# EL 42D
# Control de Sistemas

Profesora: Dra. Doris Sáez H.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

# Unidad 5:
# Técnica de Control en Variables de Estado

Elaborado por: D. Sáez, M. Orchard.
Colaboradores: R. Flores, J. Contreras, R. Zúñiga & G. Sáez

# Sistemas de Control en Variables de Estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx + r$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

$$\text{Controlabilidad} : x(t_0)_{u[0,T]} \rightarrow x(T)$$

**Definiciones: Un sistema es controlable en el tiempo $t_0$ si se puede llevar de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.**

$$\text{Si } \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{es invertible o de rango n}$$

$$\Rightarrow \text{Sistema es controlable}$$

# Sistemas de Control en Variables de Estado

Un sistema es observable en el tiempo $t_0$ si con el sistema en el estado $x(t_0)$ es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo finito

$$\text{Observabilidad:}$$

$$\text{Si se conoce } \{u(t), y(t)\}_{[0,T]\det} \rightarrow x(t)_{[0,T]}$$

$$\text{Si } \begin{bmatrix} C & CA & \ldots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \text{ es invertible}$$

$$\text{o de rango n} \Rightarrow \text{el sistema es observable}$$

# Teorema de Invarianza de las Transformaciones

Consideremos el sistema :

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$\bar{y} = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u$$

$$\bar{A} = P^{-1}AP,\ \bar{B} = P^{-1}B \quad y \quad \bar{C} = CP$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} P^{-1}B & P^{-1}APP^{-1}B & \cdots & \left(P^{-1}AP\right)^{n-1}P^{-1}B \end{bmatrix}$$

# Teorema de Invarianza de las Transformaciones

$$S = P^{-1}\left[B \quad APP^{-1}B \quad \cdots \quad P^{n-1}A^{n-1}P^{-n+1}B\right]$$

$$S = P^{-1}\left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right]$$

De forma similar $\left[C \quad CA \quad \ldots \quad CA^{n-1}\right]^T$

debe ser invertible para que el sistema sea obserbable

# Teorema de Controlabilidad para Sistemas de Lazo Cerrado con Retroalimentación de Estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$u = -Kx + r$$

La ecuación de lazo cerrado esta dada por :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x + Br$$

Si $[A, B]$ no es controlable no existe K tal que el par $[A\text{-}BK, B]$ sea controlable

# Teorema de Observabilidad para Sistemas de Lazo Cerrado con Retroalimentación de Estado

La observabilidad del lazo abierto y lazo cerrado debido a la retroalimentación del estado no están relacionados.

# Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

Ubicación de polos del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t): \quad \text{Lazo abierto}$$

$$u(t) = -Kx(t) + r(t): \quad \text{Controlador}$$

$K$ : Matriz de retroalimentación $1 \times n$ elementos de con ganancia constante

# Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

## Sistemas en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t)$$

Si $[A, B]$ es controlable, entonces existe

K tal que las raices de lazo cerrado

se pueden ubicar arbitrariamente

Ecuación característica :

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

# Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

Sistema controlable

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}^T$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 - K_1 & -a_1 - K_2 & -a_2 - K_3 & \cdots & -a_{n-1} - K_n \end{bmatrix}$$

# Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

$$\det(sI - A + BK) =$$

$$s^n + (a_{n-1} - K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 - K_2)s + (a_0 - K_1)$$

Entonces al asignar las raíces en los polos deseados, se obtiene un sistema de ecuaciones que se debe resolver para determinar K.

# Diseño de Controladores de Sistemas Discretos por Ubicación de Polos

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$u(k) = -Kx(k)$$

Entonces

$$x(k+1) = (G - HK)x(k)$$

Elegir K tal que los valores propios de G-HK se sitúen en los polos deseados en lazo cerrado.

# Observador de Estado

- Un observador de estado estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y las variables manipuladas.
- Los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.

# Observador de Estado

$\tilde{x}$ : Vector de estado observado

Sistema :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

El estado x se aproxima por el estado $\tilde{x}$

# Observador de Estado

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x})$$

Notese que el observador tiene como entradas u e y,

y como salida se obtiene $\tilde{x}$

$K_e$ : Matriz de ponderación de la correción

# Observador de Estado

## Ecuación error del observador

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x})$$

Se define el vector de error e :

$$e = x - \tilde{x}$$

Se tiene que :

$$\dot{e} = (A - K_e C)e$$

# Observador de Estado

Los comportamientos de e quedan determinados por los polos de $(A - K_e C)$

Si $(A\text{-}K_eC)$ es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier condición inicial e(0), es decir:

$x_{estimado} \rightarrow x$ independiente de $x_{estimado}(0)$ y x(0).

# Observador de Estado

Problema: Seleccionar $K_e$ talque $A-K_eC$ tenga los valores característicos arbitrariamente deseados (comportamiento del vector error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido.

# Función de Transferencia para el Controlador-Observador

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -K\tilde{x}$$

Suponemos que el estado x no es accesible

Ecuacion del observador:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y$$

# Función de Transferencia para el Controlador-Observador

Aplicando transformada de Laplace:

$$U(S) = -K\tilde{X}(S)$$

$$S\tilde{X}(S) = (A - K_e C)\tilde{X}(S) + BU(S) + K_e Y(S)$$

Condiciones iniciales $\tilde{x}(0) = 0$

$$S\tilde{X}(S) = (A - K_e C)\tilde{X}(S) - BK\tilde{X}(S) + K_e Y(S)$$

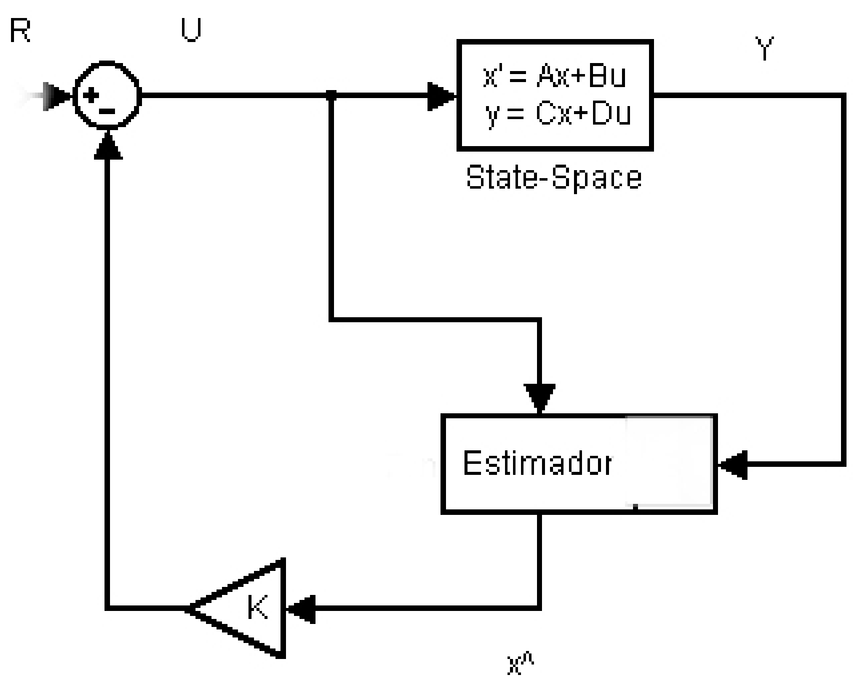
$$\tilde{X}(S) = (SI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(S)$$

$$U(S) = -K(SI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(S)$$

# Función de Transferencia para el Controlador-Observador

Función de transferencia observador - controlador:

$$\frac{U(S)}{Y(S)} = -K(SI - A + K_eC + BK)^{-1}K_e$$



# Observador de Orden Mínimo

"Los observadores clásicos se diseñan para reconstruir todas las variables de estado. En la práctica, algunas de las variables de estado se miden con precisión y no necesitan estimarse."

# Observador de Orden Mínimo

- Considere el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx \qquad \text{(una salida)}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{escalar} \\ \\ \longrightarrow \text{dimensión n-1} \end{array}$$

$x_b$ no es medible.

# Observador de Orden Mínimo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

# Observador de Orden Mínimo

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u$$

$$\underbrace{\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u}_{\text{conocido}} = A_{ab}x_b \longrightarrow \text{Nueva Ec. de salida}$$

Parte no medida del estado:

$$\dot{x}_b = \underbrace{A_{ba}x_a}_{\text{conocido}} + A_{bb}x_b + \underbrace{B_b u}_{\text{conocido}} \longrightarrow \text{Nueva Ec. de estado}$$

# Observadores de Estado

- Obs. orden completo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y$$

- Obs. orden mínimo

$$\dot{x}_b = A_{bb} x_b + A_{ba} x_a + B_b u$$

$$\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u = A_{ab} x_b$$

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{x}_b + A_{ba} x_a + B_b u + K_e(\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u) \qquad (*)$$

# Observador de Orden Mínimo

- En el observador de orden mínimo $K_e$ es una matriz de (n-1) x 1 elementos
- El observador orden mínimo requiere $\dot{x}_a$, lo cual no es conveniente
- Se considera $x_a = y$

# Observador de Orden Mínimo

La ecuación (*) es:

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{x}_b + A_{ba} x_a + B_b u + K_e(\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{x}_b + (A_{ba} - K_e A_{aa})y \\ &\quad + (B_b - K_e B_a)u + K_e y(A_{bb} - K_e A_{ab}) - K_e y(A_{bb} - K_e A_{ab})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab})(\tilde{x}_b - K_e y) \\ &\quad + \left[(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}\right]y + (B_b - K_e B_a)u\end{aligned}$$

Se define

$$\eta = x_b - K_e y = x_b - K_e x_a$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{x}_b - K_e x_a$$

# Observador de Orden Mínimo

La ecuación del observador de orden mínimo es:

$$\dot{\tilde{\eta}} = (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{\eta} + \left[(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}\right]y$$
$$+ (B_b - K_e B_a)u$$

$$\tilde{x}_b = \tilde{\eta} + K_e x_a$$

# Ecuación del Error del Observador

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + K_e A_{ab} x_b$$

$$\dot{x}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b u$$

$$\dot{x}_b - \dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})(x_b - \tilde{x}_b)$$

$$\varepsilon = x_b - \tilde{x}_b = \eta - \tilde{\eta}$$

$$\dot{\varepsilon} = (A_{bb} - K_e A_{ab})\varepsilon$$

# Ecuación del Error del Observador

Condición de observabilidad

$$\begin{bmatrix} A_{ab} & \\ A_{ab} & A_{bb} \\ . & . \\ . & . \\ A_{ab} & A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix} \quad \text{invertible o de rango n-1}$$

# Observador de Orden Mínimo

Ecuación característica del observador

$$\det(SI - A_{bb} + K_e A_{ab}) = (S - u_1)(S - u_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S - u_{n-1}) = 0$$

$u_1$, $u_2$,………………, $u_{n-1}$ valores característicos para el observador de orden mínimo.

$K_e$ se determina a partir de $u_i$ deseados.

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

Cuando la planta tiene integración se tiene:

Supongamos $y = x_1$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Ley de Control:

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0 & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{bmatrix} x + k_n (r - x_1)$$

$$u(t) = -\begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{bmatrix} x + k_n r$$

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

Ley de Control:

$$u(t) = -\begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{bmatrix} x + k_n r$$

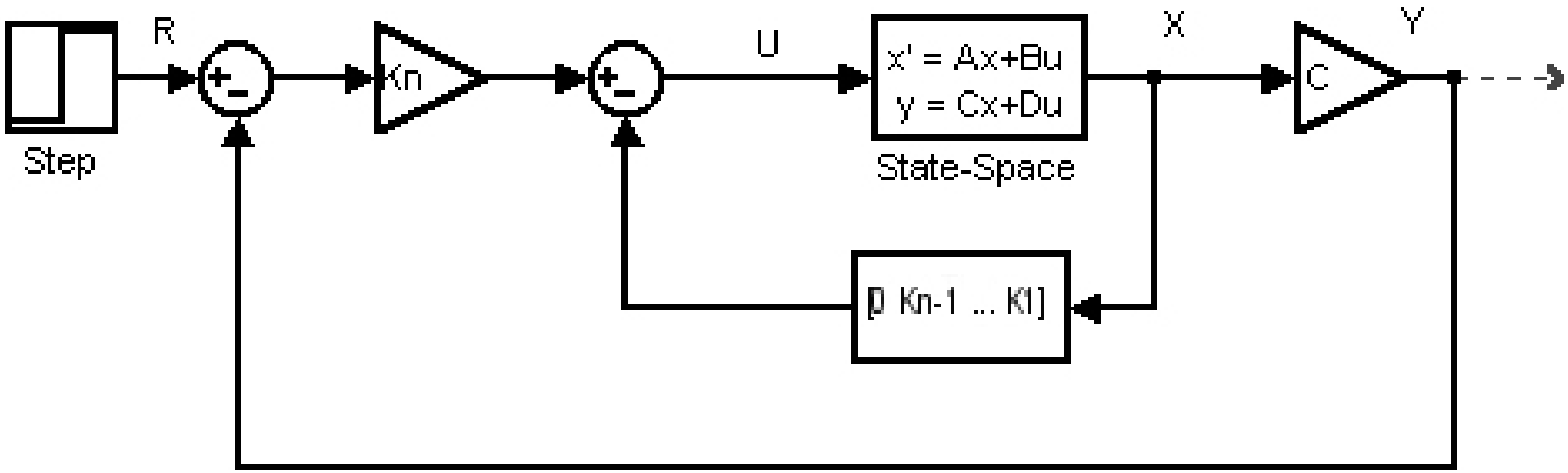
$$u(t) = -Kx + k_n r$$

Lazo cerrado

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_n r$$

Fijar polos para (A-BK) en lazo cerrado

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia



# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

Caso general: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$y(t) = Cx(t)$$

$\dot{z} = r - Cx$ (Se define)

$$u(t) = -Kx(t) + K_I z(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

En estado estacionario

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{z}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ z(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{z}(t) - \dot{z}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ z(t) - z(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)]$$

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

Se define

$$x_e = x(t) - x(\infty)$$

$$z_e = z(t) - z(\infty)$$

$$u_e = u(t) - u(\infty)$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e$$

Ley de Control:

$$u_e(t) = -Kx_e(t) + k_I z_e$$

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

Calculo de valores en estado estacionario

$$\dot{x}(\infty) = 0 = Ax(\infty) + Bu(\infty)$$
$$\dot{z}(\infty) = 0 = r - Cx(\infty)$$

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_I z(\infty)$$

# Control en Variables de Estado con Seguimiento de Referencia

Entonces
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e$$

Ley de Control: $u_e(t) = -Kx_e(t) + k_I z_e$

$$u(t) - u(\infty) = -K\big(x(t) - x(\infty)\big) + k_I\big(z(t) - z(\infty)\big)$$

$$\boxed{u(t) = -Kx(t) + k_I z(t)}$$

# Control Optimo Cuadrático

- "Se considera el diseño de sistemas de control basado en los índices de desempeño cuadrático"
- Modelo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Problema:

  Seleccionar el vector de control u(t) tal que un índice de desempeño determinado se minimice.

$$J = \int_0^{\infty} L(x,u)dt$$

# Control Optimo Cuadrático

- Solución:

$$u(t) = -Kx(t)$$

- Consideremos que:

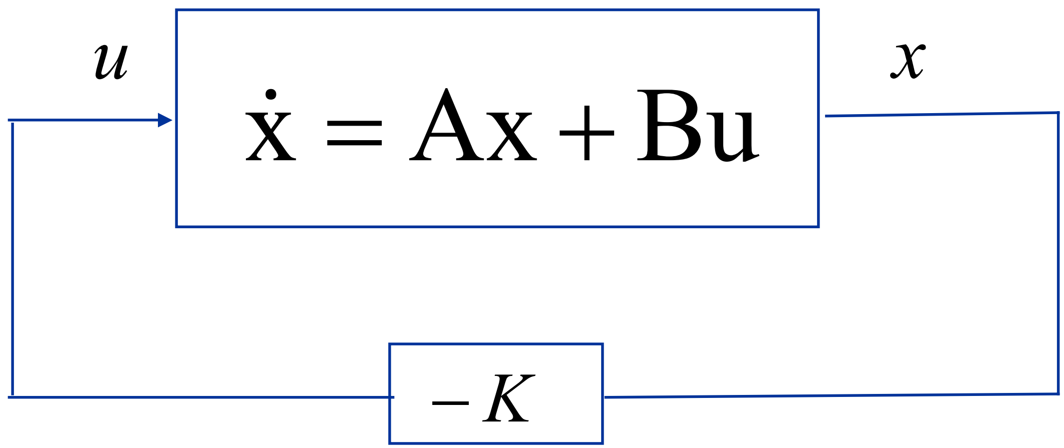
$$\underset{u}{\text{Min}}\; J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva, y R es una matriz simétrica definida positiva, u no está restringida.

# Control Optimo Cuadrático

- Solución:

$$u(t) = -Kx(t)$$



# Principio del Máximo

- Problema:

$$\dot{x} = \rho(x, u)$$

$$x \in R^n \qquad u \in R^n$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u)dt$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad x(t_f) = x_f$$

# Principio del Máximo

- Solución:

$$1)\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

con $H = L(x,u) + \lambda f(x,u)$ Hamiltoniano

$$2)\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

# Aplicación del Principio del Máximo al Control Optimo Cuadrático

- Problema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

$$u(t) = -Kx(t)$$

- Solución:

$$H = x^T Q x + u^T R u + \lambda (Ax + Bu)$$

# Aplicación del Principio del Máximo al Control Optimo Cuadrático

- Solución: $H = x^T Q x + u^T R u + \lambda (Ax + Bu)$

$$1)\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} = Qx + A^T \lambda$$

$$2)\ \frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0$$

# Aplicación del Principio del Máximo al Control Optimo Cuadrático

- Se define $\lambda = Px$

  con P matriz positiva definida

- Entonces $\dot{\lambda} = P\dot{x} = P(Ax + Bu)$

- De 1) y con $\dot{\lambda} = PAx + PBu$

$$-PAx - PBu = Qx + A^T Px \quad 3)$$

# Aplicación del Principio del Máximo al Control Optimo Cuadrático

- De 2) $u = -\underbrace{R^{-1}B^{T}P}_{K}X$ 4) $\qquad u = -Kx$

$$K = R^{-1}B^{T}P$$

- Reemplazando 4) en 3) se tiene:

$$-PAx + PBR^{-1}B^{T}Px - Qx - A^{T}Px = 0$$

$$A^{T}P + PA - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0$$

**Ecuación de Ricatti**

# Diseño de un Controlador Optimo Cuadrático (LQR)

1.- Resolver la ecuación matricial de Ricatti para la matriz P.

(Si existe una matriz P definida positiva, el sistema es estable o la matriz A-BK es estable).

2.- Sustituya la matriz P en la ecuación 4). La matriz K resultante es la matiz óptima.

# Control Optimo Cuadrático para Sistemas Discretos

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

Índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left[x(k)^T Qx(k) + u(k)^T Ru(k)\right]$$

Solución: Ecuación de Ricatti

$$P = Q + G^T PG - G^T PH(R + H^T PH)^{-1} H^T PG \quad (*)$$

con P simétrica positiva definida

$$\boxed{u(k) = -Kx(k)} \qquad K = (R + H^T PH)^{-1} H^T PG$$

# Control Optimo Cuadrático para Sistemas Discretos

Lema de inversión de matrices

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I+(A^{-1}B))^{-1}CA$$

Ecuación de Ricatti

$$A = I \quad B = H \quad C = R^{-1}H^{T}P$$

$$P = Q + G^{T}P(I+HR^{-1}H^{T}P)^{-1}G$$

# Controlador Optimo Lineal con Seguimiento de Referencia

Sea el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ (1)

$y = Cx$ (2)

Problema: Se desea que y(t) siga a $y^*(t)$ y que el esfuerzo de control sea pequeño.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[(y^* - \underbrace{Cx}_{y})^T Q(y^* - \underbrace{Cx}_{y}) + u^t R u\right]dt$$

$$x(t_f) \in R^n$$

$$x(t_f) = 0$$

con Q y R matrices simétricas definidas positivas.

# Solución usando el Principio del Máximo

$$H = \frac{1}{2}(y^* - Cx)^T Q (y^* - Cx) + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda (Ax + Bu)$$

$$1)\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} = -(y^* - Cx)^T QC + \lambda A \quad (3)\ *$$

$$2)\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 = u^T R + \lambda B = 0 \quad (4)$$

# Solución usando el Principio del Máximo

De (4) $$u^T = -\lambda B R^{-1}$$

$$u = -R^{-1} B^T \lambda^T$$

De (1) $$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BR^{-1} B^T \lambda^T$$

De (3) $$\dot{\lambda}^T = -A^T \lambda^T + C^T Q (y^* - Cx)$$

$$\dot{\lambda}^T = -A^T \lambda^T - C^T Q C x + C^T Q y^*$$

$$\lambda^T(t_f) = 0$$

# Solución usando el Principio del Máximo

Se define: S y G, tal que

$$\lambda^T = Sx + G \quad (5) \qquad\qquad u = -Kx + C$$

Utilizando (5) en las ecuaciones anteriores.

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T(Sx + G)$$

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^TSx - BR^{-1}B^TG$$

$$\dot{\lambda}^T = \dot{S}x + S\dot{x} + \dot{G}$$

$$\dot{\lambda}^T = -A^T(Sx + G) + C^TQ(y^* - Cx)$$

# Solución usando el Principio del Máximo

$$\dot{S}x + S(Ax - BR^{-1}B^{T}Sx - BR^{-1}B^{T}G) + \dot{G} =$$

$$-A^{T}Sx - A^{T}G + C^{T}Qy^{*} - C^{T}QCx$$

$$(\dot{S} + SA + A^{T}S - SBR^{-1}B^{T}S + C^{T}QC)x$$

$$+(\dot{G} + (A^{T} - SBR^{-1}B^{T})G - C^{T}Qy^{*}) = 0$$

$$\dot{S} + SA + A^{T}S - SBR^{-1}B^{T}S + C^{T}QC = 0$$

$$\dot{G} + (A^{T} - SBR^{-1}B^{T})G - C^{T}Qy^{*} = 0$$

con $S(t_f) = 0 \; G(t_f) = 0 \quad \lambda(t_f) = 0 \quad \underbrace{S(t_f)}_{0}x(t_f) + \underbrace{G(t_f)}_{0}$

# Solución usando el Principio del Máximo

Ley de Control:

$$u(t) = -R^{-1}B^{T}\lambda^{T}$$

$$u(t) = -R^{-1}B^{T}(Sx + G)$$

$$u(t) = \underbrace{-R^{-1}B^{T}S}_{-K}x - \underbrace{R^{-1}B^{T}G}_{H}$$

$$\boxed{u(t) = -Kx + H}$$

# LQR: Aplicación de Estabilidad de Lyapunov

Planta $\dot{x} = Ax + Bu$

Función objetivo: $J = \int_0^\infty L(x,u)dt$

Ley de control: $u(t) = -Kx(t)$

# LQR: Aplicación de Estabilidad de Lyapunov

Problema de optimización usando el 2º método de Lyapunov

Considere $\dot{x} = Ax$

Se desea minimizar $J = \int_0^\infty x^T Q x \, dt$ donde Q es positiva definida

Se considera la función de Lyapunov para resolver el problema $x^T Q x = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$

con P positivo definido

$$x^T Q x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x}$$
$$x^T Q x = -x^T A^T P x - x^T P A x = -x^T (A^T P + P A) x$$

Basado en el 2º método de Lyapunov, para un Q dado existe P tal que A es estable, es decir

$$A^T P + P A = -Q \quad \therefore \text{se determina P}$$

Entonces el índice J está dado por:

$$J = \int_0^{\infty} \underbrace{x^T Q x =}_{-\frac{d}{dt} x^T P x} - x^t P x \,\Big|_0^{\infty}$$

$$= -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0)$$

Como A es estable $x(\infty) \to 0$ , entonces

$$J = x^T(0) P x(0)$$

Valor función objetivo que depende de x(0) y P. Además P depende de A y Q

# LQR usando Función de Lyapunov

Planta: $\dot{x} = Ax + Bu$

Función objetivo: $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$

Ley de control: $u = -Kx$

# LQR usando Función de Lyapunov

Se asume que A-BK es estable. Entonces

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt$$

Considerando

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$$

# LQR usando
# Función de Lyapunov

Entonces, $x^T(Q+K^TRK)x = -\dot{x}^TPx - x^TP\dot{x}$

con $\dot{x} = (A-BK)x$

$$x^T(Q+K^TRK)x = -x^T(A-BK)^TPx - x^TP(A-BK)x$$
$$x^T(Q+K^TRK)x = -x^T\left[(A-BK)^TP + P(A-BK)\right]x$$

Igualando

$$-(Q+K^TRK) = (A-BK)^TP + P(A-BK) \quad *$$

# LQR usando Función de Lyapunov

Si A-BK estable, existe P que satisface esta ecuación *.

Nuestra función objetivo es:

$$J = \int x^T (Q + K^T RK) x dt = -x^T Px \,|_0^{\infty}$$

$$J = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0)$$

# LQR usando Función de Lyapunov

Se asume $R = T^T T$ con T no singular

De la ecuación *, se tiene:

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T R K = 0$$
$$A^T P + PA - K^T B^T P - PBK + K^T T^T T K + Q = 0$$

$$A^T P + PA$$
$$+[TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

# LQR usando Función de Lyapunov

La minimización de J con respecto a K requiere la

$$\min x^T\left[(TK-(T^T)^{-1}B^TP)^T(TK-(T^T)^{-1}BP)\right]x \qquad **$$

con respecto a K

$$TK=(T^T)^{-1}B^TP \qquad \text{cuando ** es cero}$$
$$K=R^{-1}B^TP$$

# LQR usando Función de Lyapunov

Entonces la ley de control óptima está dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^{T}Px(t)$$

donde P satisface

Ec. Ricatti $\quad A^{T}P + PA - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0$

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Sea:

$$x(k+1) = Gx(k)$$

con G estable.

Se desea minimizar:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)Qx(k)$$

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Solución

Se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$$

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

$$= \underline{x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)} < 0$$

$$= -x^T Qx < 0$$

P es positivo definido

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Definiendo

$$x^T(k)Qx(k) = -\left[x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)\right]$$

$$x^T(k)Qx(k) = -\left[\left[Gx(k)\right]^T PGx(k) - x^T(k)Px(k)\right]$$

$$x^T(k)Qx(k) = -x^T(k)\left[G^T PG - P\right]x(k)$$

A partir del 2º método de Lyapunov, dada una matrix Q existe P positivo definido, dado que G es estable, es decir:

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

$$G^T P G - P = -Q \qquad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Se puede determinar P.

Entonces J está dado por:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) Q x(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{x^T(k) P x(k) - x^T(k+1) P x(k+1)}_{-\Delta \dot{V}}$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0)$$

con

$$x(\infty) \to 0$$

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Planta

$$x^{T}(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

Ley de control

$$u(k) = -kx(k)$$

Min $$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^{T}(k)Qx(k) + u^{T}(k)Ru(k)\right]$$

Q es positivo definido y R es positivo Definido.

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Solución:

$$x^T(k+1) = (G - Hk)x(k)$$

Además:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)Qx(k) + x^T(k)K^TRKx(k)$$

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)\left(Q + K^TRK\right)x(k)$$

Se asume que G-HK es estable.

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Entonces, se define función de Lyapunov

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$$

y se define:

$$x^T(k)(Q + K^T RK)x^T(k) = -[x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)]$$

$$= -[[(G - HK)x(k)]^T P(G - HK)x(k) - x^T(k)Px(k)]$$

$$= x^T(k)[(G - HK)^T P(G - HK) - P]x(k)$$

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

Entonces,

* $$Q + K^T RK = -(G - HK)^T P(G - HK) + P$$

A partir del 2º método de Lyapunov, para G-HK estable, existe P definido positivo, tal que se satisfaga la ecuación anterior.

A través de un desarrollo matricial Pag. 593-594, Ogata para sistemas discretos se obtiene que la ecuación * está dada por:

# LQR discreto usando Función de Lyapunov

$$\boxed{P = Q + G^T P G - G^T P H \left(R + H^T P H\right)^{-1} H^T P G}$$

Ecuación de Ricatti

y con $\boxed{K = \left(R + H^T P H\right)^{-1} H^T P G}$ $\quad u(k) = -Kx(k)$

En este caso, $J_{min} = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0)$

con $x(\infty) = 0$