


Diagrama de Bode

Ceros en origen múltiples $G(j\omega) = (j\omega)^N$

$$A(\omega) = 20 \log |(j\omega)^N| = 20N \log(\omega) [dB]$$

$$\phi(\omega) = 90N$$

$$\text{pendiente} = 20N \frac{dB}{dec}$$

Diagrama de Bode

$$\text{Ej: } 20 \log |(j\omega)^2| = 40 \log(\omega)$$

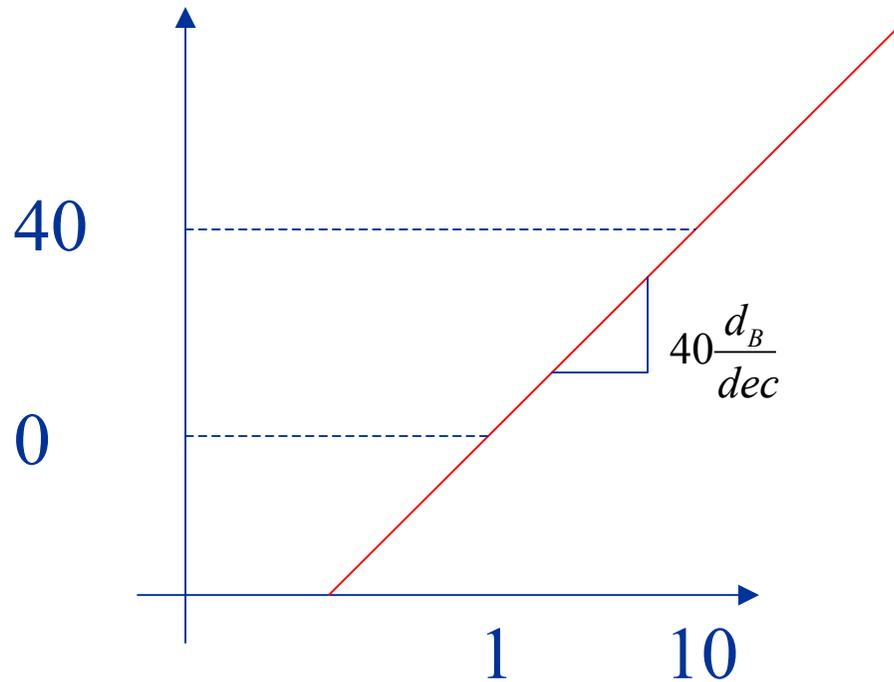


Diagrama de Bode

3. Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$
(Polos o ceros en eje real)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right)$$

Diagrama de Bode

- Polo en el eje real

$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(\omega T) \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ$$

Diagrama de Bode

Angulo de fase exacto del factor $\frac{1}{1 + j\omega T}$ es:

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

si $\omega = \frac{1}{T}$ $\phi = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$

y $A(\omega) = -20 \log(\sqrt{2}) = -3 \text{ [dB]}$

Diagrama de Bode

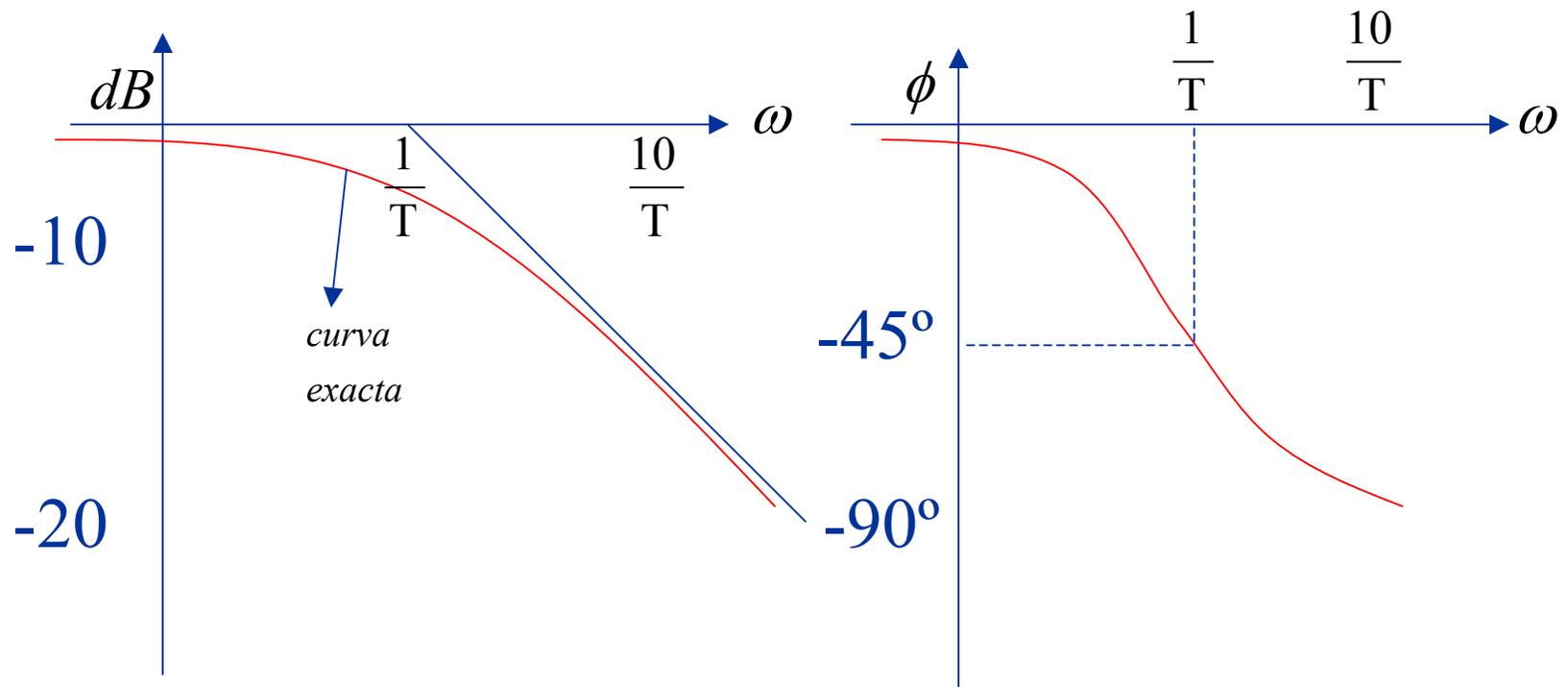


Diagrama de Bode

Cero en eje real:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$A(\omega) = +20 \log|1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

Diagrama de Bode

si

$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = +20 \log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = 20 \log(\omega T) \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = +20 \log(\sqrt{2}) \cong 3 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 45^\circ$$

Diagrama de Bode

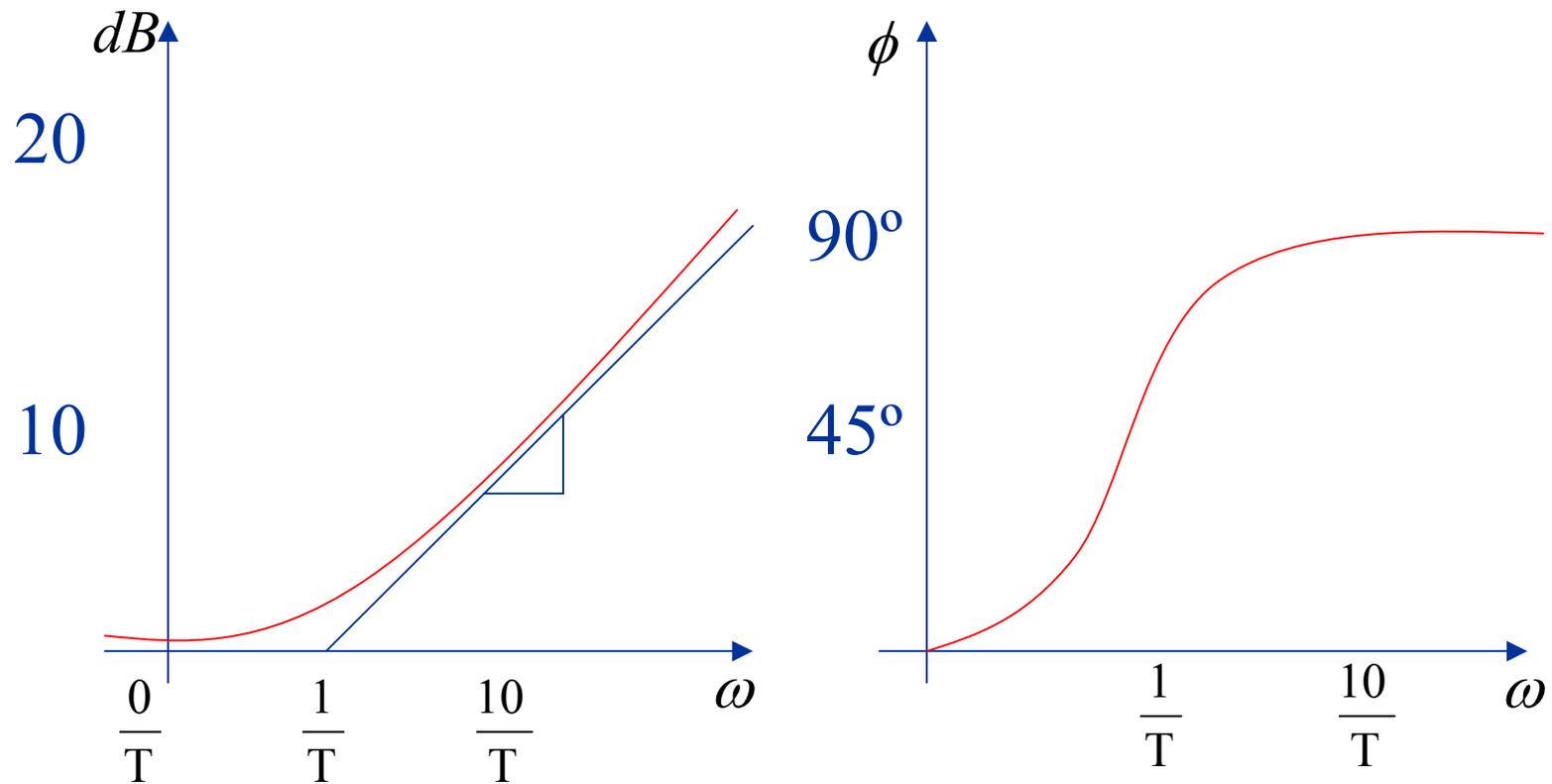


Diagrama de Bode

Factores cuadráticos $\left[1 + 2\xi \frac{\omega j}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$

(polos o ceros complejos conjugados).

Se define $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi uj + (ju)^2} = \frac{1}{1 - u^2 + 2\xi uj}$$

Diagrama de Bode

$\omega = \omega_n$ frecuencia corte

$$A(\omega) = -20 \log \sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2} = -10 \log((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

Diagrama de Bode

Si $u \ll 1 \rightarrow A(\omega) = -10 \log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) \approx 0^\circ$
($\omega \ll \omega_n$)

$u \gg 1 \rightarrow A(\omega) = -10 \log(u^4) = -40 \log(u) \Rightarrow \phi(\omega) \approx -180^\circ$
($\omega \gg \omega_n$)

$u = 1 \rightarrow A(\omega) = -10 \log(4\xi^2)$ punto de resonancia
($\omega = \omega_n$)

$\Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$$

$$\omega \ll \omega_n$$

Diagrama de Bode

Ejemplo:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega + 2)\left((j\omega)^2 + j\omega + 2\right)}$$

Normalizando:

$$G(j\omega) = \frac{7.5\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)\left(\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right)}$$

Diagrama de Bode

Frecuencias de corte: $\omega = 3, \omega = 2, \omega = \sqrt{2}$

Funciones de la F.T.

1) 7.5

2) $(j\omega)^{-1}$

3) $\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)$

4) $\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)^{-1}$

5) $\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1}$

Diagrama de Bode

- Análisis de Fase

$$1) \omega < 7.5 \rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$2) (j\omega)^{-1} \rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ$$

$$3) \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right) \begin{cases} \rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ & \text{si } \omega \ll 3 \\ \rightarrow \phi(\omega) = 90^\circ & \text{si } \omega \gg 3 \end{cases}$$

Diagrama de Bode

- Análisis de Fase

$$4) \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)^{-1} \begin{cases} \rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ & \text{si } \omega \ll 2 \\ \rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ & \text{si } \omega \gg 2 \end{cases}$$

$$5) \left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1} \begin{cases} \rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ & \text{si } \omega \ll \sqrt{2} \\ \rightarrow \phi(\omega) = -180^\circ & \text{si } \omega \gg \sqrt{2} \end{cases}$$

Diagrama de Bode

- Análisis de Magnitud

$$1) 7.5 \rightarrow A(\omega) = 20 \log(7.5) = 17.5 \text{ [dB]}$$

$$2) (j\omega)^{-1} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ [dB]}$$

$$3) \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right) \begin{cases} \rightarrow A(\omega) = 0 \text{ [dB]} & \text{si } \omega \ll 3 \\ \rightarrow A(\omega) = +20 \log\left(\frac{\omega}{3}\right) \text{ [dB]} & \text{si } \omega \gg 3 \end{cases}$$

Diagrama de Bode

- Análisis de Magnitud

$$4) \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)^{-1} \begin{cases} \rightarrow A(\omega) = 0 \text{ [dB]} & \text{si } \omega \ll 2 \\ \rightarrow A(\omega) = -20 \log\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ [dB]} & \text{si } \omega \gg 2 \end{cases}$$

$$5) \left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1} \begin{cases} \rightarrow A(\omega) = 0 \text{ [dB]} & \text{si } \omega \ll \sqrt{2} \\ \rightarrow A(\omega) = -40 \log\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) \text{ [dB]} & \text{si } \omega \gg \sqrt{2} \end{cases}$$

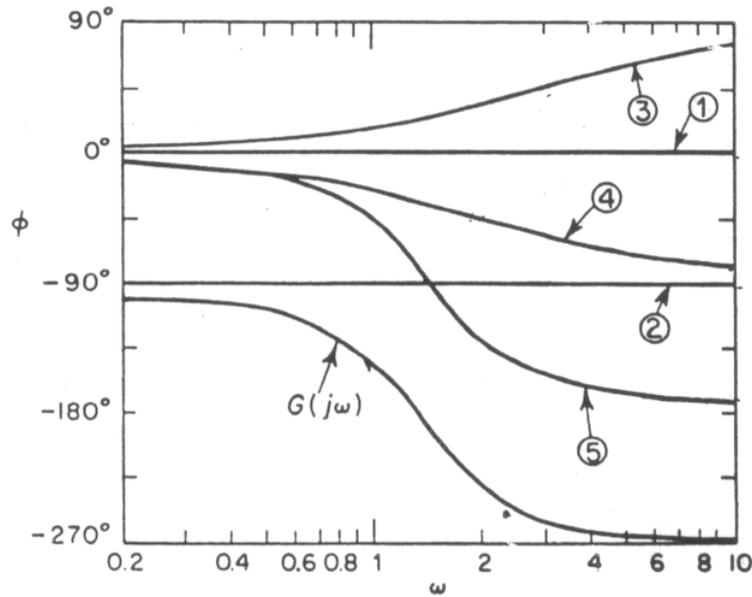
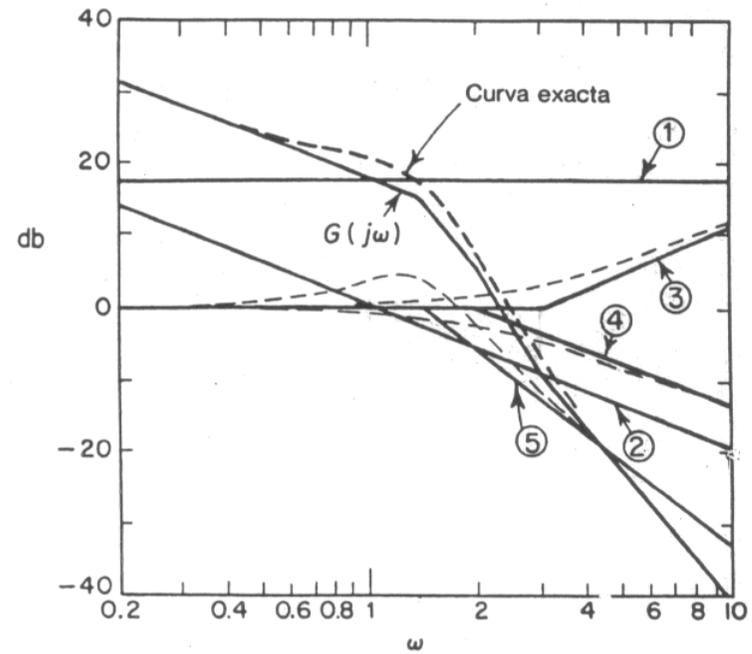


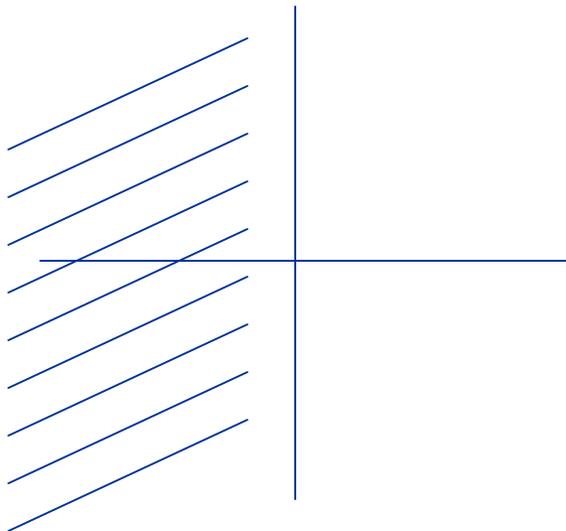
Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Transformación Bilineal:

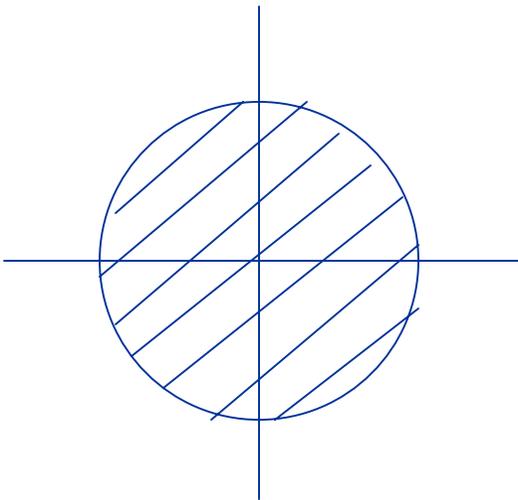
$$Z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}$$

Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Plano s



Plano z



Plano w

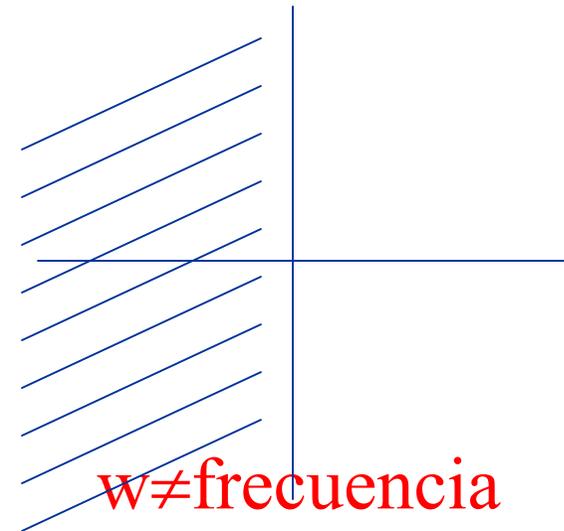


Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Con $G(w) \rightarrow G(j\omega)$ con $w = j\omega$

ω : frecuencia

El diagrama de Bode de $G(j\omega)$ se realiza con el mismo procedimiento que para sistemas continuos.

Diagrama de Bode

Ejemplo:

$$G(z) = \frac{2(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.8187z + 0.8187}$$

$$T = 0.2$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

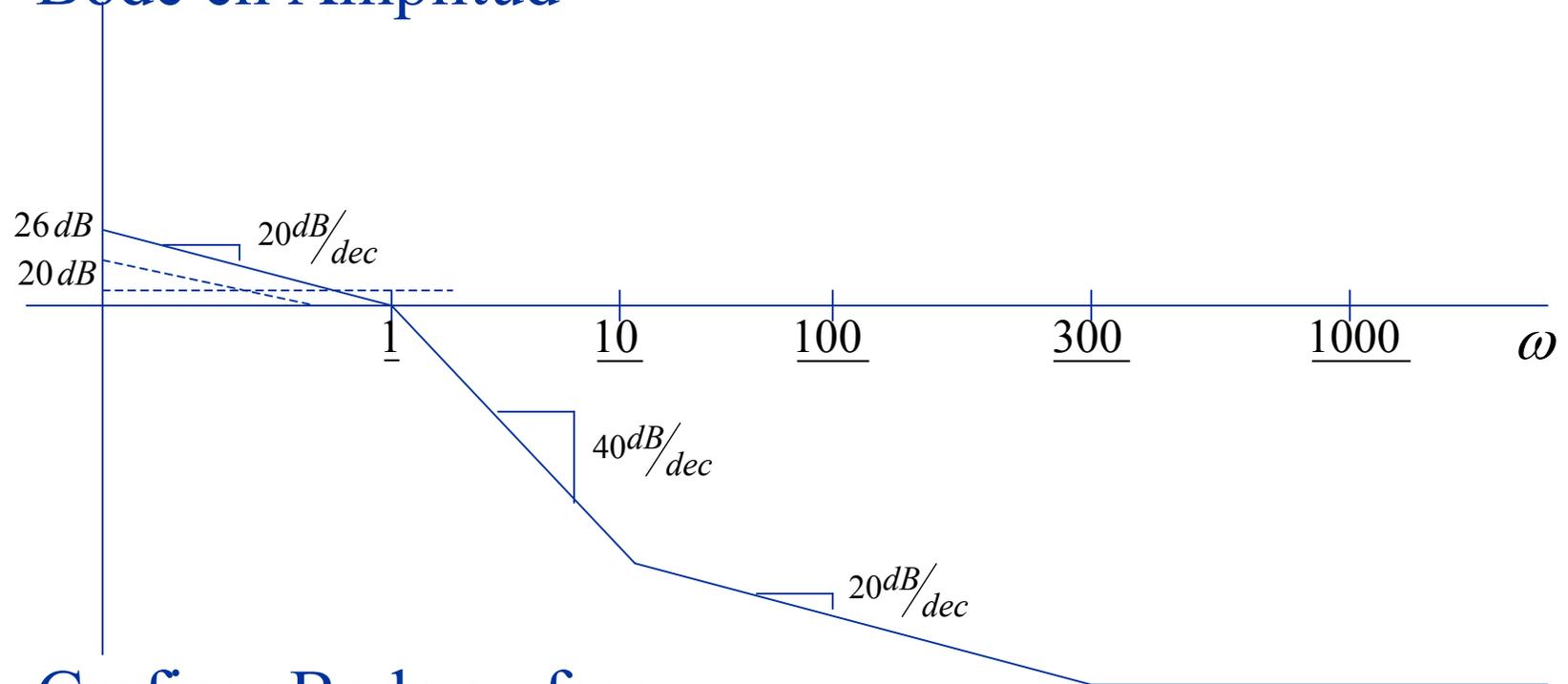
Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

$$\rightarrow G(w) = \frac{2\left(1 + \frac{w}{300}\right)\left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w+1)}$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{2\left(1 + \frac{j\omega}{300}\right)\left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)}{j\omega(j\omega+1)}$$

Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

- Bode en Amplitud



- Graficar Bode en fase

Sistemas de Fase Mínima y de Fase No Mínima

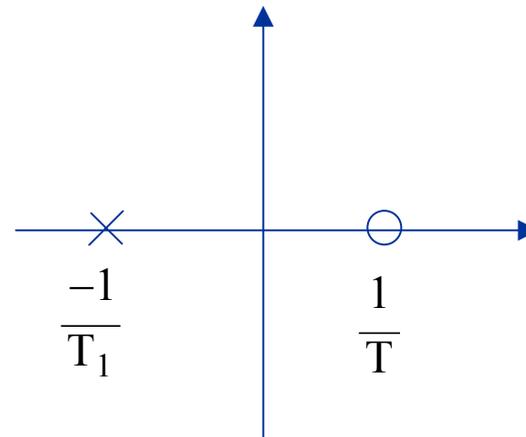
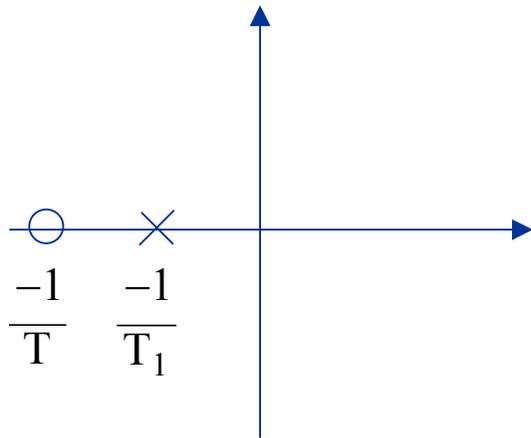
Los funciones de transferencias que no tienen polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de transferencias de fase mínima.

Las funciones de transferencias que tienen polos y/o ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de fase no mínima.

Sistemas de Fase Mínima y de Fase No Mínima

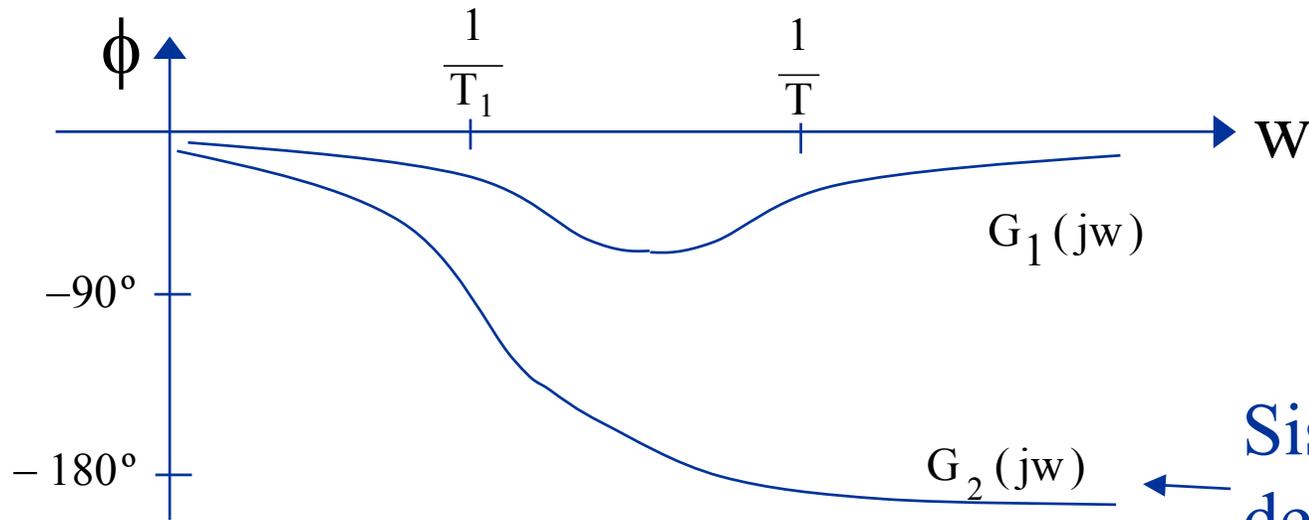
Ejemplos: Fase mínima y fase no mínima

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad 0 < T < T_1$$



Sistemas de Fase Mínima y de Fase No Mínima

Las dos funciones de transferencias tienen la misma característica de magnitud, pero tienen diferente característica de ángulo de fase.



Sistema
de fase no mínima

Sistemas con Retardo

Diagrama de Bode

El retardo tiene un comportamiento de fase no mínima y tiene un atraso de fase excesivo sin atenuación en frecuencias altas.

Páede:
$$\left(e^{-T_d s} = \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2} \right)$$

Retardo:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

Sistemas con Retardo

Diagrama de Bode

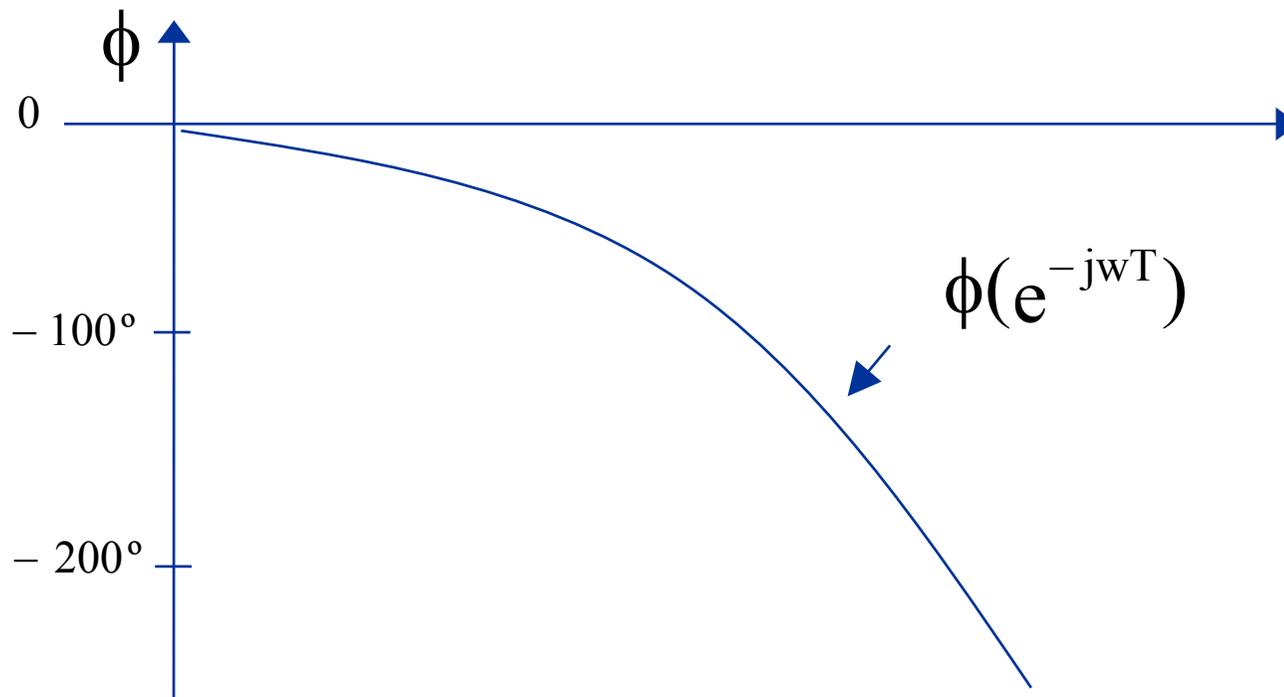
$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\phi(G(j\omega)) = -\omega T \text{ radianes}$$

Sistemas con Retardo

Diagrama de Bode

El ángulo de fase varía en forma lineal en la frecuencia.



Sistemas con Retardo

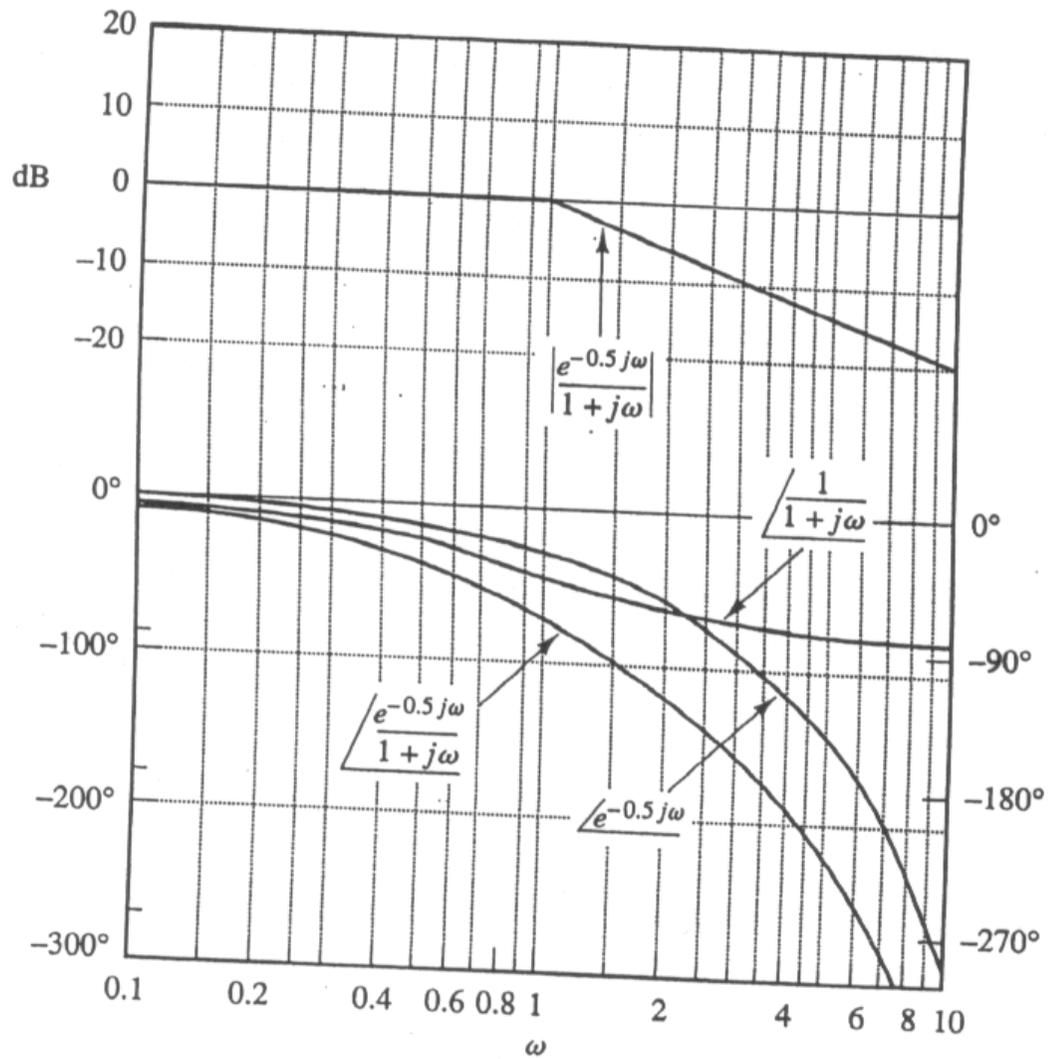
Diagrama de Bode

Ejemplo: $G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$

$$\begin{aligned} \text{Magnitud } 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |e^{-j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ &= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \end{aligned}$$

Angulo de fase:

$$\phi(G(j\omega)) = \phi(e^{-j\omega L}) + \phi\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right) = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$



Unidad 4:

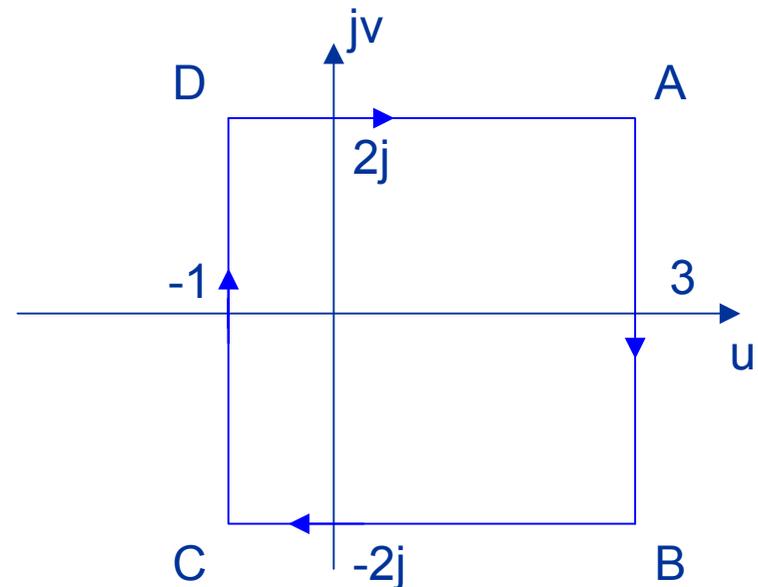
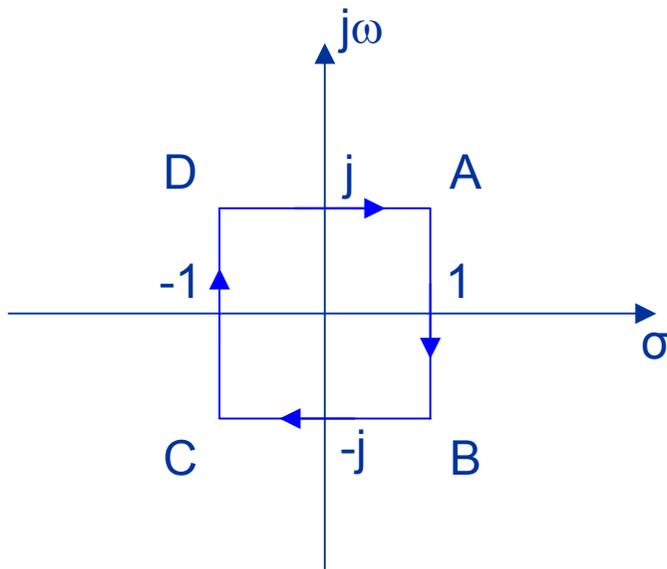
Técnica de Control en el Dominio de la Frecuencia: Estabilidad en el Dominio de la Frecuencia

Elaborado por: D. Sáez
Colaboradores: G. Sáez & S. Sippa

Transformaciones de los Contornos en el plano s

- Ejemplo: $F(s) = 2s + 1$

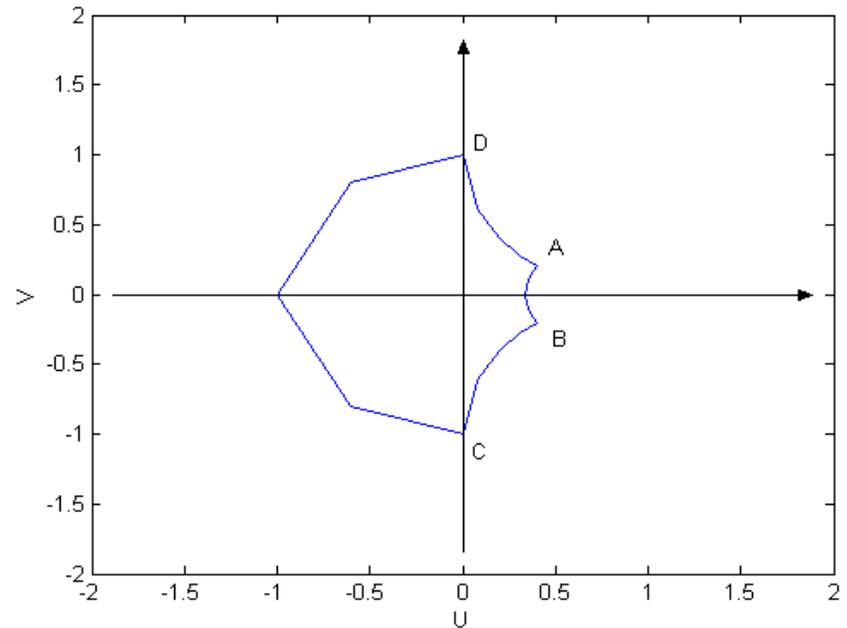
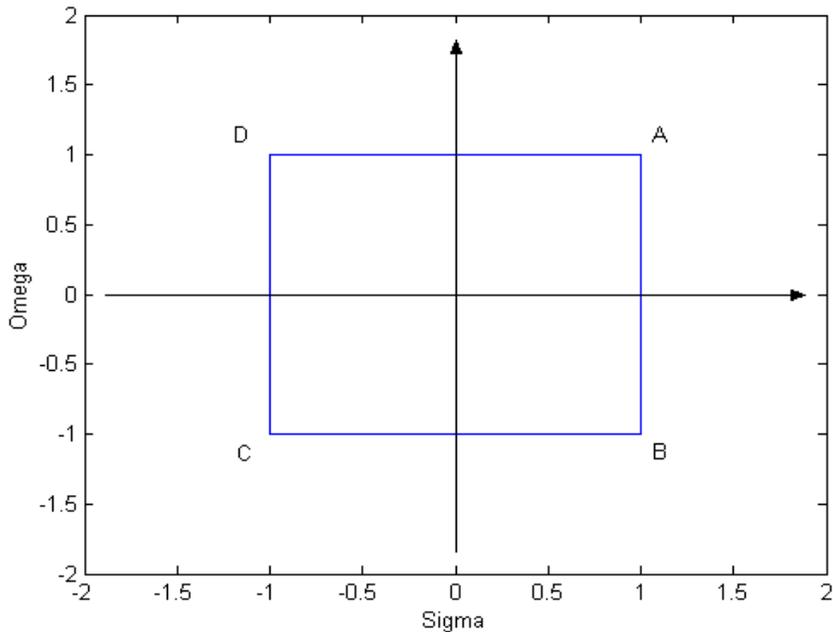
$$F(\sigma + j\omega) = 2(\sigma + j\omega) + 1 = \underbrace{2\sigma + 1}_U + j\underbrace{2\omega}_V$$



Transformaciones de los contornos en el plano s

- Ejemplo: $F(s) = \frac{s}{s+2}$

$$F(\sigma + j\omega) = \frac{\sigma^2 + 2\sigma + \omega^2}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{(\sigma + 2)^2 + \omega^2}$$



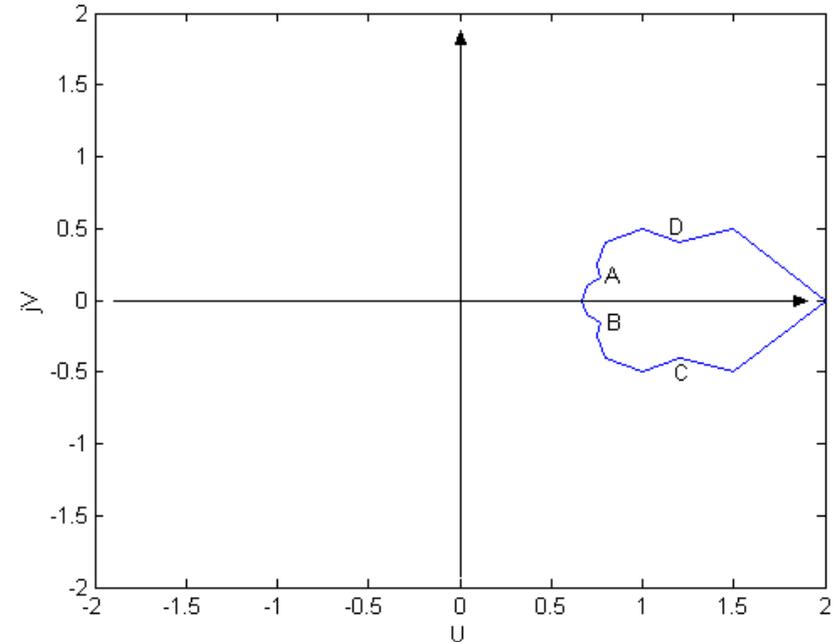
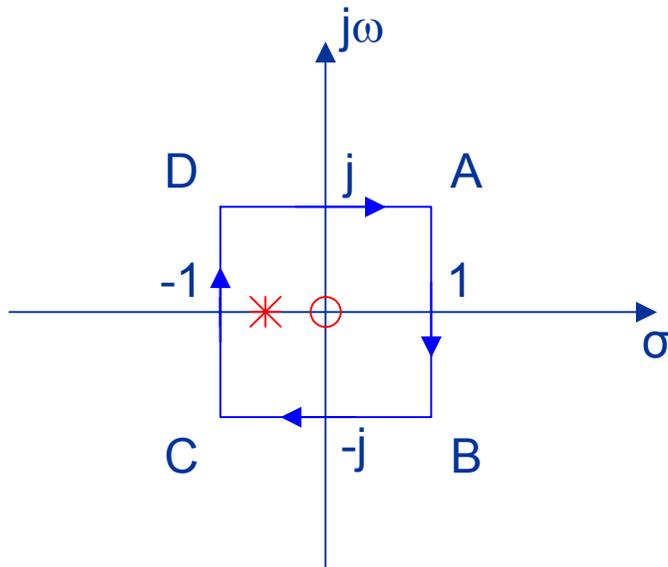
Transformaciones de los contornos en el plano s

- Teorema de Cauchy:

Si un contorno γ_s en el plano s rodea Z ceros y P polos de $F(s)$ y no pasa a través de ningún polo o cero de $F(s)$ cuando el recorrido es en la dirección del movimiento del reloj a lo largo del contorno, entonces el contorno correspondiente γ_F en el plano $F(s)$ rodea el origen en dicho plano $N = Z - P$ veces en la misma dirección.

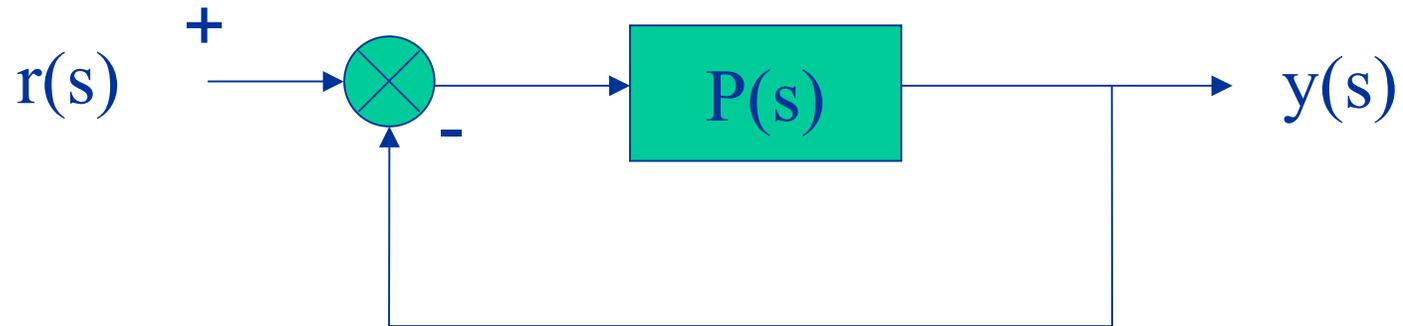
Transformaciones de los contornos en el plano s

- Ejemplo: $F(s) = \frac{s}{s + 0.5}$



- $P=1, Z=1 \Rightarrow N=0$ no rodea el origen.

Criterio de Nyquist

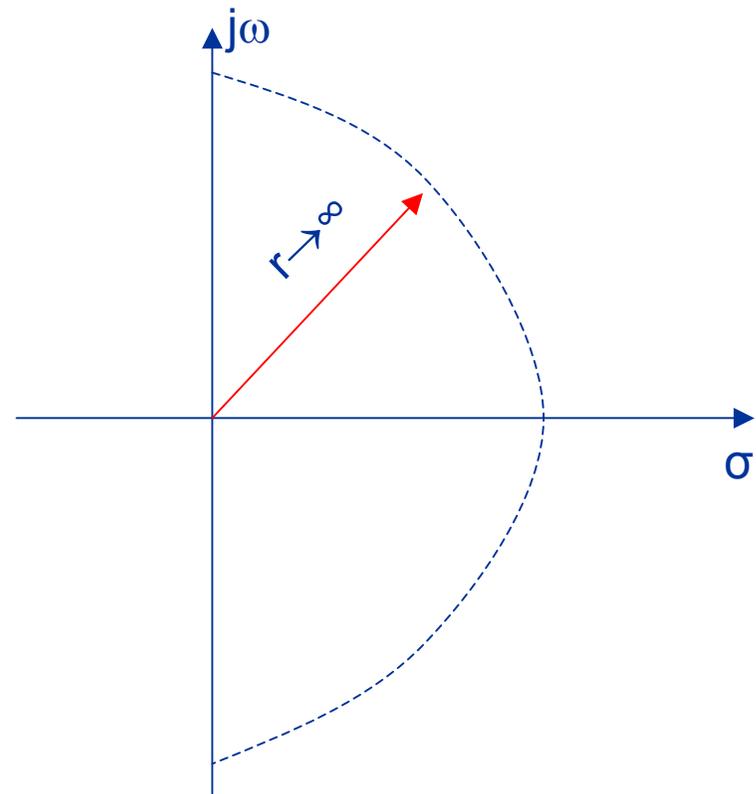


$$P(s) = G(s)G_c(s)$$

- Función de transferencia: $H(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)}$
- Ecuación característica: $F(s) = 1 + P(s)$

Criterio de Nyquist

- De este modo, un cero en $F(s) = 1+P(s)$ es un polo de $H(s)$.
- Supongamos que el contorno γ_s en s encierra toda la parte derecha del plano s (lado inestable).



Criterio de Nyquist

- Graficamos $F(s)$ y determinamos el número de rodeos del origen, y por lo tanto ceros inestables de $F(s)$ o polos de $H(s)$ inestables.
- Definimos $F'(s) = P(s) = F(s) - 1$
- En este caso, el número de rodeos del origen del plano $F(s)$ es igual al número de rodeos en el punto -1 en el plano $F'(s) = P(s)$.

Criterio de estabilidad de Nyquist

- **Plantas estables:**

Un sistema con retroalimentación es estable si y sólo si el contorno γ_p en el plano $P(s)$ no rodea el punto $(-1,0)$ cuando el número de polos de $P(s)$ en la parte derecha del plano es cero.

Criterio de estabilidad de Nyquist

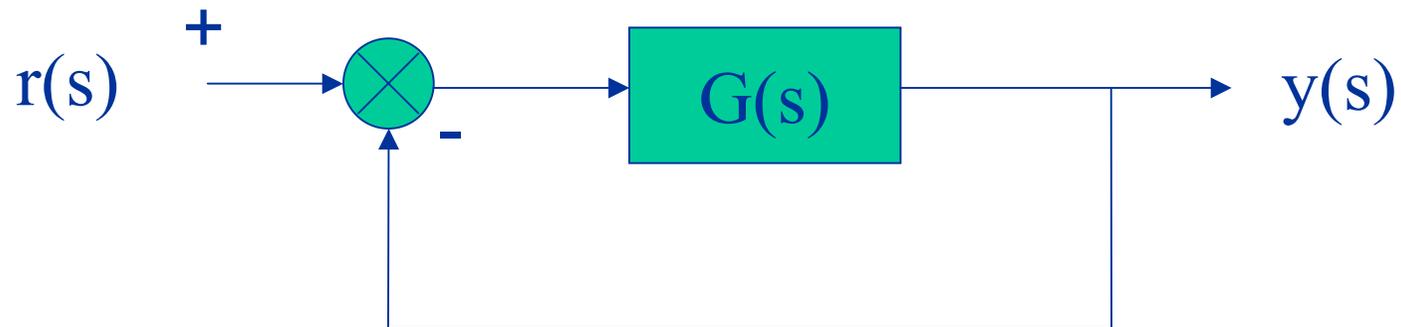
- **Plantas inestables:**

Un sistema con retroalimentación es estable si y sólo si el contorno γ_p en el plano $P(s)$ rodea al punto $(-1,0)$ en el sentido antihorario tantas veces como polos en la parte positiva tenga $P(s)$.

- Como la ecuación característica no debe tener raíces en la parte real positiva ($Z=0$) y como $N=Z-P$, entonces N es igual al - número de polos.

Criterio de estabilidad de Nyquist

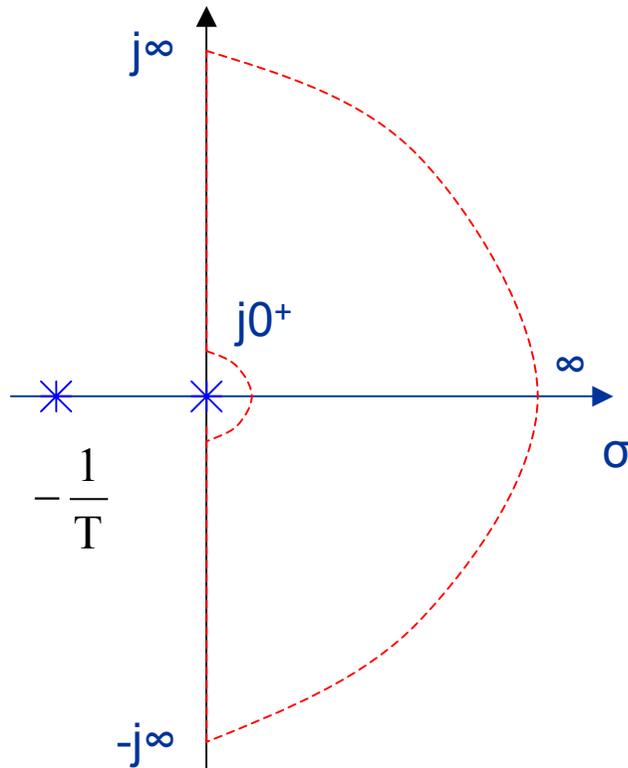
- Ejemplo:



$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Criterio de estabilidad de Nyquist

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$



$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT\omega + 1)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0^+$$

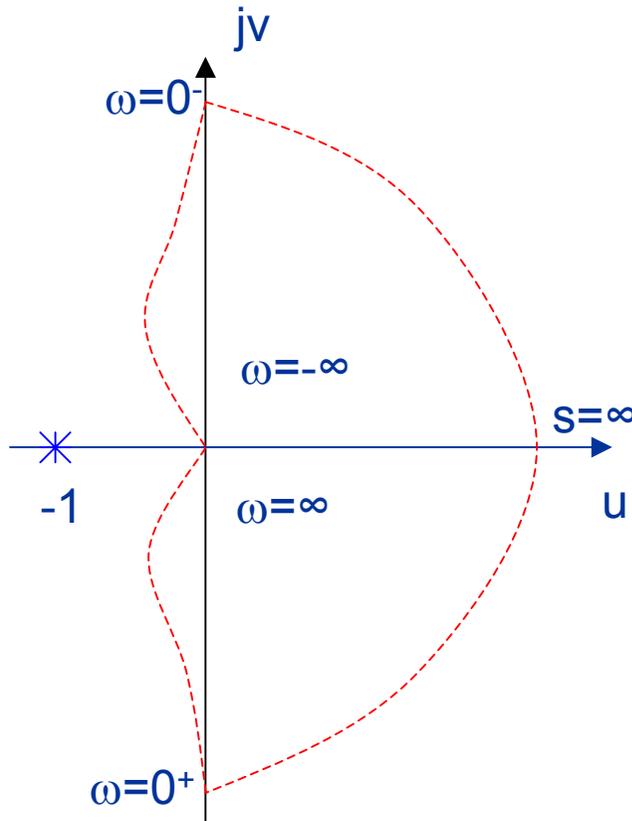
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT\omega + 1)} \xrightarrow{\omega \rightarrow -\infty} 0^-$$

$$G(j\omega)_{\omega=\varepsilon} = \frac{K}{j\varepsilon(jT\varepsilon + 1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -j\infty$$

$$G(j\omega)_{\omega=-\varepsilon} = \frac{K}{-j\varepsilon(-jT\varepsilon + 1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} j\infty$$

$$G(\omega)_{s=\varepsilon} = \frac{K}{\varepsilon(\varepsilon T + 1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

Criterio de estabilidad de Nyquist



Finalmente, aunque K aumente nunca va a rodear a -1 , por lo tanto nunca es inestable este sistema.

Criterio de estabilidad de Nyquist

• Ejemplo:
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{-K(T_1 + T_2) - jK/\omega(1 - \omega T_1 T_2)}{1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2} = U + jV$$

Se desea encontrar el punto (-1,0), entonces $V=0$.

Criterio de estabilidad de Nyquist

$$\text{Si } V = 0 \rightarrow 1 - \omega^2 T_1 T_2 = 0 \Rightarrow \omega = \left(\sqrt{T_1 T_2} \right)^{-1}$$

Entonces

$$U = \frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

El sistema es estable si el contorno se encuentra a la derecha del punto $(-1,0)$.

$$\Rightarrow \frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1 \Rightarrow K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

Estabilidad Relativa

- El criterio de estabilidad de Nyquist se define en términos del punto $(-1,0)$ en el gráfico polar, o sea el punto 0 dB y 180° en el diagrama de Bode.
- La estabilidad relativa se define en función de la proximidad de lugar geométrico de $GH(j\omega)$.

Estabilidad Relativa

- Margen de ganancia: Recíproco de la ganancia $|G(j\omega)|$ para la frecuencia en el ángulo de fase alcanza -180° ($v=0$). Se refiere a cuánto se debe aumentar la ganancia para que $G(j\omega)$ pase por $u=-1$.

$$\text{M.G.} = \frac{1}{|G(j\omega_1)|} = -20\log|G(j\omega_1)|\text{dB}$$

Estabilidad Relativa

- Margen de fase: Se define como el ángulo de fase a través del cual debe girar el LG $G(j\omega)$ para que el punto de magnitud unitaria $|G(j\omega)|=1$ pase a través del punto $(-1,0)$ en el plano $G(j\omega)$. Fase adicional que se necesita antes de que el sistema se vuelva inestable.

$$|G(j\omega_2)| = 1$$

$$R(\omega_2), X(\omega_2)$$

$$\Delta\phi_2 = 180^\circ + \arctan\left(\frac{X(\omega_2)}{R(\omega_2)}\right)$$

Diagrama de Bode

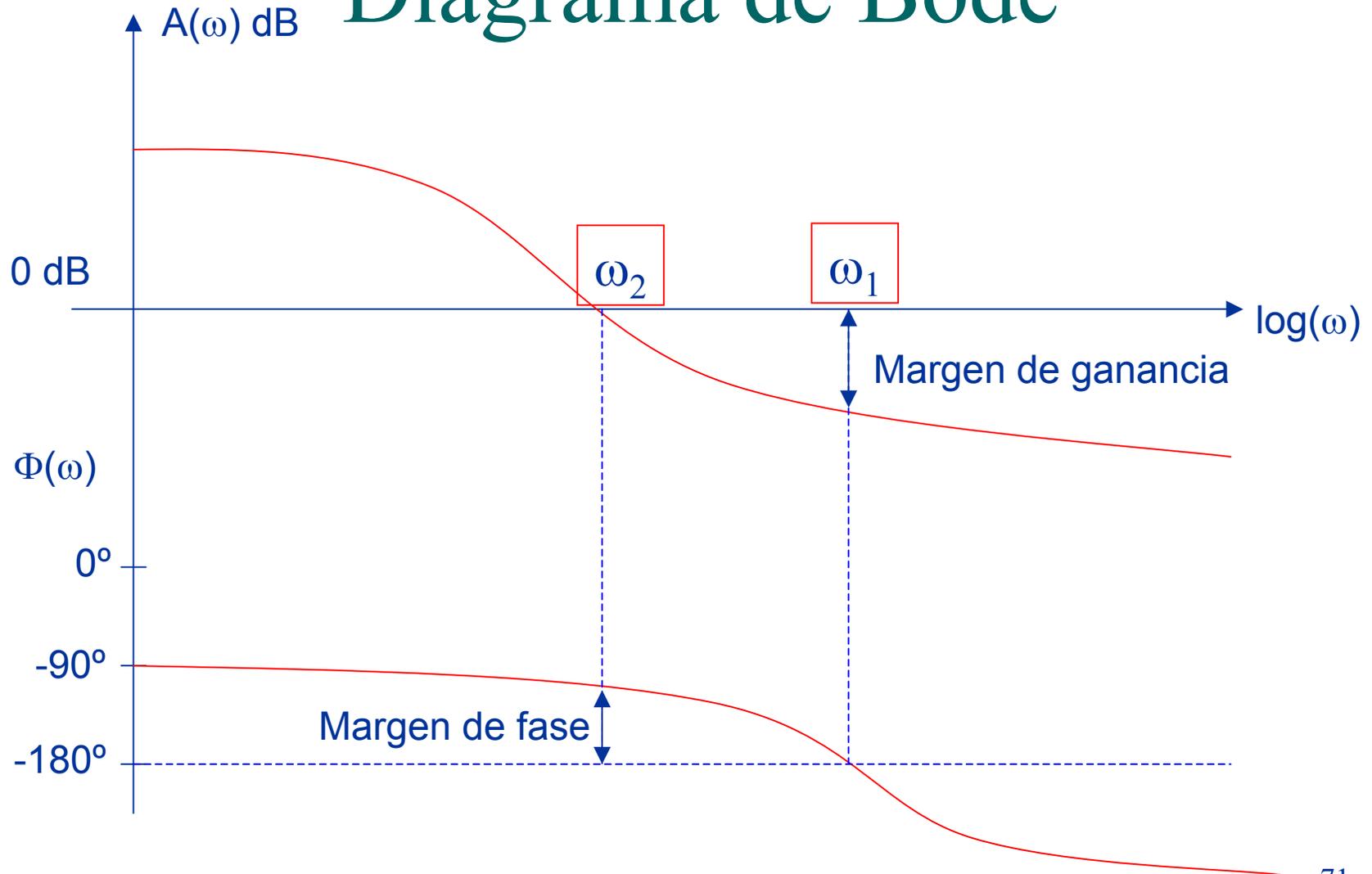
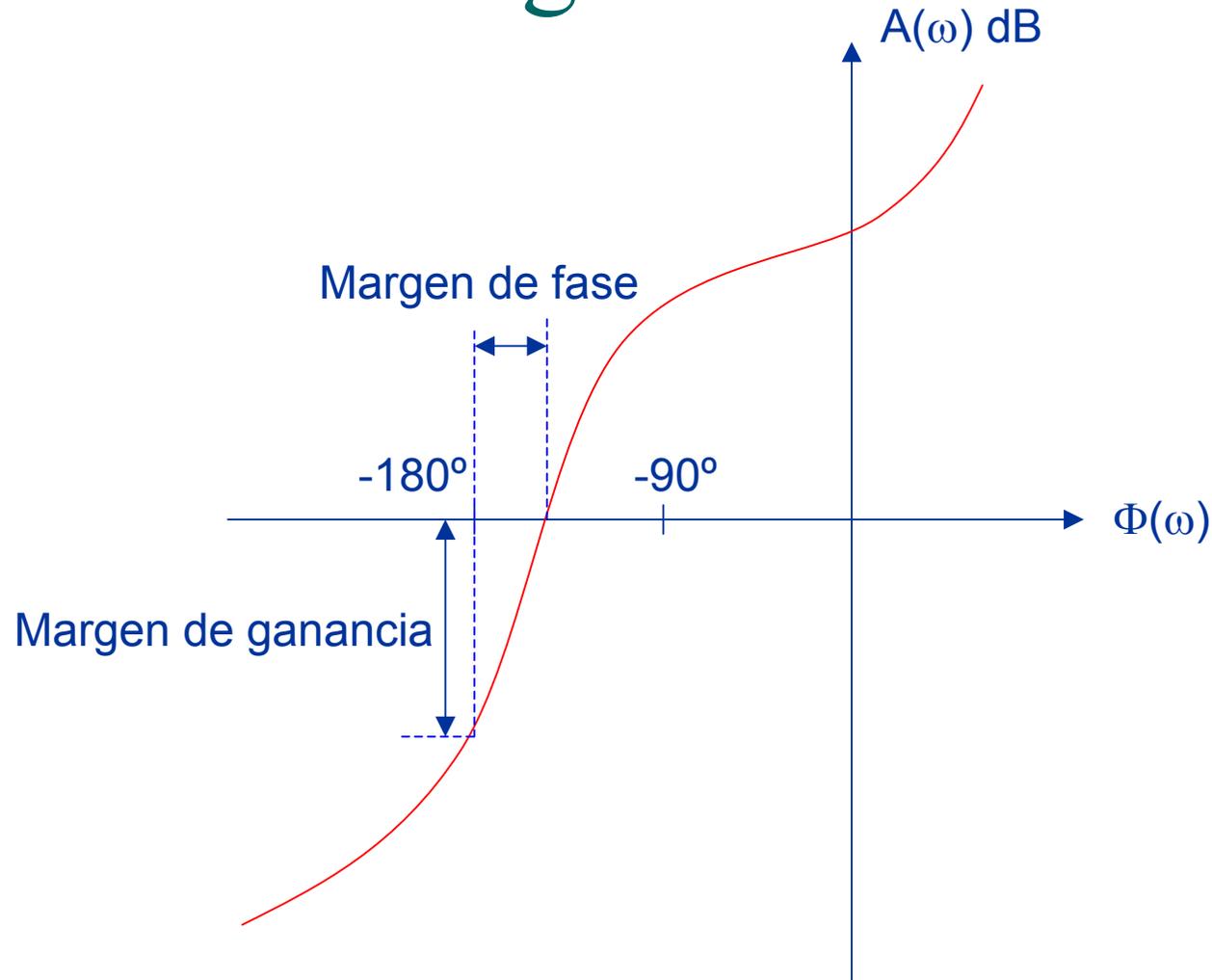
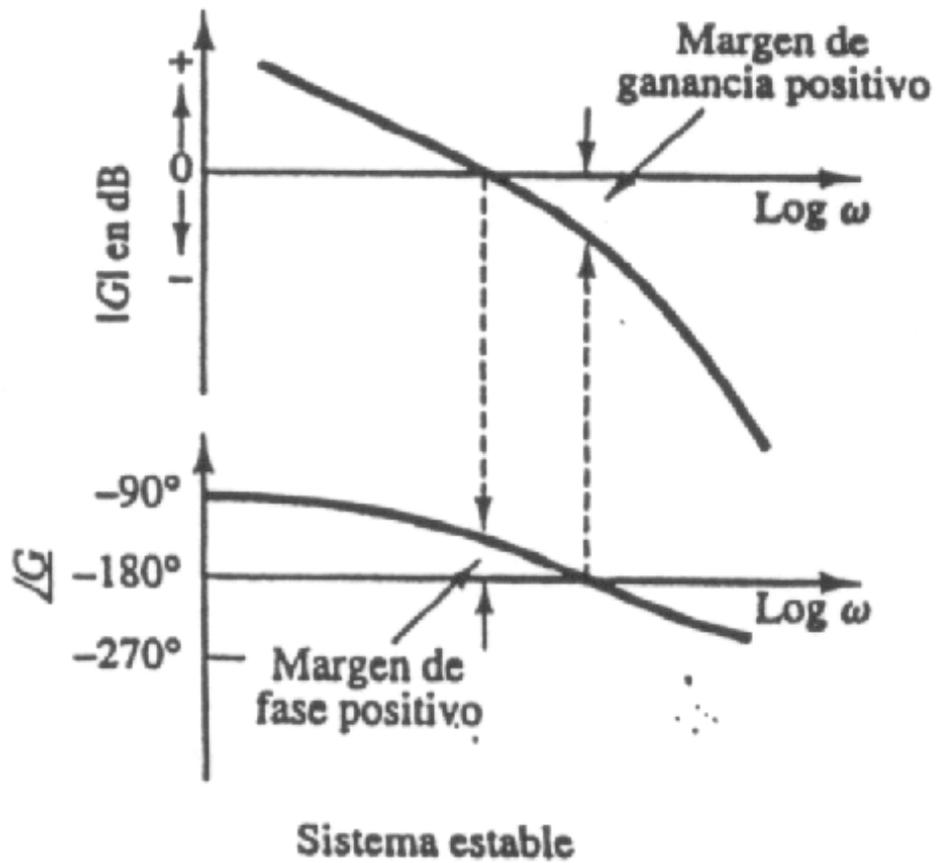


Diagrama de Nichols

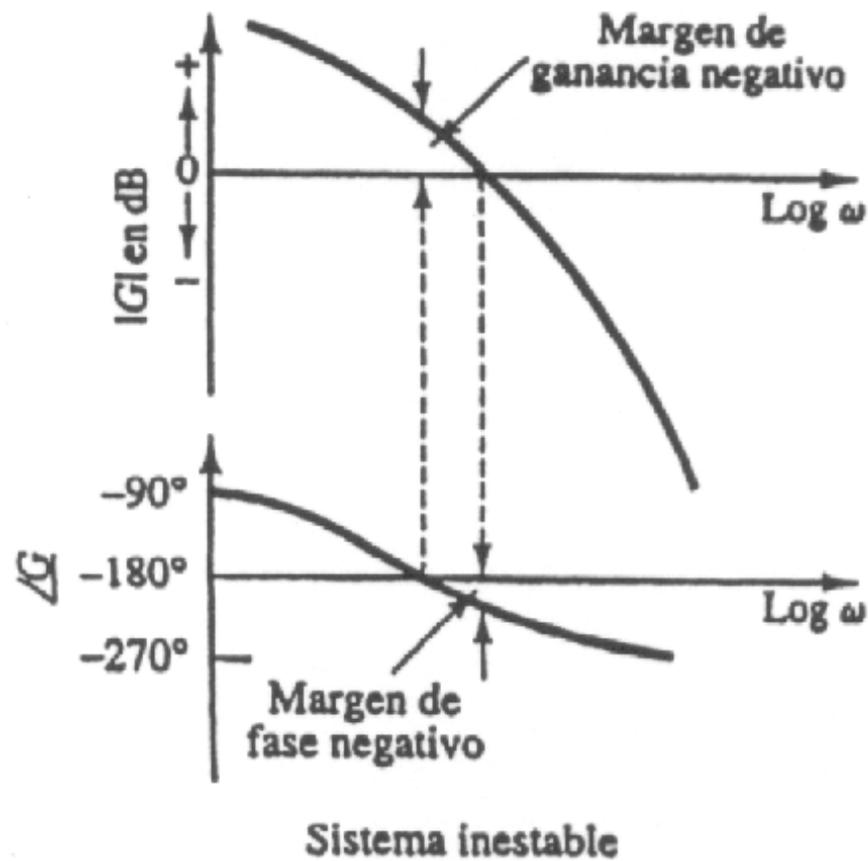


Estabilidad Relativa

- Para un sistema estable el Margen de ganancia (M.G.) indica cuanto puede incrementarse la ganancia antes de que el sistema se vuelva inestable.
- Para un sistema inestable, el M.G. indica cuánto debe disminuir la ganancia para que el sistema sea estable.

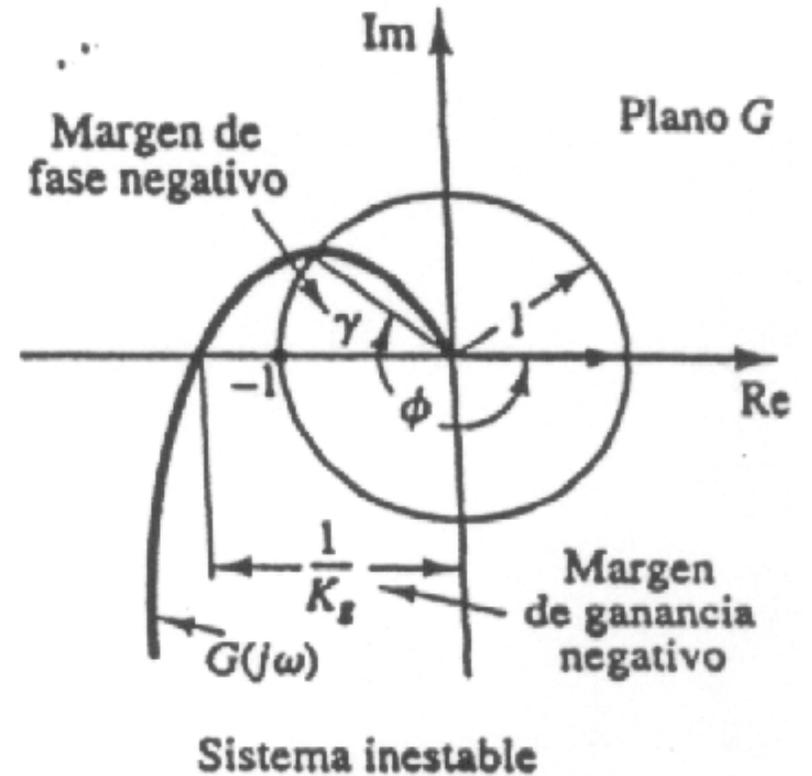


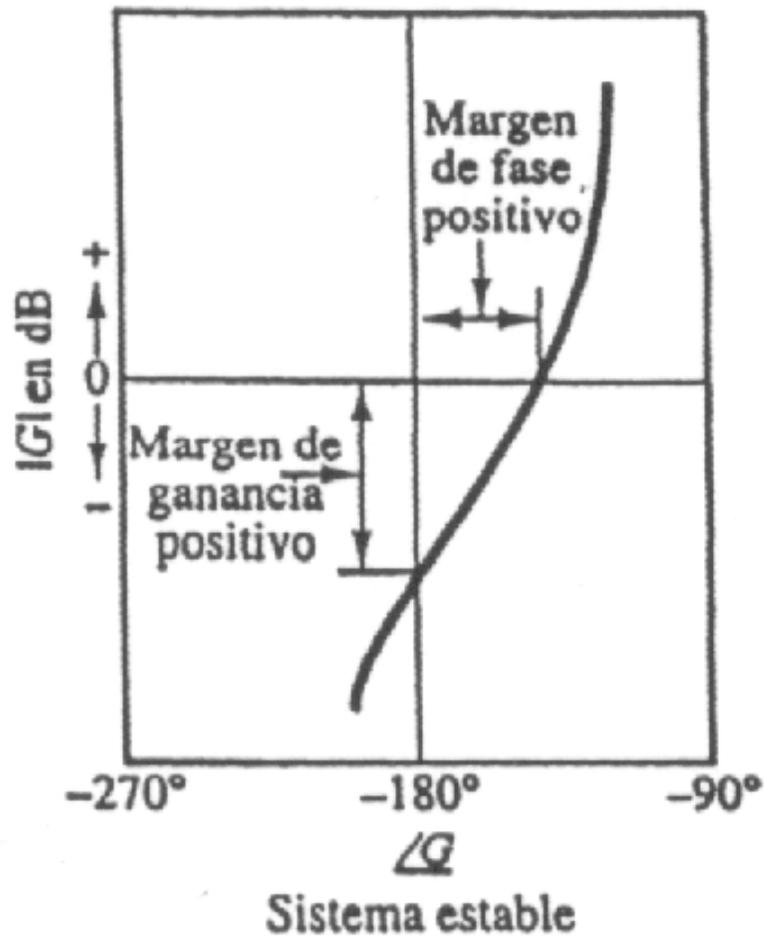
(a)



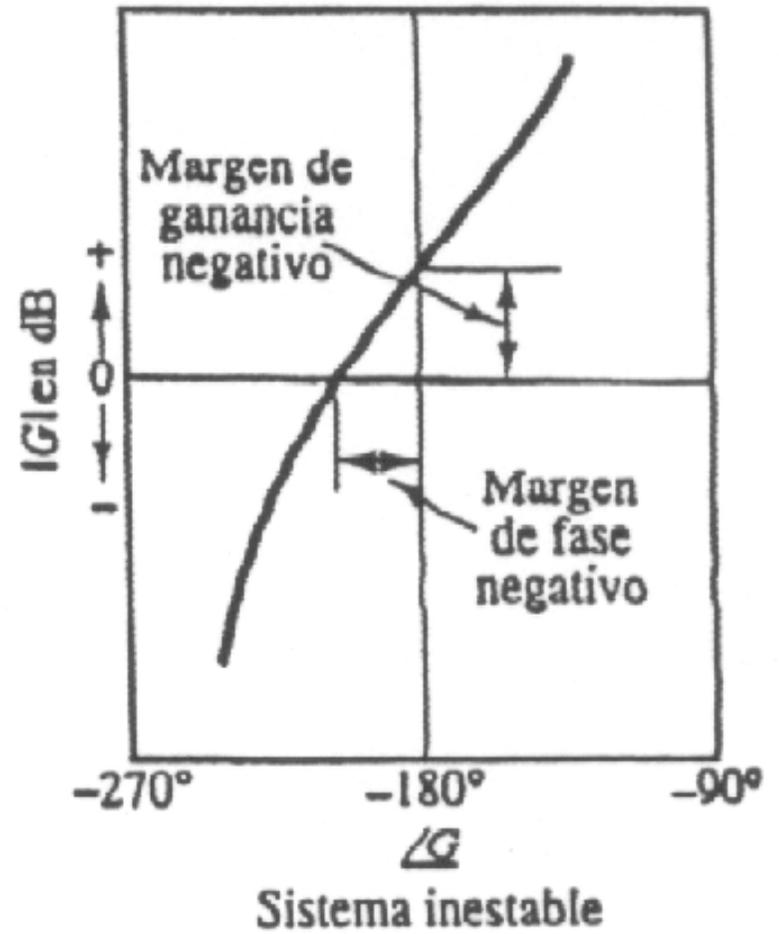


(b)





(c)



Unidad 4:

Técnica de Control

en el Dominio de la Frecuencia:

Diseño de Controladores

Elaborado por: D. Sáez
Colaboradores: G. Sáez & S. Sippa

Compensador de Adelanto de Fase

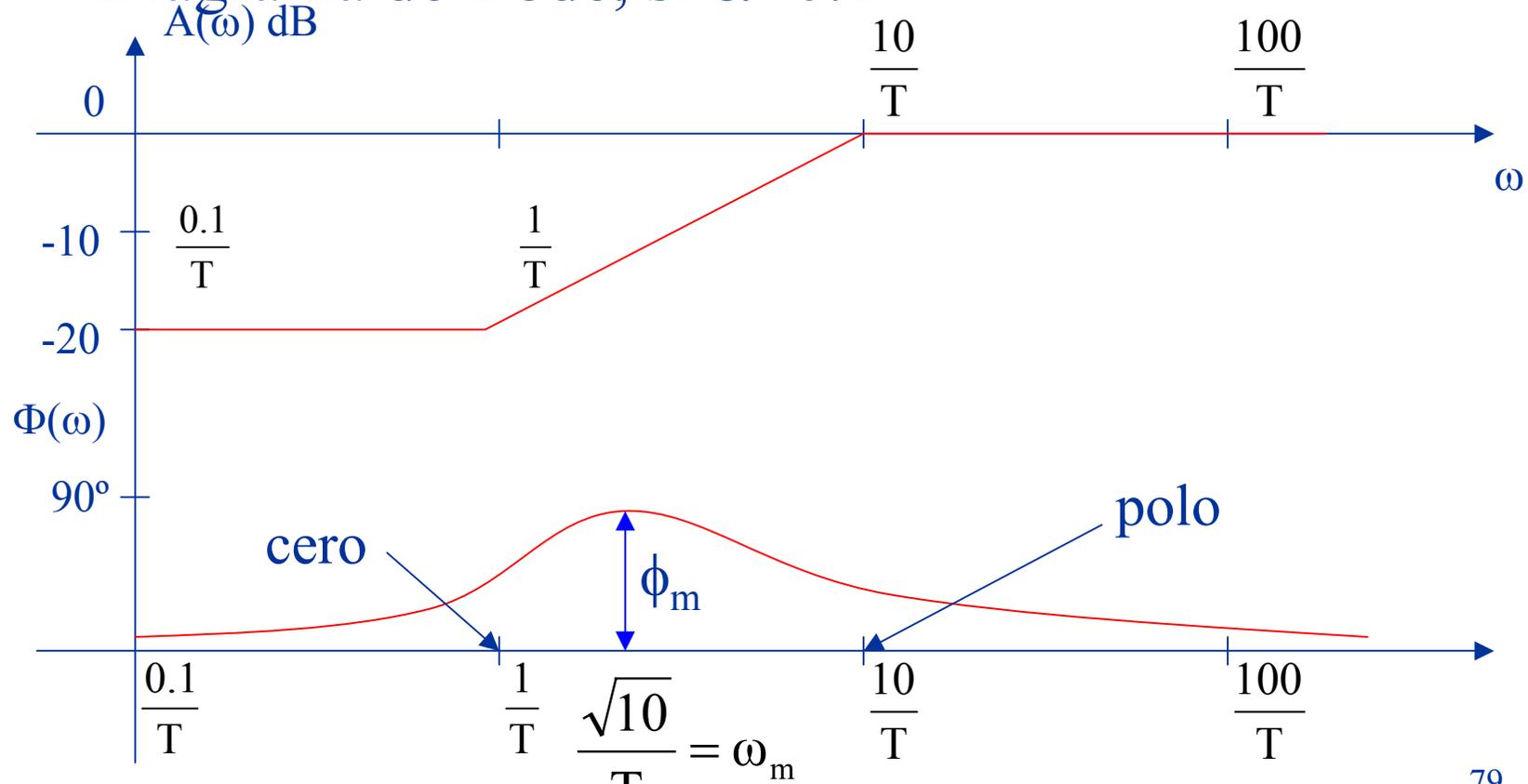
$$G_C(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\text{polo} = -\frac{1}{\alpha T} \quad \text{cero} = -\frac{1}{T}$$

$$\text{Margen de fase máximo} = \phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

Compensador de Adelanto de Fase

- Diagrama de Bode, si $\alpha=0.1$



Compensador de Adelanto de Fase

$$\log w_m = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\alpha T}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\log w_m = \log\left(\frac{1}{\alpha T^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha T}}\right)$$

$$w_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

$$\phi(G_C(jw))\Big|_{w_m} = \phi_m = \tan^{-1}(wT) - \tan^{-1}(w\alpha T)$$

$$G_c(j\omega) = K_c \alpha \frac{(j\omega T + 1)}{(j\omega \alpha T + 1)}$$

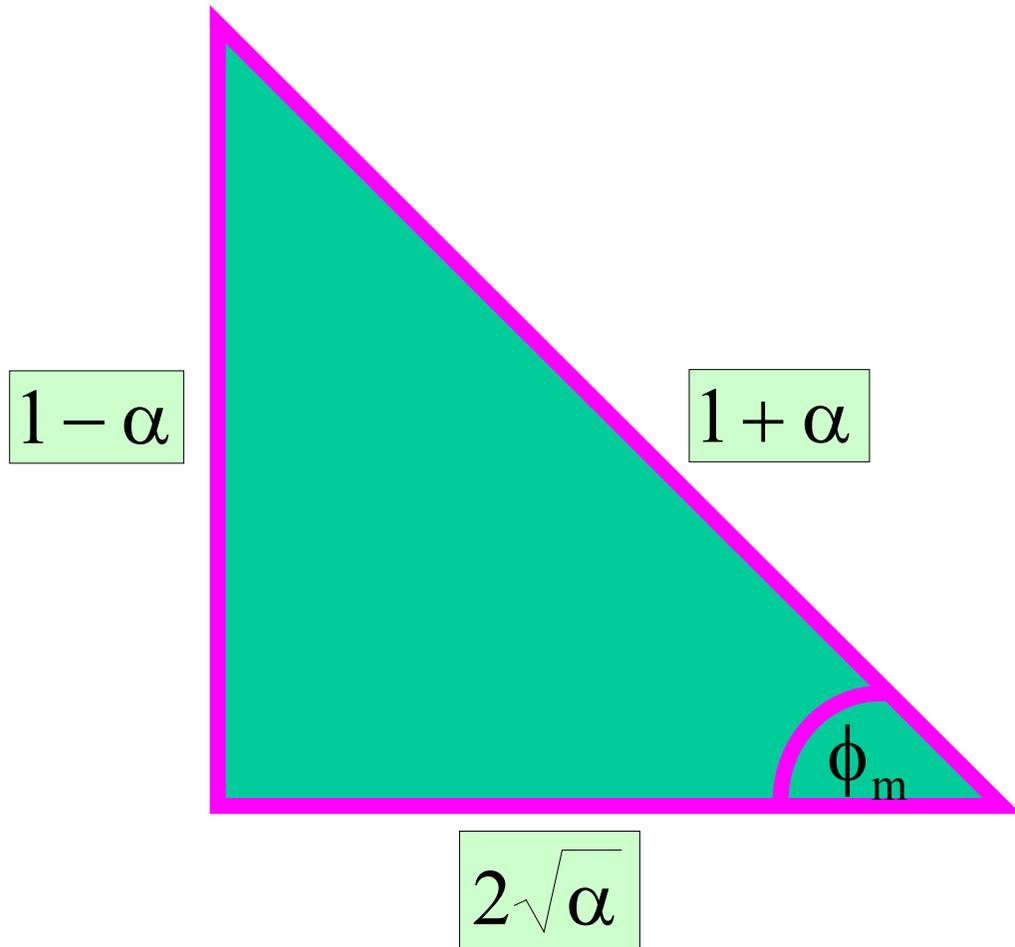
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan \phi_m = \frac{\omega T - \omega \alpha T}{1 + \omega T \omega \alpha T} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha T}} T - \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \alpha T}{1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} T \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \alpha T}$$

$$\tan \phi_m = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\tan \phi_m = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$



Compensador de Adelanto de Fase

Atenuación en ω_m

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega)|_{\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}} &= \left| \frac{Tj\omega + 1}{T\alpha j\omega + 1} \right|_{\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}} \\ &= \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} j + 1}{\sqrt{\alpha} j + 1} \right| = \left| \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} j + 1 \right) (1 - \sqrt{\alpha} j)}{(1 + \sqrt{\alpha} j)(1 - \sqrt{\alpha} j)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} j + 1 + 1 - \sqrt{\alpha} j}{1 + \alpha} \right| = \left| \frac{2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \right) j}{1 + \alpha} \right| \\
&= \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{\alpha} - 2 + \alpha}}{1 + \alpha} = \frac{\sqrt{4\alpha - 2\alpha + \alpha^2 + 1}}{\sqrt{\alpha}(1 + \alpha)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}
\end{aligned}$$

$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) =$ **Ganancia del controlador en:**

$$W_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

Compensador de Retraso de Fase

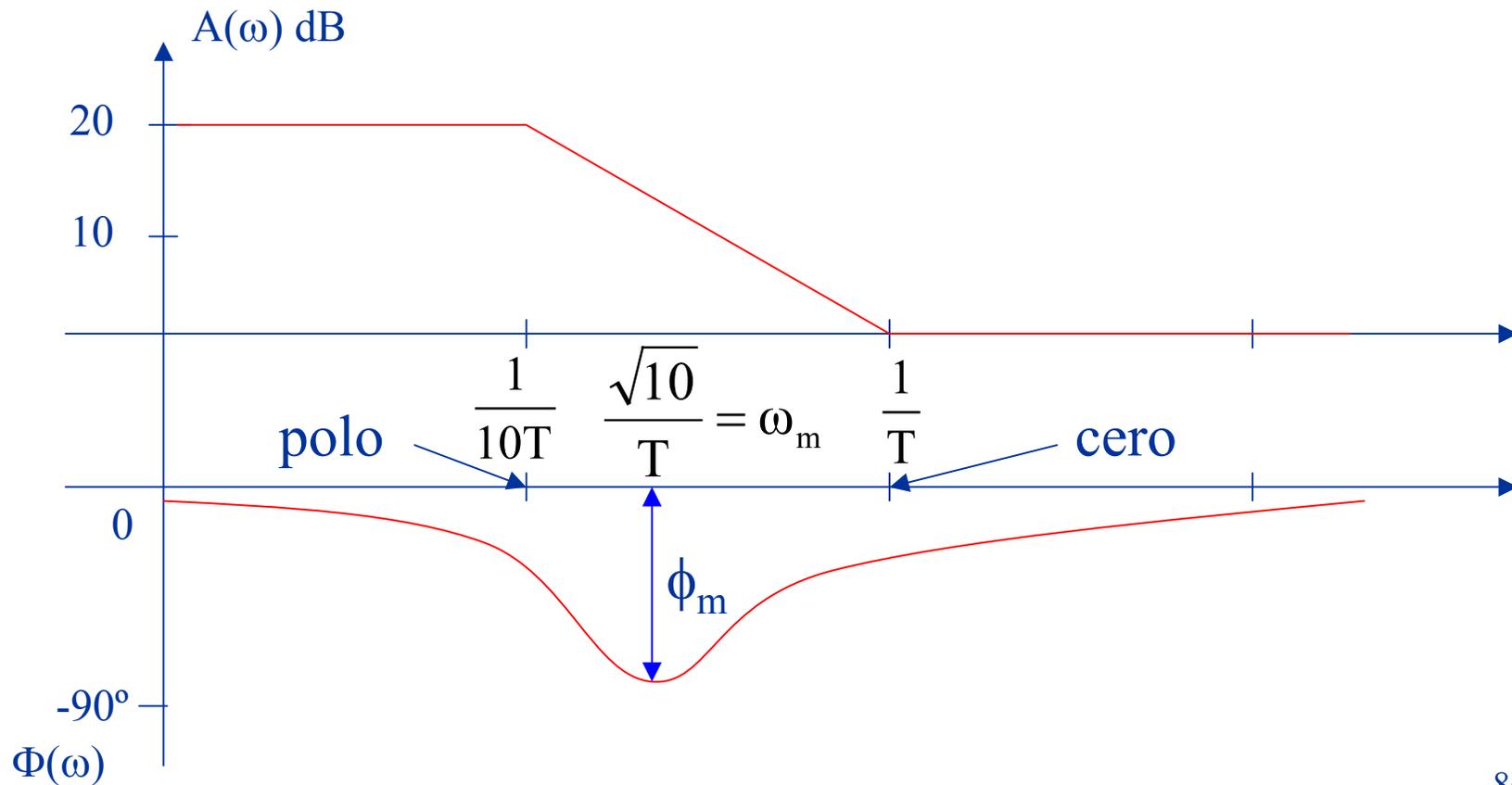
$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} \quad \beta > 1$$

$$\text{polo} = -\frac{1}{\beta T} \quad \text{cero} = -\frac{1}{T}$$

$$\text{Margen de fase máximo} = \phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta T}}$$

Compensador de Retraso de Fase

- Diagrama de Bode, si $\beta=10$.



Procedimiento de diseño para controlador de adelanto de fase

1) Compensador

$$G_c(s) = \frac{K\alpha(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)}$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\text{con } K_c = K\alpha$$

La función de lazo abierto del sistema compensado queda:

$$G_c(s)G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} KG(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s)$$

Procedimiento de diseño para controlador de adelanto de fase

- Determinar la ganancia K con el requisito de error estático.
- 2) Utilizando K , trace el diagrama de Bode de $G_1(j\omega)$ del sistema no compensado. Evalúe el margen de fase.
 - 3) Determine el ángulo de adelanto de fase ϕ necesario para agregarlo al sistema.

Procedimiento de diseño para controlador de adelanto de fase

4) Determine α con

$$\sin(\phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \phi_m = \phi + 5^\circ (12^\circ)$$

- Determine ω tal que $G_1(j\omega) = -20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$
- Seleccione esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia (se determina T).

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

Procedimiento de diseño para controlador de adelanto de fase

5) Determine las frecuencias del compensador

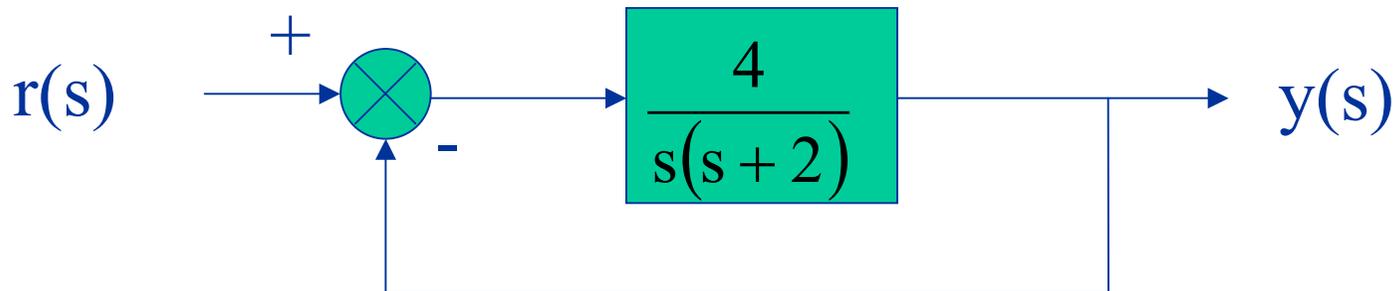
$$\text{polo} = \frac{1}{\alpha T} \qquad \text{cero} = \frac{1}{T}$$

6) Usando K y α , calcular $K_c = \frac{K}{\alpha}$

7) Verificar que el Margen de Ganancia es satisfactorio.

Ejemplo

- Se desea diseñar un compensador para el sistema tal que $K_V=20 \text{ s}^{-1}$, $M.F. \geq 50^\circ$ y $M.G. \geq 10 \text{ dB}$.



Compensador

$$G_C(s) = K_C \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)}$$

Función de transferencia de lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_c \alpha (Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \frac{4}{s(s + 2)}$$

con $G_1(s) = \frac{4K_c \alpha}{s(s + 2)}$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4K_c \alpha}{s(s + 2)} \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)}$$

$$K_v = \frac{4K_c \alpha}{2} = 20$$

$$K_c \alpha = 10 = K$$

$$G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

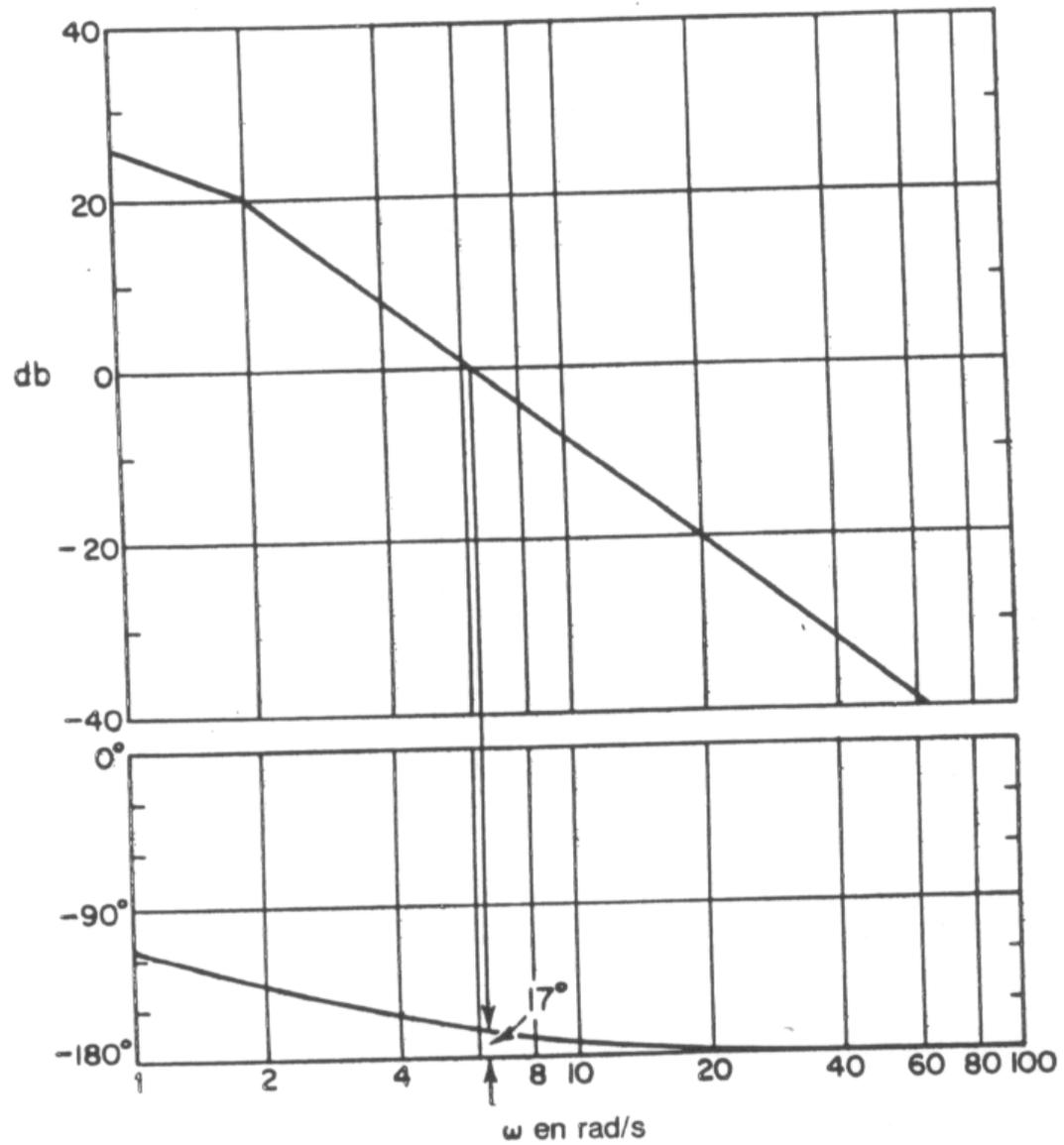
- En el diagrama de Bode: $G_1(s) = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)}$

Margen de fase (M.F.) = 17°

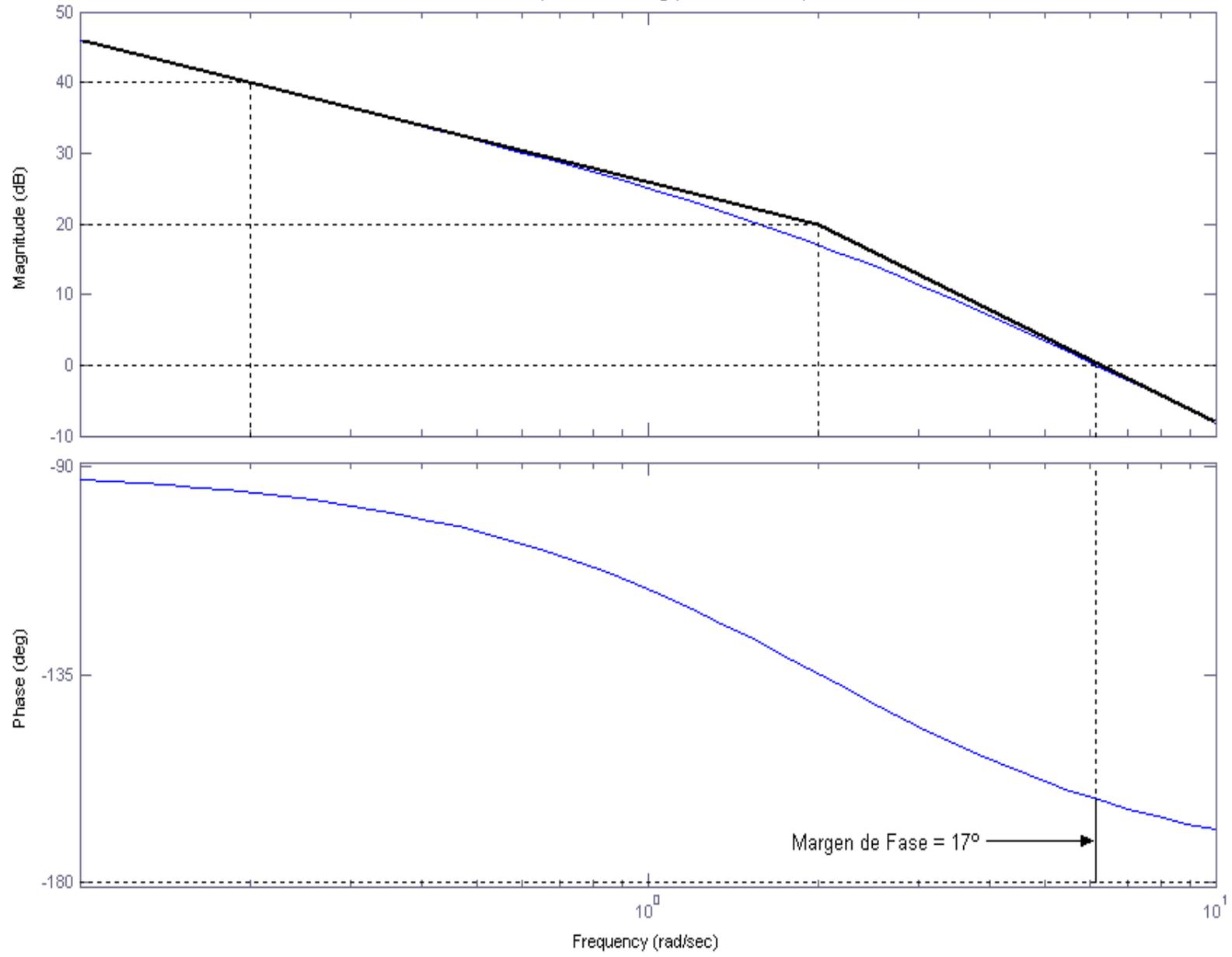
Margen de ganancia (M.G.) = ∞

Si M.F. = $17^\circ \quad \rightarrow \phi = 33^\circ \quad \rightarrow \phi_m = 38^\circ$

$$\sin(\phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \Rightarrow \alpha = 0.24$$



Bode Diagram
Gm = Inf, Pm = 17.964 deg (at 6.1685 rad/sec)



Para obtener el período T , se necesita

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_m}$$

- Donde ω_m se obtiene de $|G_1(j\omega)| = -20\log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$

- Como α fue calculado anteriormente:

$$20\log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = 6.2 \text{ [dB]} \quad |G_1(j\omega)| = -6.2 \text{ [dB]}$$

Entonces $\omega_m = 9 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

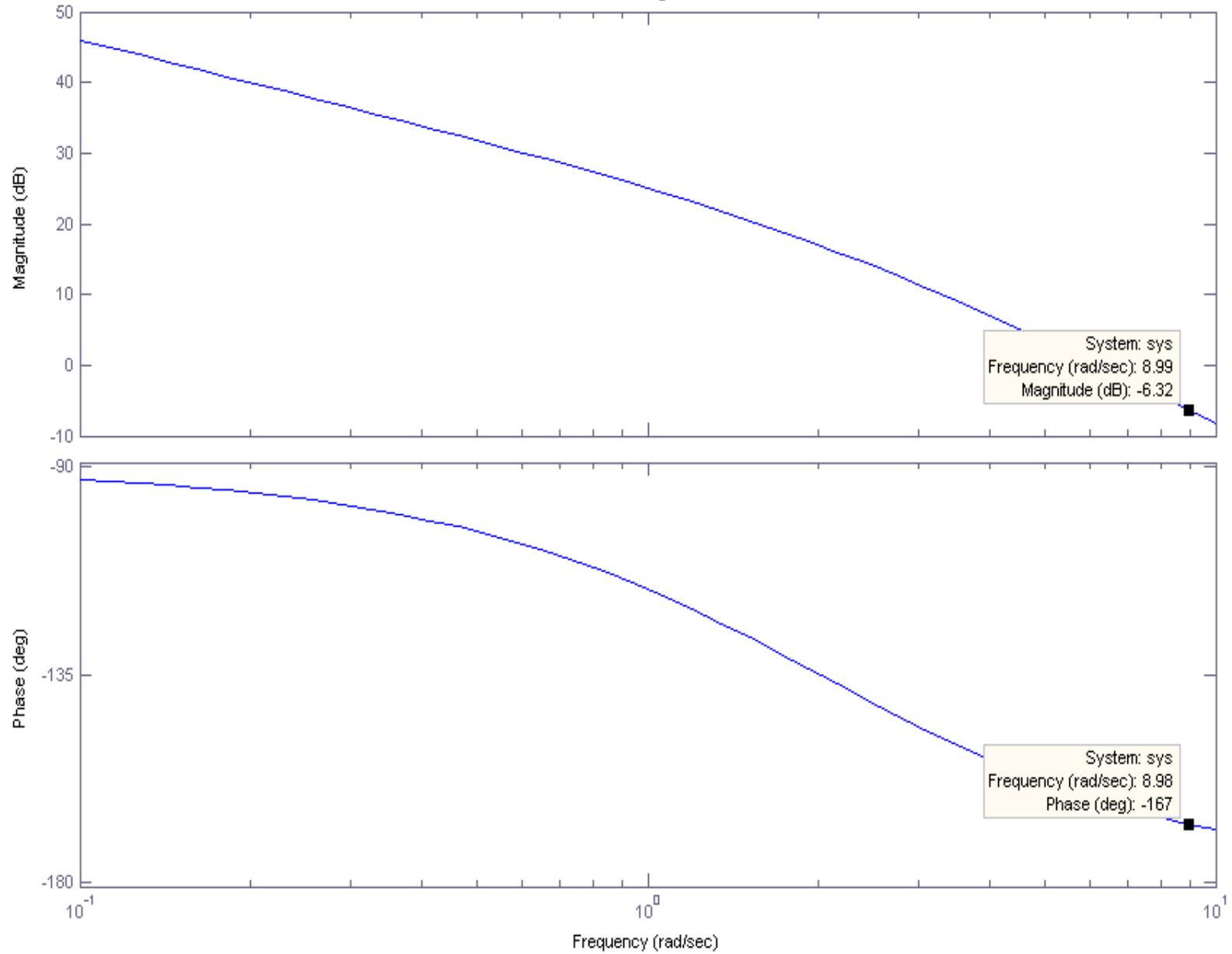
Elegimos este ω como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

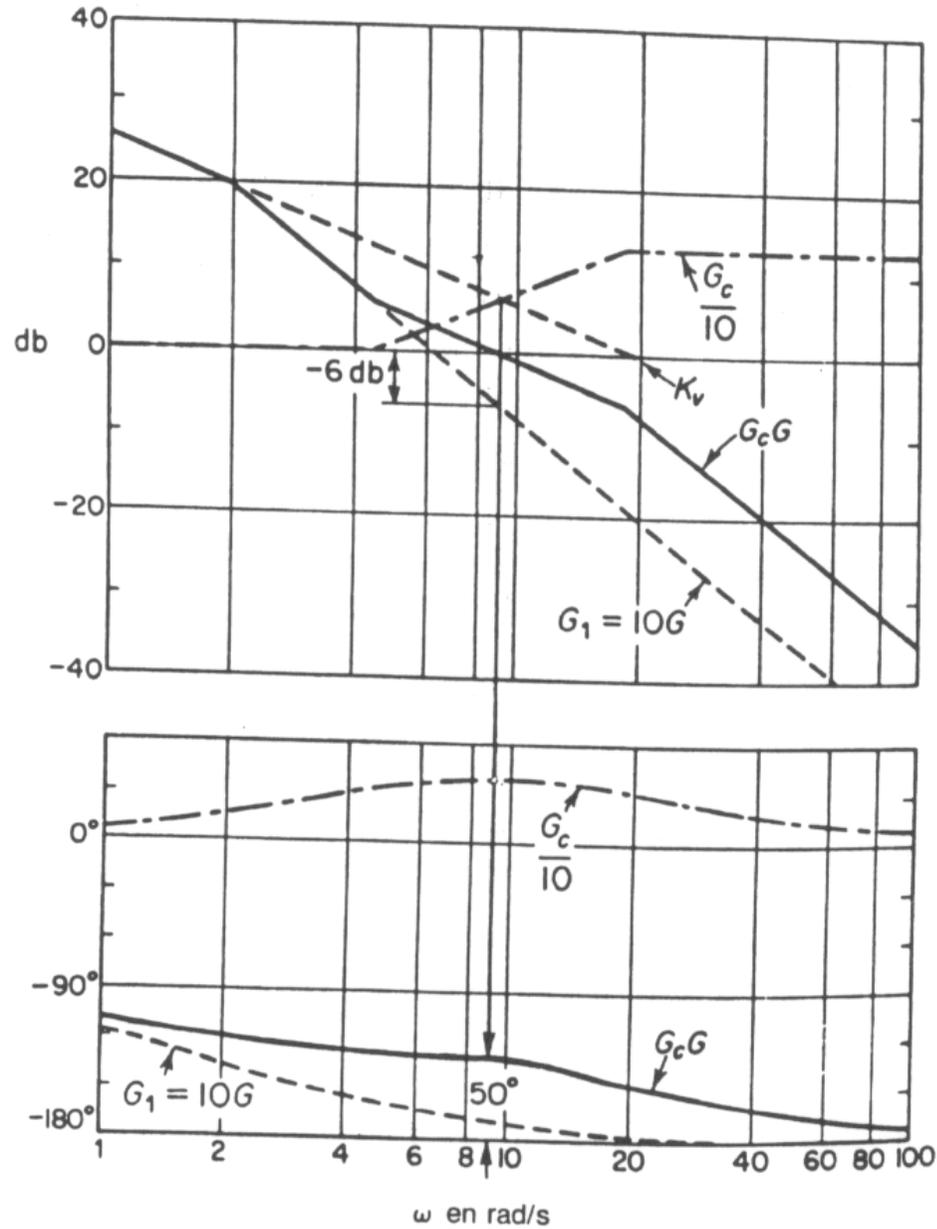
$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha\omega_m}} \Rightarrow T = 0.227$$

$$G_C(s) = K_C \alpha \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

Donde $K_C \alpha = 10 \quad \Rightarrow \quad G_C(s) = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$

Bode Diagram





Procedimiento de diseño para un controlador de atraso de fase

1) Compensador:

$$G_C(s) = K_c \beta \frac{T_s + 1}{\beta T_s + 1}$$

$$G_C(s)G(s) = K_c \beta \frac{T_s + 1}{\beta T_s + 1} G_1(s)$$

$$G_1(s) = KG(s)$$

$$K = K_c \beta$$

- Determinar K para satisfacer los requerimientos de K_v .

Procedimiento de diseño para un controlador de atraso de fase

- 2) Si el sistema $G_1(j\omega)$ no satisface las especificaciones de M.F. y M.G., encuentre ω donde el ángulo de la fase de la función de transferencia en el lazo abierto es igual a $(-180^\circ + \text{M.F.})$ requerido.
- Elija esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

Procedimiento de diseño para un controlador de atraso de fase

3) Elegir la frecuencia $\omega = \frac{1}{T}$ (cero de G_C) una

octava a una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

4) Determine la atenuación necesaria para bajar la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

Procedimiento de diseño para un controlador de atraso de fase

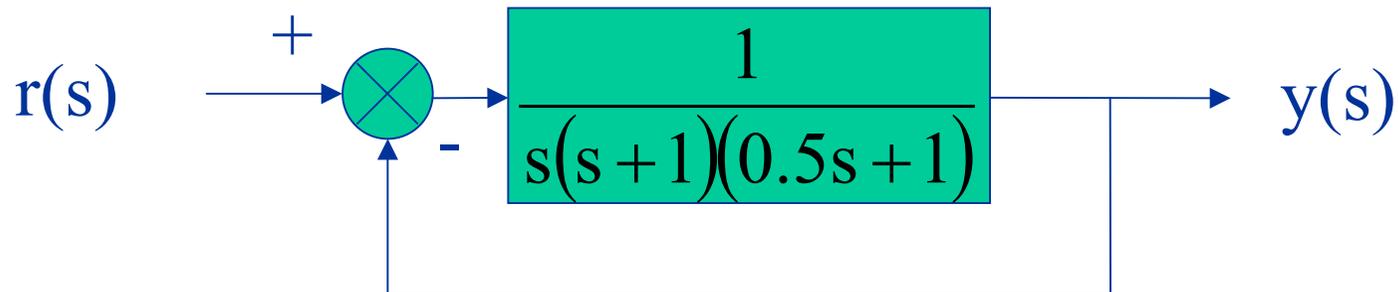
Note que esta atenuación es de $-20 \log(\beta)$, determine el valor de β .

Luego, la otra frecuencia es $\omega = \frac{1}{\beta T}$ (polo de G_C).

5) Finalmente, usando β y K_c calcule la expresión del controlador.

Ejemplo

- Se desea compensar el sistema tal que $K_v = 5 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, M.F. $\geq 40^\circ$ y M.G. $\geq 10 \text{ [dB]}$.



$$G_c(s) = K_c \beta \frac{T s + 1}{\beta T s + 1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} sK_c\beta \frac{(Ts + 1)}{(\beta Ts + 1)} \frac{1}{s(s + 1)(0.5s + 1)} = K_c\beta$$

$$K_c\beta = K_v = 5$$

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

$$\text{M.F.} = -20^\circ$$

$$\text{M.F. requerido} = 40^\circ + 12^\circ = 52^\circ$$

$$\Rightarrow -180^\circ + \text{M.F. requerido} = -128^\circ$$

éste se produce en $\omega = 0.5$ [rad/s]

Cero en $\omega = 0.1 = 1/T$

$$\text{Atenuación: } 20\log\left(\frac{1}{\beta}\right) = -20[\text{dB/dec}] = -20\log|G(j0.5)|$$

$$\Rightarrow \beta = 10$$

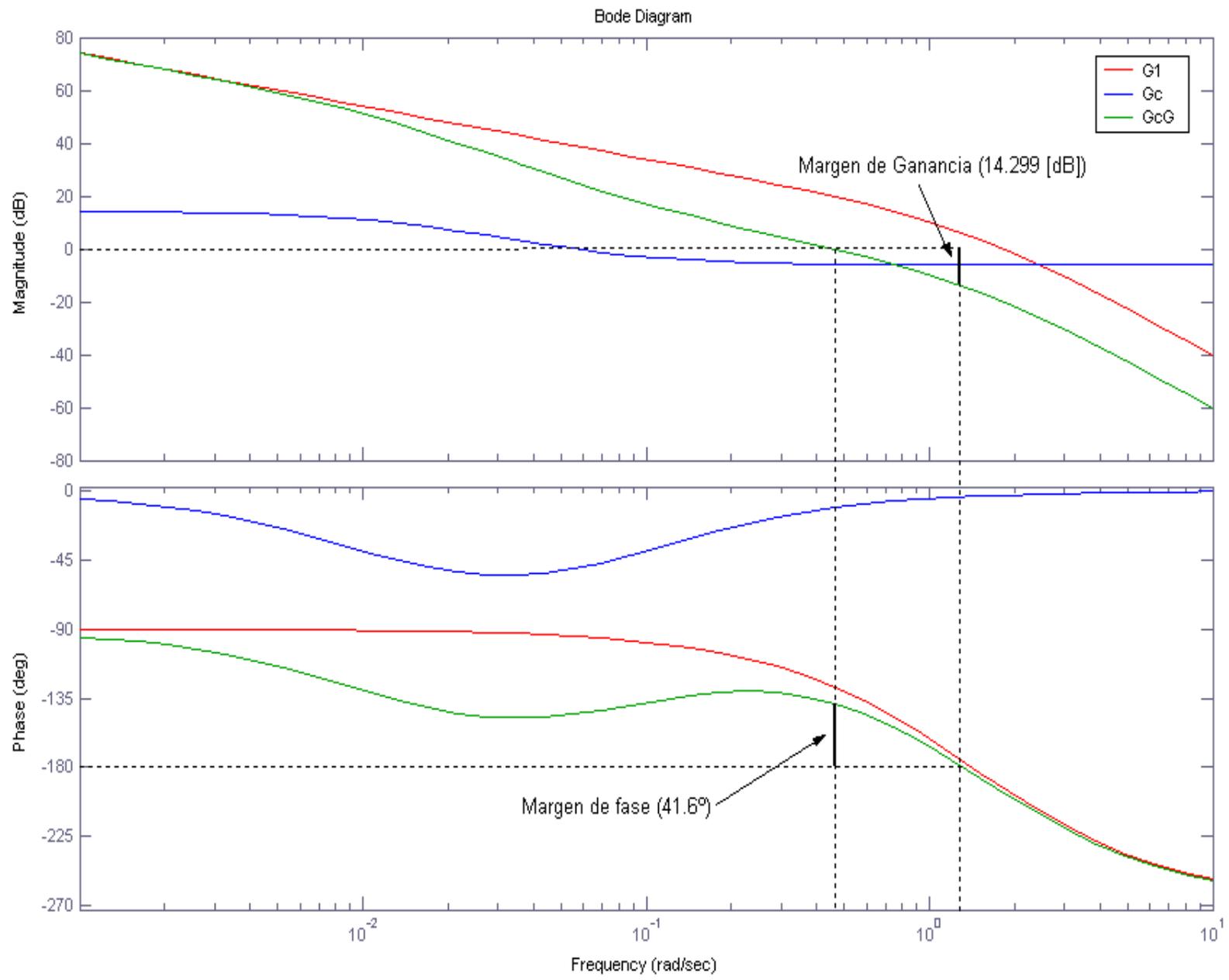
$$\omega = \frac{1}{\beta T} = 0.01 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \rightarrow \text{polo de } G_C(s)$$

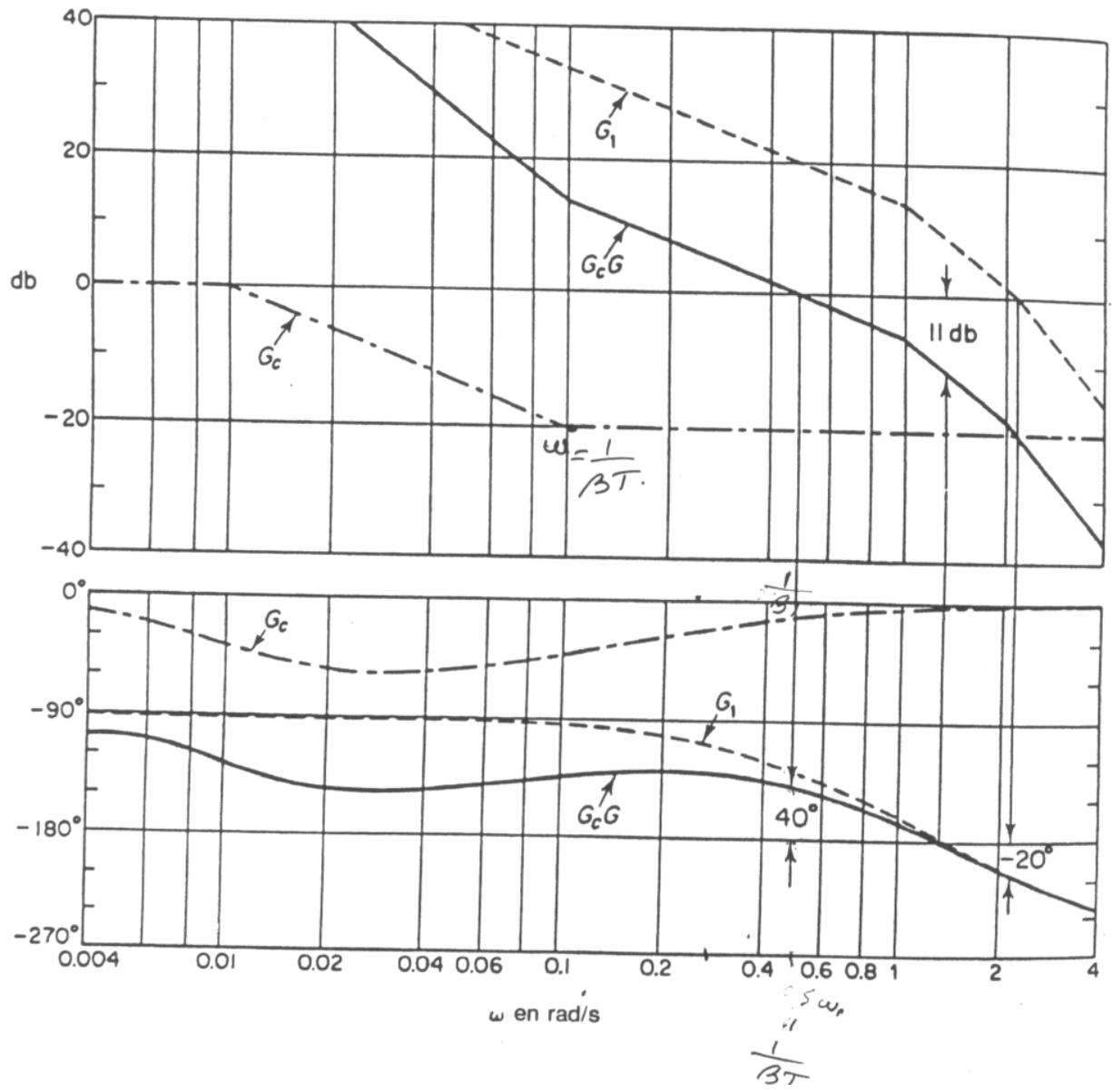
Entonces,

$$G_C(s) = K_C \cdot 10 \frac{10s + 1}{100s + 1}$$

$$K_C = \frac{K}{\beta} = 0.5$$

$$\therefore G_C(s) = 5 \frac{10s + 1}{100s + 1}$$





Método de diseño de controladores discretos en el dominio de la frecuencia

- Obtener $G(z)$.

- Aplicar transformada bilineal.

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}$$

$$G(w) \approx G(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}}$$

- Generar $G(j\omega) = G(w) \Big|_{w = j\omega}$

Método de diseño de controladores discreto en el dominio de la frecuencia

- Graficar el Diagrama de Bode de $G(j\omega)$ para calcular los márgenes de ganancia y de fase.
- Encontrar la ganancia K que satisface K_v .
- Determinar los polos y ceros del controlador $G_D(w)$, similar al procedimiento para sistemas continuos.

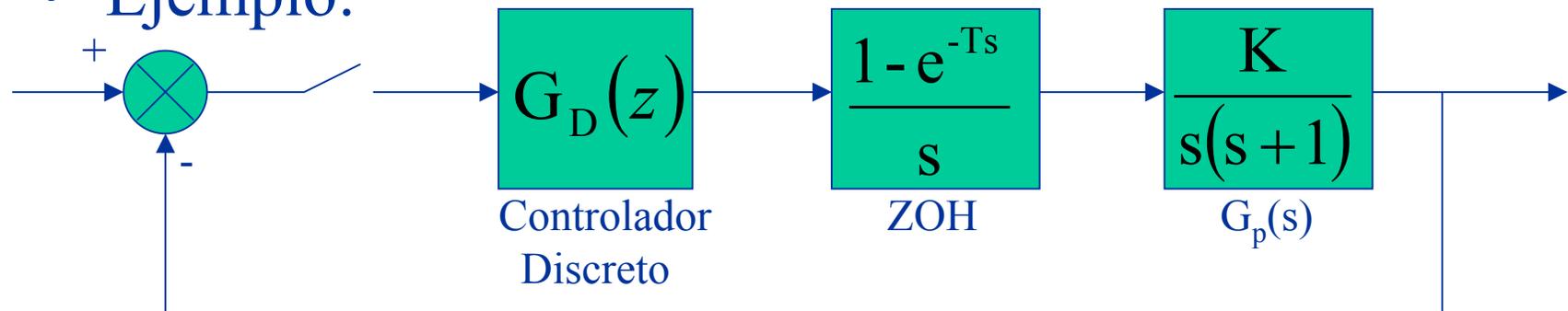
Método de diseño de controladores discretos en el dominio de la frecuencia

- Transformar $G_D(w)$ a $G_D(z)$. Usando la misma definición anterior, pero ahora en forma inversa.

$$G_D(z) = G_D(w) \Big|_{w = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

Método de diseño de controladores discretos en el dominio de la frecuencia

- Ejemplo:



Diseñar un controlador digital en el plano ω tal que el M.F.= 50° , M.G.=10 [dB] y $K_v=2s^{-1}$, con $T=0.2$.

Método de diseño de controladores discreto en el dominio de la frecuencia

$$G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-0.2s}}{s} \frac{K}{s(s+1)} \right\}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{K(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.8187z + 0.8187}$$

- Transformada bilineal. $z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$

Método de diseño de controladores discreto en el dominio de la frecuencia

$$\Rightarrow G(w) \approx \frac{K \left(1 + \frac{w}{300}\right) \left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w+1)}$$

- Compensador $G_D(w) = \frac{1 + Tw}{1 + \alpha Tw} \quad 0 < \alpha < 1$

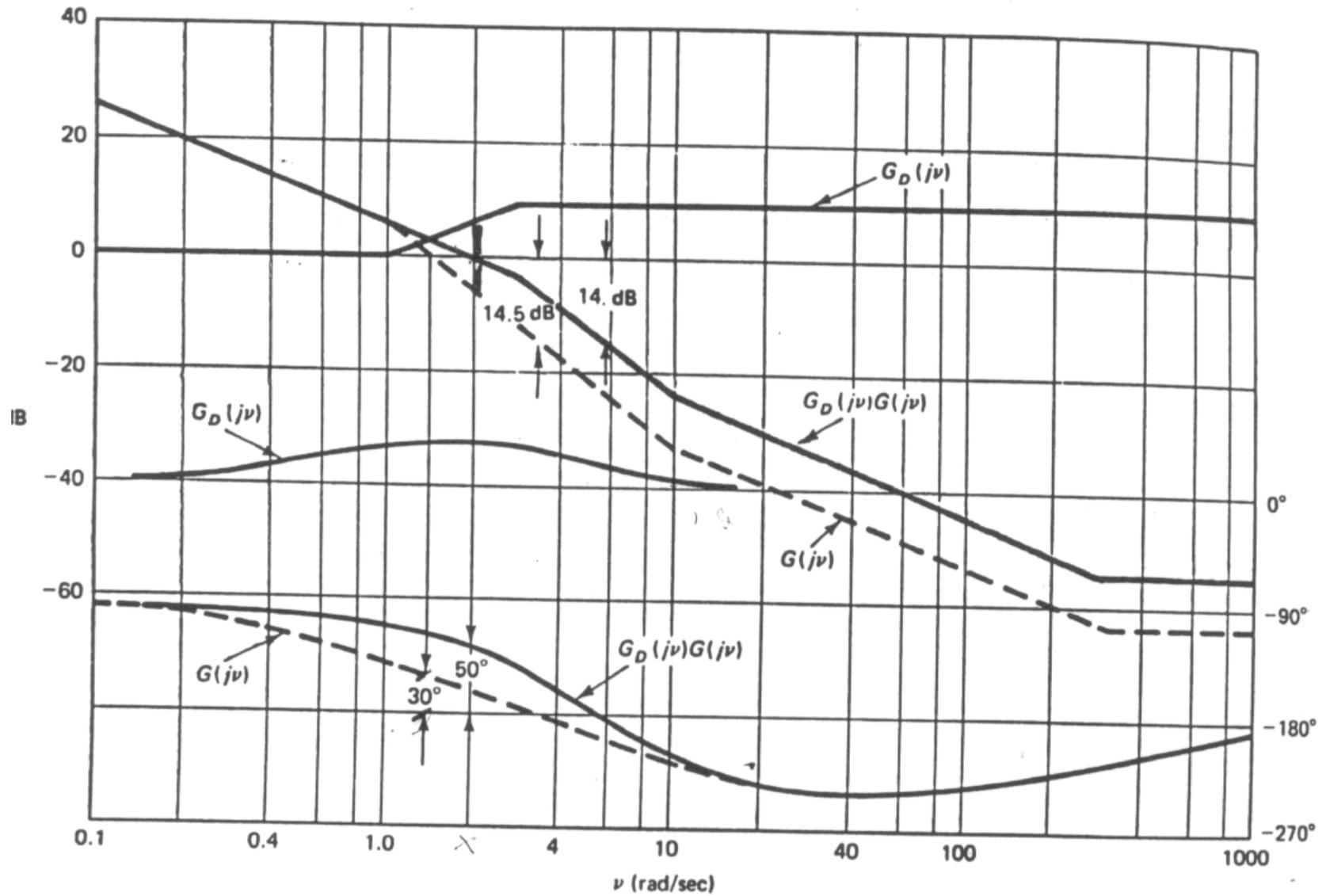
$$G_D(w)G(w) = \left(\frac{1 + Tw}{1 + \alpha Tw} \right) \left(\frac{K \left(1 + \frac{w}{300}\right) \left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w+1)} \right)$$

Método de diseño de controladores discretos en el dominio de la frecuencia

$$K_V = \lim_{w \rightarrow 0} w G_D(w) G(w) = K = 2$$

$$G(w) = \frac{2 \left(1 + \frac{w}{300}\right) \left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w+1)}$$

- Diagrama de Bode $G(j\omega) = \frac{2 \left(1 + \frac{j\omega}{300}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)}{j\omega(j\omega+1)}$



Método de diseño de controladores discreto en el dominio de la frecuencia

- \Rightarrow M.F. = 31.6°
M.G. = 14.3 [dB]
- Como el M.F. requerido es 50° $\Rightarrow \phi = 20^\circ$
 $\Rightarrow \phi_m = 28^\circ$

$$\sin(\phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rightarrow \alpha = 0.361$$

Método de diseño de controladores discreto en el dominio de la frecuencia.

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

- La modificación de la curva de magnitud en ω_m

es:

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T} \right|_{\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1.66$$
$$= 20 \log 1.66 = 4.425 \text{ [dB]}$$

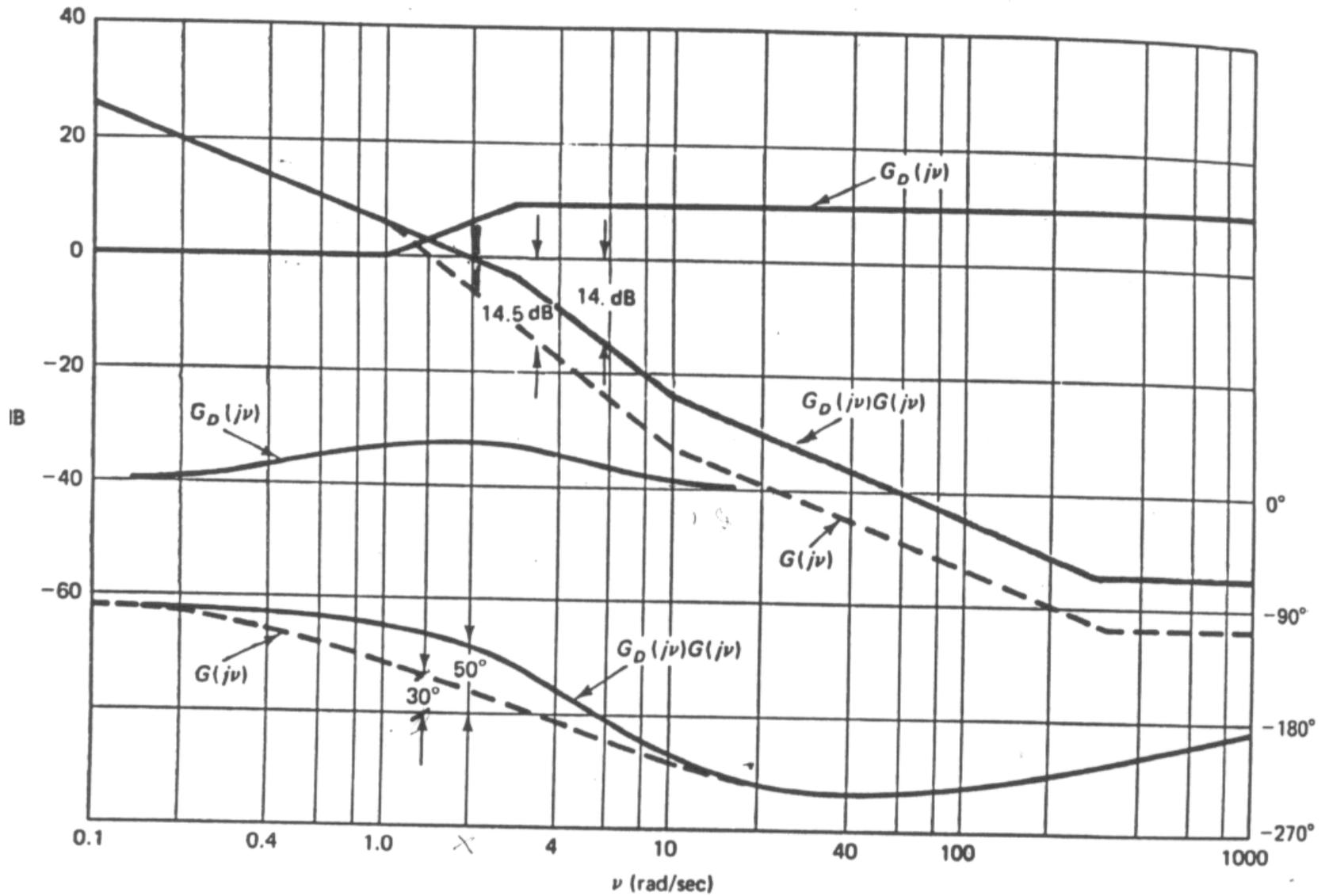
$$|G(j\omega)|_{\omega_c} = -4.4 \text{ [dB]} \rightarrow \omega_c = 1.7 \rightarrow T = 0.979$$

Método de diseño de controladores discretos en el dominio de la frecuencia

$$G_D(w) = \frac{1 + 0.979w}{1 + 0.3534w}$$

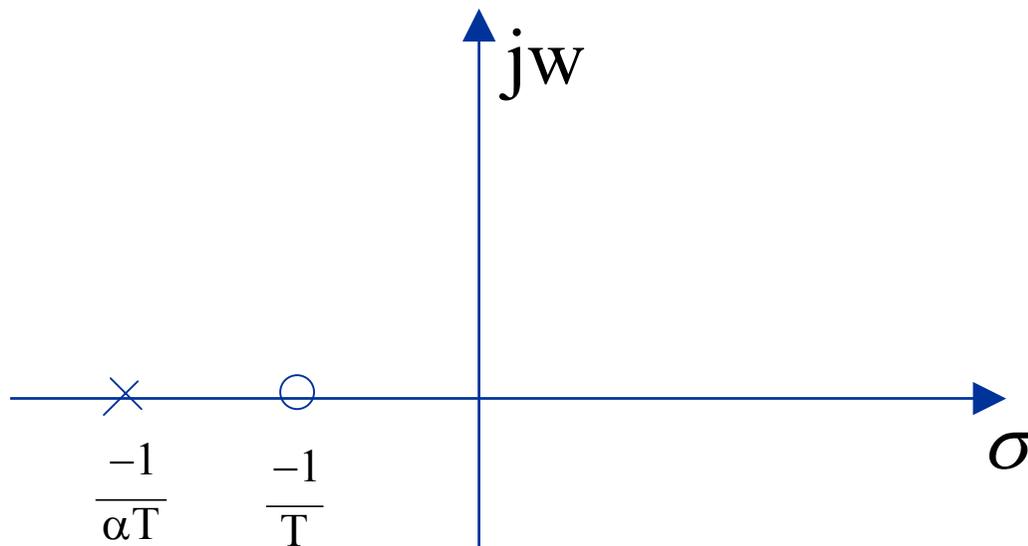
$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{0.2} \frac{z-1}{z+1} = 10 \frac{z-1}{z+1}$$

$$G_D(z) = \frac{2.3798z - 1.9387}{z - 0.5589}$$



Características en el Dominio del Tiempo del Controlador por Adelanto de Fase

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \quad 0 < \alpha < 1$$



Características en el Dominio del Tiempo del Controlador por Adelanto de Fase

Al mover el cero en $-1/T$ hacia el origen se deben mejorar los tiempos de subida t_r y de estabilización t_s .

Si el cero se mueve muy cerca del origen, el sobrepaso máximo se puede incrementar otra vez ya que $-1/T$ también aparece como un cero en la función de transferencia en lazo cerrado.

Características en el Dominio del Tiempo del Controlador por Adelanto de Fase

Al mover el polo en $-1/\alpha T$ lejos del cero y del origen, se debe reducir el sobrepaso máximo, pero si el valor T es muy pequeño, los tiempos de subida y estabilización se incrementan otra vez.

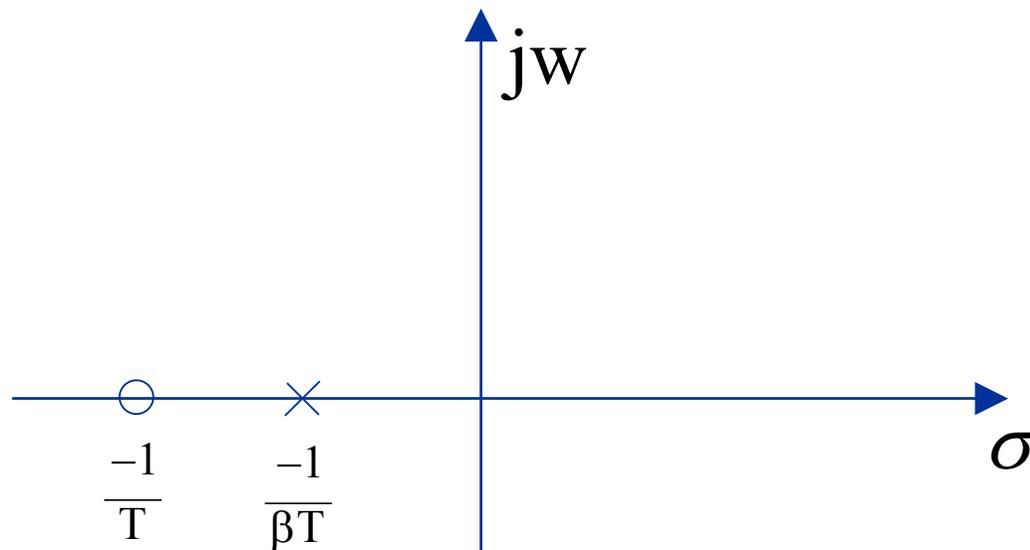
Características en el Dominio del Tiempo del Controlador por Adelanto de Fase

En general:

- 1) Cuando se emplea en forma adecuada, puede incrementar el amortiguamiento del sistema.
- 2) Mejorar los tiempos de subida y la estabilización.

Características en el Dominio del Tiempo del Controlador por Adelanto de Fase

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{(Ts + 1)}{(\beta Ts + 1)} \quad \beta > 1$$



Características en el Dominio del Tiempo del Controlador por Adelanto de Fase

- 1) La respuesta transitoria es más lenta. Aumenta el tiempo de subida y estabilización.
- 2) Funciona como un PI, por lo tanto un sistema cuyo atraso se compensa tiende a volverse menos estable.

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

La parte de adelanto de fase mejora los tiempos de subida y estabilización.

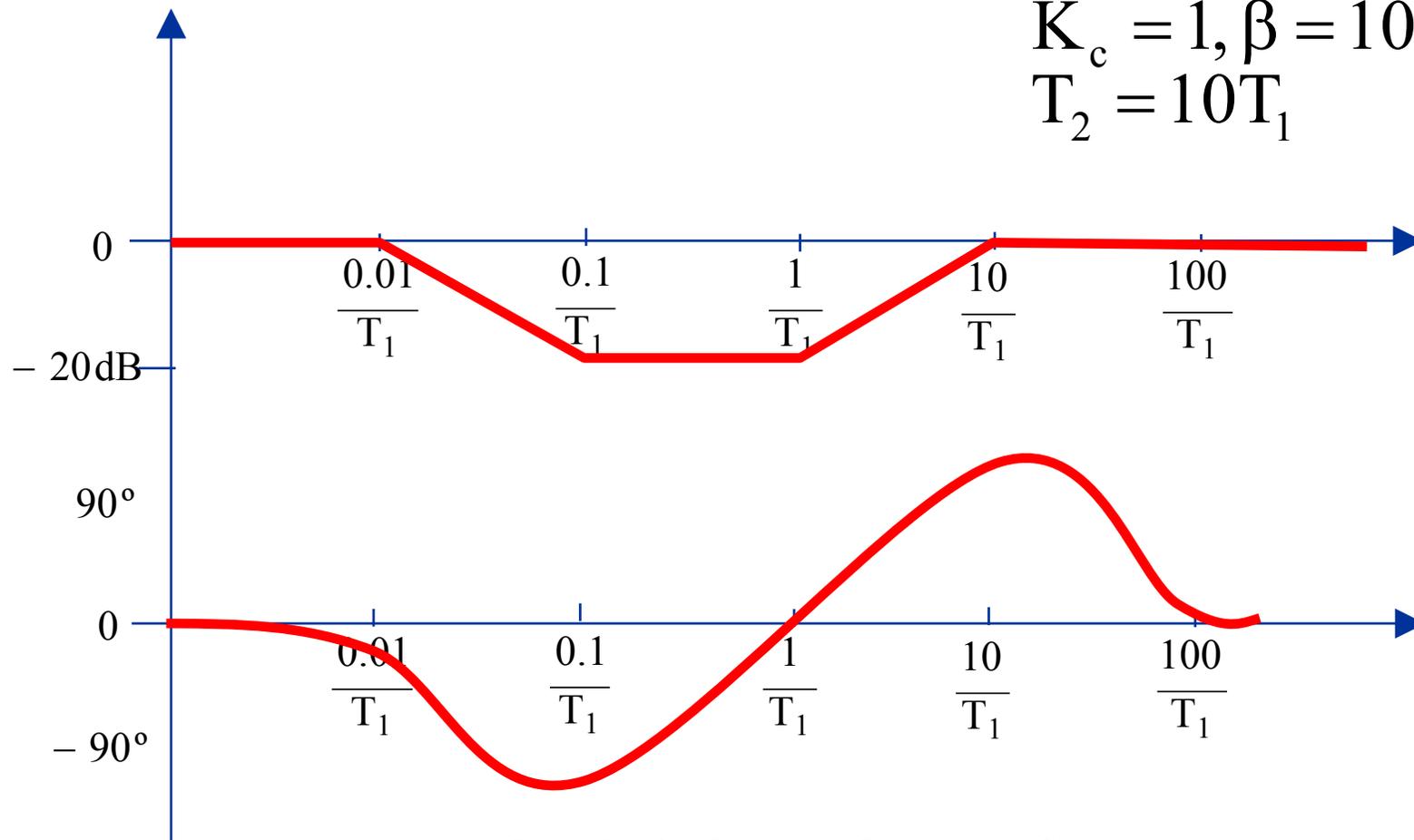
La parte de atraso de fase provee un mejor amortiguamiento del sistema.

$$G_c(s) = \frac{K_c (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1 s}{\beta} + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = \frac{K_c \left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

$$\beta > 1$$

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

$$K_c = 1, \beta = 10$$
$$T_2 = 10T_1$$



Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

Ejemplo:
$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Se quiere que:

$$K_v = 10s^{-1}, MF = 50^\circ, MG \geq 10\text{dB}$$

Compensador por atraso – adelante fase.

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

$$\begin{aligned} 1) \quad K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2} = 10 \\ &\quad \rightarrow K = 20 \end{aligned}$$

pues $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = K_c = 1$

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

2) Diagrama de bode: $G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$

3) Seleccionar nueva frecuencia de cruce.

$$\phi(G_1(j\omega)) = -180^\circ$$

en $\omega = 1.5$

Adelantado de fase requerido es 50° en $\omega=1.5$

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

- 4) Frecuencia de esquina de la parte de atraso de fase del compensador una década abajo de la nueva frecuencia de cruce.

$$w = \frac{1}{T_2} = 0.15$$

$$T_2 = 0.66$$

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

5) Para el compensador por adelanto, ϕ_m es:

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{1 - 1/\beta}{1 + 1/\beta} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

con $\beta = 10, \phi_m = 54,9^\circ$

(cumple con el requisito de MF $\approx 50^\circ$)

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

6) La otra frecuencia de esquina del controlador por atraso es:

$$w = \frac{1}{\beta T_2} \rightarrow w = 0.015$$

$$G_c(s) \text{ del controlador por atraso} = \frac{s + 0.15}{s + 0.015}$$

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

7) Controlador por adelanto, dado que la nueva frecuencia de cruce es: $\omega = 1.5 \text{ seg.}$

$$|G_1(j\omega)|_{\omega=1.5} = 13\text{dB}$$

Dibujar recta con pendiente 20dB/dec que pasa por el punto -13db y 1.5rad/seg.

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

La intersección de esta línea y la línea 0dB con -20dB determinan las frecuencias esquina del compensador por adelanto $\omega = 0.7$ y $\omega = 7$.

$$G_c(s) = \frac{s + 0.7}{s + 7}$$

por adelanto

o bien

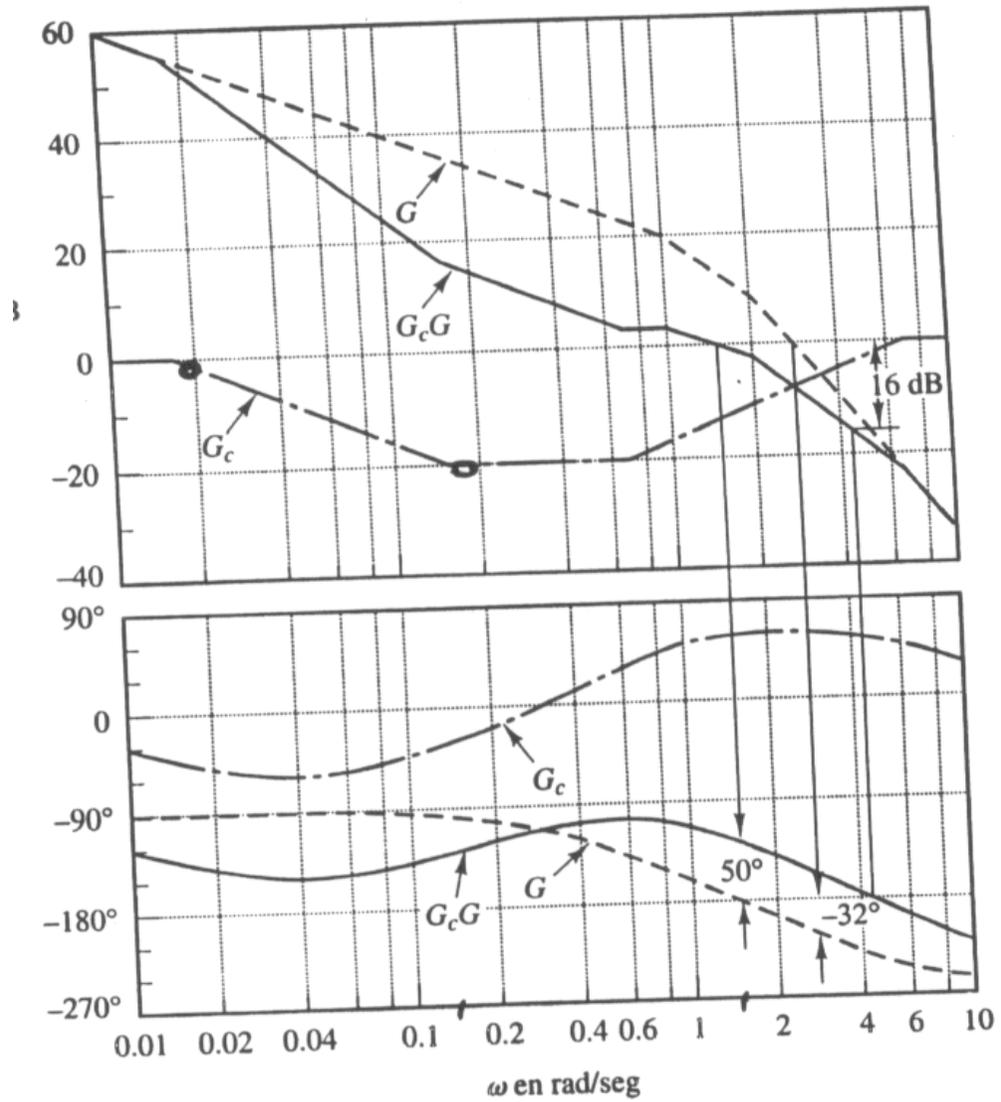
$$20 \log \left| \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{\omega=1.5} = -13\text{dB}$$

$$\beta = 10 \rightarrow T_1 = 1.43$$

Controlador por Atraso – Adelanto de Fase

8) Compensador por atraso y adelanto de fase.

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 0.7}{s + 7} \right) \left(\frac{s + 0.15}{s + 0.015} \right)$$



Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PD

$$G_c(s) = K_p + K_D s$$

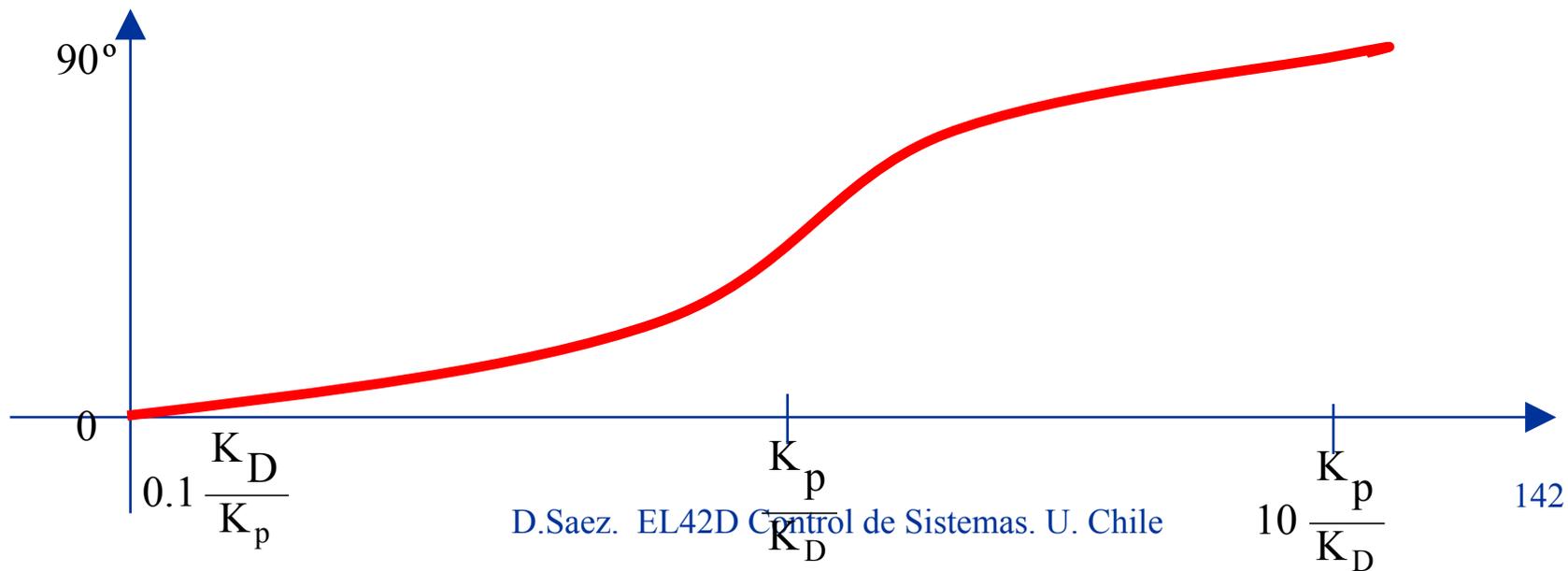
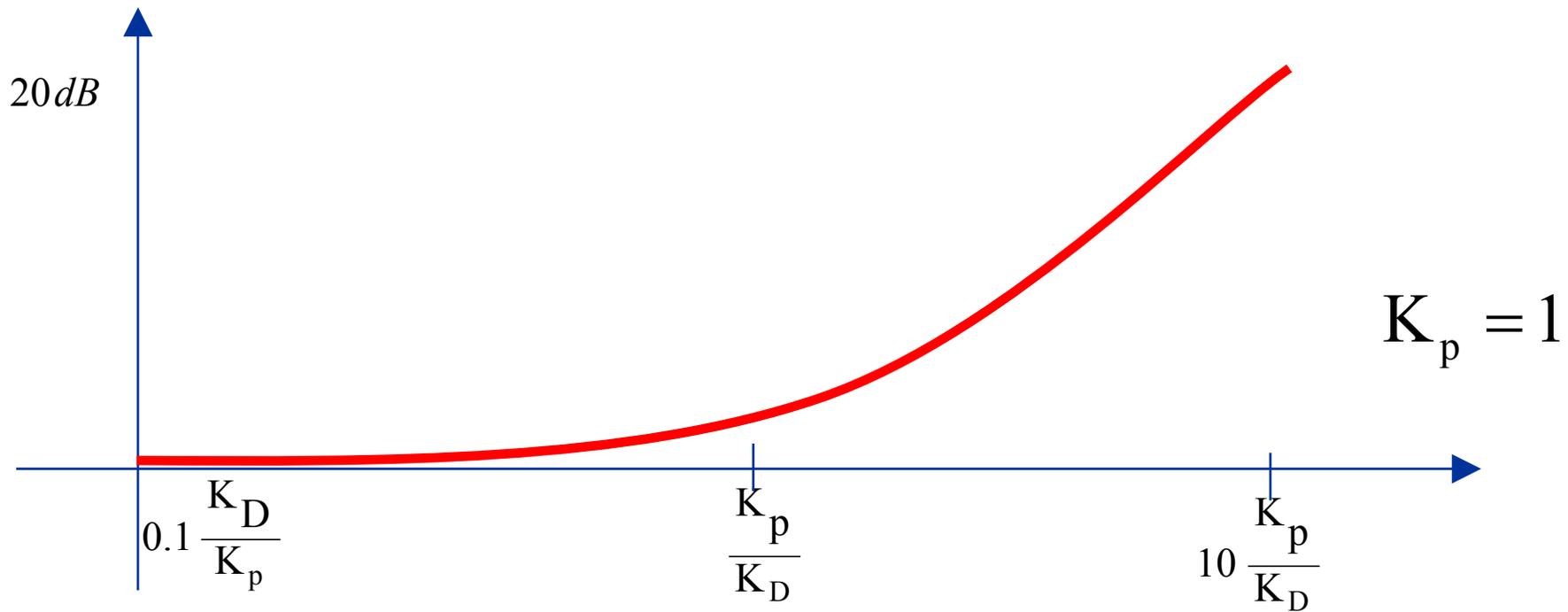
Con el controlador PD se obtiene menores sobrepasos.

El control PD es anticipativo por lo tanto puede anticipar la dirección del error y emplearlo para controlar mejor el proceso.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PD

Interpretación en el dominio de la frecuencia (PD):

$$G_c(j\omega) = K_p + K_D j\omega = K_p \left(1 + \frac{K_D}{K_p} j\omega \right)$$



Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PD

El controlador PD tiene característica de filtro pasaalto.

La propiedad de adelanto de fase se puede utilizar para mejorar el margen de fase de un sistema de control. Sin embargo, la característica de magnitud empuja la frecuencia de cruce de ganancia a un valor más alto.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PD

El principio de diseño del controlador PD involucra el localizar la frecuencia de corte del controlador $\omega = K_p / K_D$, tal que se logre un mejoramiento efectivo del margen de fase en la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

Resumen de los Efectos de un Controlador PD

1. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso máximo.
2. Reduce el tiempo de subida y el tiempo de estabilización.
3. Incrementa el ancho de banda.
4. Puede acentuar el ruido en altas frecuencias.
5. No es efectivo para sistemas inicialmente inestables.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PD

Ejemplo: Considere el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{4500K}{s(s + 316.2)}$$

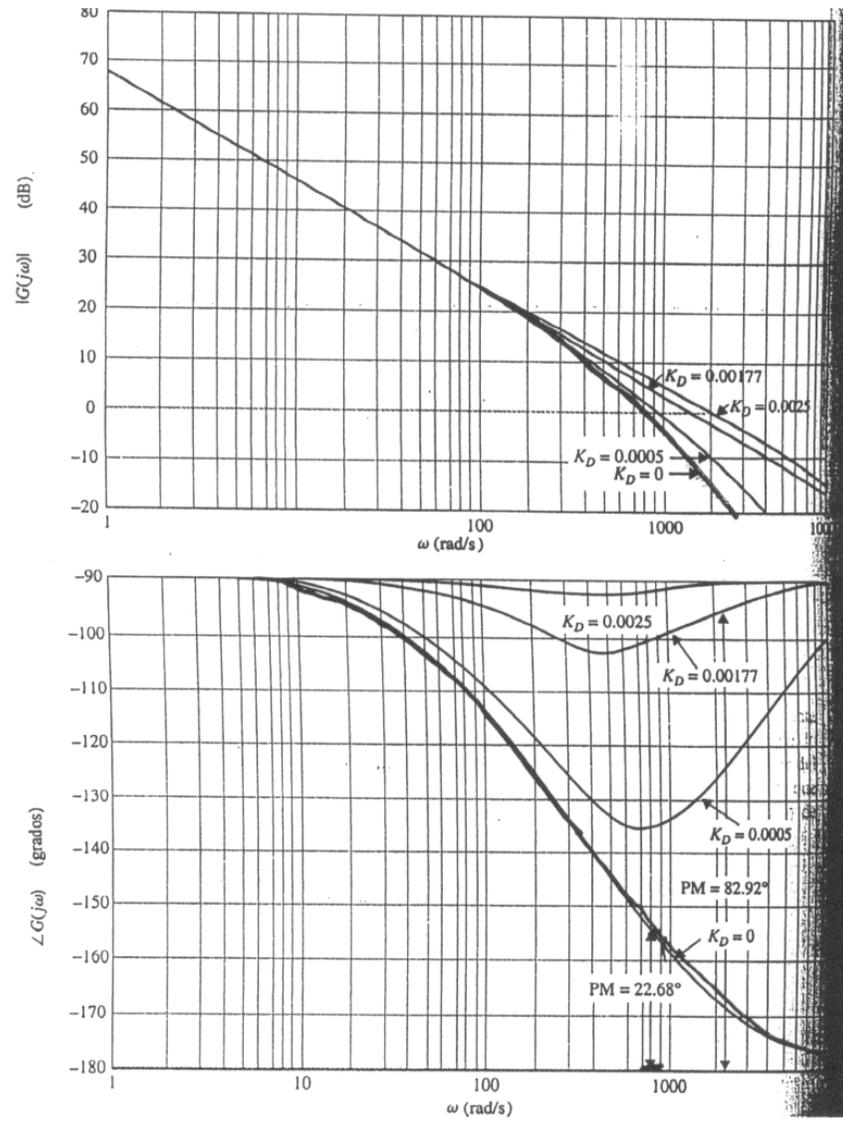
Se desea diseñar un controlador PD tal que el sistema en lazo cerrado cumpla las siguientes especificaciones:

Error en estado estacionario debido a una entrada rampa ≤ 0.0043 , Margen de fase $\geq 80^\circ$.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PD

con $K_D = 0 \rightarrow K = 1 \rightarrow MF = 22,68^\circ$

K_D	MG (dB)	MF (grados)	Cruce de ganancia (rad/s)	BW (rad/s)	M_r	t_r (s)	t_s (s)	Sobre máx (%)
0	∞	22.68	868	1370	2.522	0.00125	0.0151	52
0.0005	∞	46.20	913.5	1326	1.381	0.0076	0.0076	25
0.00177	∞	82.92	1502	1669	1.025	0.00119	0.0049	4
0.0025	∞	88.95	2046	2083	1.000	0.00103	0.0013	0



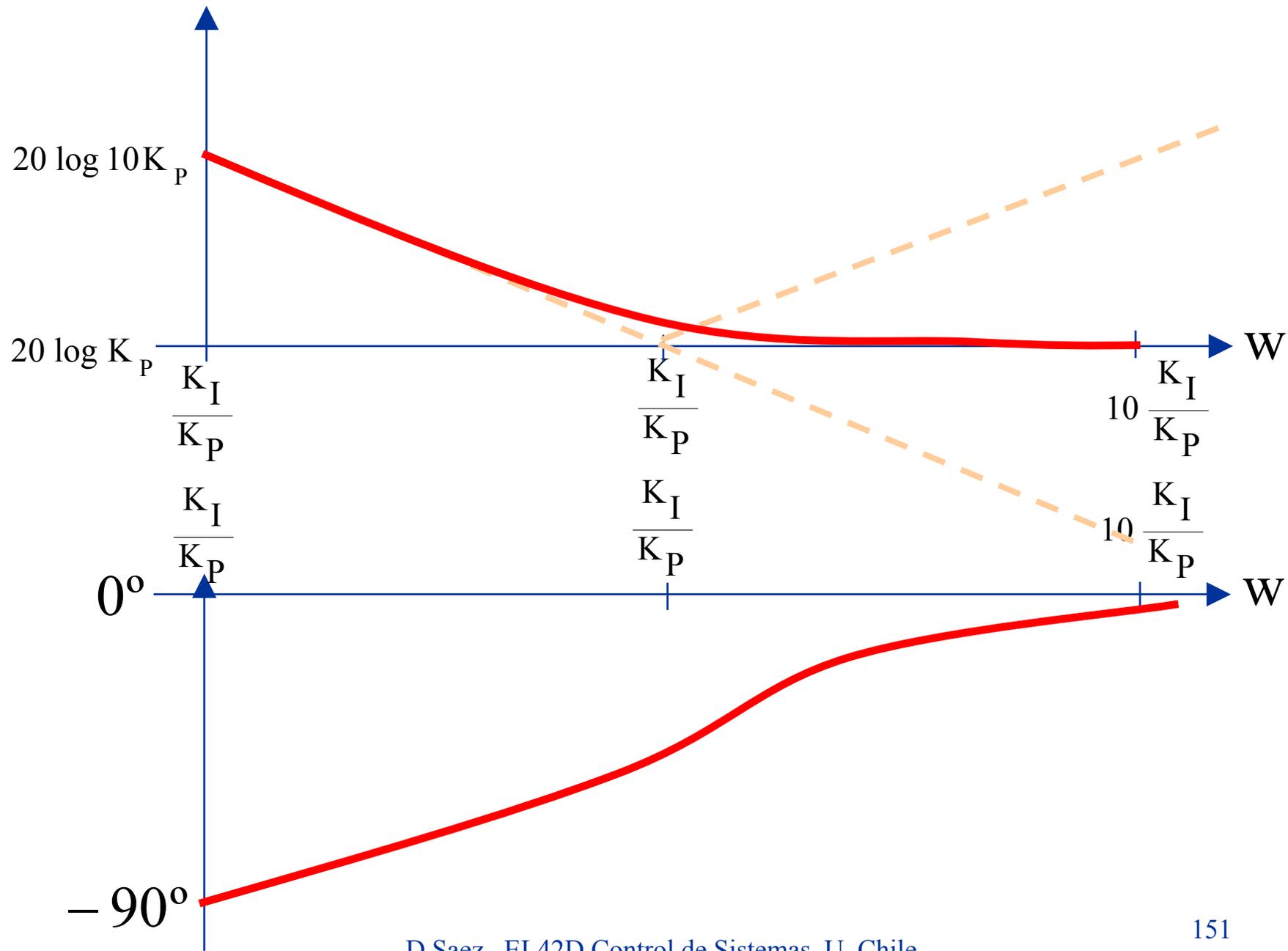
Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

El error en estado estacionario mejora y se obtiene un tiempo de subida más bajo pero el tiempo de estabilización es más largo.

Interpretación en el Dominio de la Frecuencia (PI)

$$G_C(j\omega) = K_p + \frac{K_I}{j\omega} = K_I \frac{(1 + (\frac{K_P}{K_I})j\omega)}{j\omega}$$



Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

1. Calcular la ganancia del sistema compensado con el requisito de desempeño en estado estacionario.
2. Determinar el MF y MG del sistema no compensado.
3. Para el requisito de MF, la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\omega_{g'}$ correspondiente se localiza sobre el diagrama de Bode. El Bode del sistema compensado debe pasar a 0dB en esta nueva frecuencia de cruce de ganancia.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

4. Para llevar la curva de magnitud del sistema no compensado de 0 dB en ω_g' , el controlador PI debe proveer la cantidad de atenuación igual a la ganancia de la curva de magnitud en ω_g' , es decir:

$$\left|G_p(j\omega_g')\right|_{\text{dB}} = -20 \log K_p \text{ dB} \quad K_p < 1$$

$$K_p = 10^{-\left|G_p(j\omega_g')\right|_{\text{dB}} / 20} \quad K_p < 1$$

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

5. Hasta el momento, se ha supuesto que aunque la frecuencia de cruce es alterada para atenuar la magnitud, la fase original no es afectada con el controlador PI. Sin embargo, esto no es posible ya que la propiedad de atenuación del PI está acompañada con un retraso de fase que perjudica el margen de fase.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

Entonces:

$$\frac{K_I}{K_p} = \frac{\omega'_g}{10} \text{ rad/s}$$

6. Se verifican las especificaciones.

Resumen de controladores PI

1. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso máximo.
2. Incrementa el tiempo de subida.
3. Disminuye el ancho banda.
4. Mejora MG y MF.
5. Filtra ruido a alta frecuencia.

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

Ejemplo: Considere el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{4500K}{s(s + 316.2)}$$

Se desea diseñar un controlador PI tal que se cumplan las siguientes especificaciones:

$$MF \geq 65^\circ$$

Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

Solución:

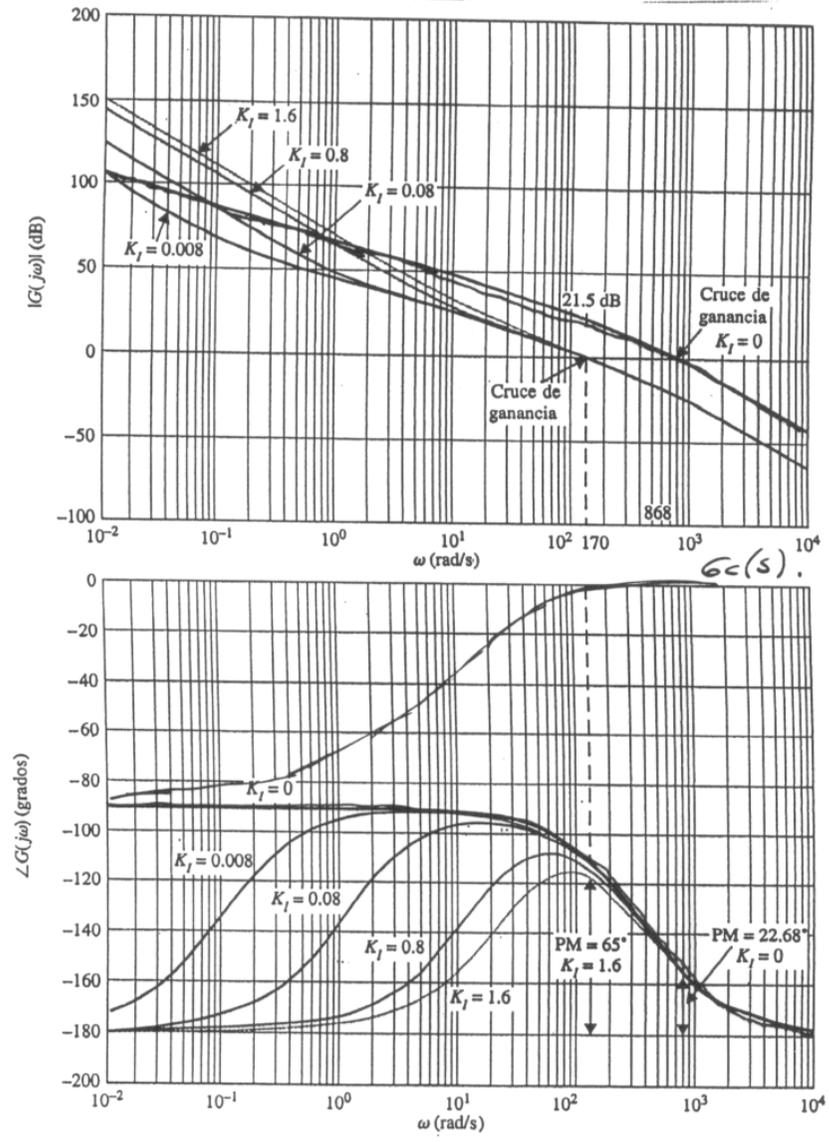
Buscar w_g' tal que MF sea 65° .

$$w_g' = 170 \text{ rad/s}$$

$$|G(jw)|_{170 \text{ rad/s}} = 21,5 \text{ dB}$$

$$K_p = 10^{-|G(jw_g')|_{\text{dB}} / 20} = 0.084$$

$$K_I = \frac{w_g' K_p}{10} = \frac{170 * 0,08}{10} = 1,36$$



Diseño en el Dominio de la Frecuencia con el Controlador PI

K_i/K_p	K_i	K_p	MG (dB)	MF (grados)	M	BW (rad/s)	Grce de ganancia (rad/s)	Grce de fase (rad/s)
0	0	1.00	∞	22.6	2.55	1390.87	868	∞
20	1.6	0.08	∞	58.45	1.12	268.92	165.73	∞
10	0.8	0.08	∞	61.98	1.06	262.38	164.96	∞
5	0.4	0.08	∞	63.75	1.03	258.95	164.77	∞
1	0.08	0.08	∞	65.15	1.01	256.13	164.71	∞
0.1	0.008	0.08	∞	65.47	1.00	255.49	164.70	∞