Pauta Pregunta 1 Ejercicio 1 EL32d - 2008/02

Profesor: Marcos Orchard
morchard@ing.uchile.cl

Auxiliar: Felipe Tobar
ftobar@ing.uchile.cl

September 16, 2008

Considerando el sistema mecnico de la Figura 1, en el cual es de inters el estudio del desplazamiento del bloque 2.

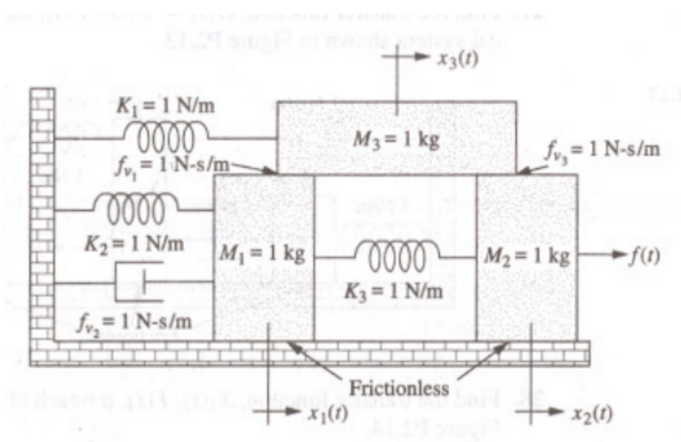

Figure 1: Sistema Mecánico.

1 Parte a.

La entrada al sistema es la fuerza aplicada sobre el bloque 2. La salida del sistema, tal como lo dice el enunciado, es la posición del bloque 2.

2 Parte b.

1. Variables:
   - Posición del bloque i $x_i[m]$.
   - Velocidad del bloque i $\dot{x}_i = v_i[m/s]$.
   - Fuerza aplicada sobre el bloque 2 $f(t)[N]$
2. Parámetros:
   - Constante del resorte i $K_i[N/m]$
   - Constante de roce viscoso i $f_vi[Ns/m]$
   - Masa i $M_i[Kg]$

3 Parte b.

Para derivar el modelo del principio de mínima acción, se escribe el Lagrangiano $L = T - V$, en donde:

$$
\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 + T_3 \\
&= \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M_3\dot{x}_3^2 \\
\\
V &= \sum T_{spring}^i \\
&= \frac{1}{2}K_1x_3^2 + \frac{1}{2}K_2x_1^2 + \frac{1}{2}K_3(x_2 - x_1)^2 \\
\\
f_g &= \vec{f}(t) + \vec{f_v} \\
&= (-f_{v2}\dot{x}_1 - f_{v1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3))\hat{x}_1 \\
&+ (f(t) - f_{v3}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3))\hat{x}_2 \\
&+ (-f_{v3}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - f_{v1}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1))\hat{x}_3
\end{aligned}
$$

Ahora se debe resolver para $i = 1..3$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + F_i = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned}
-K_2x_1 + K_3(x_2 - x_1) - M_1\ddot{x}_1 - f_{v2}\dot{x}_1 - f_{v1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) &= 0 \quad (1)\\
-K_3(x_2 - x_1) - M_2\ddot{x}_2 + f(t) - f_{v3}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= 0 \quad (2)\\
-K_1x_3 - M_3\ddot{x}_3 - f_{v3}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - f_{v1}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) &= 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

Se eligen las variables de estado de la forma:

$$\begin{gathered}
a = x_1, b = \dot{x}_1\\
c = x_2, d = \dot{x}_2\\
e = x_3, f = \dot{x}_3
\end{gathered}$$

Luego, el sistema expresado en varaibles de estado queda:

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= b \quad (4)\\
\dot{b} &= \frac{1}{M_1}\left(K_3(c-a) - K_2a - f_{v2}b - f_{v1}(b-f)\right) \quad (5)\\
\dot{c} &= d \quad (6)\\
\dot{d} &= \frac{1}{M_2}\left(-K_3(c-a) + f(t) - f_{v3}(d-f)\right) \quad (7)\\
\dot{e} &= f \quad (8)\\
\dot{f} &= \frac{1}{M_3}\left(-K_1(e) - f_{v3}(f-d) - f_{v1}(f-b)\right) \quad (9)\\
& \quad (10)
\end{aligned}$$

4 Parte d.

1. Hipótesis Simplificatorias:
   - No existe roce con el suelo.
   - Los coeficientes de roce y de los resortes viscoso son constantes.
   - No existe torque en los bloques.
2. Condiciones Iniciales:

- $x_1 = x_{10}, \dot{x}_1 = \dot{x}_{10}$.
- $x_2 = x_{20}, \dot{x}_2 = \dot{x}_{20}$.
- $x_3 = x_{30}, \dot{x}_3 = \dot{x}_{30}$.

5 Parte e.

El sistema es:

1. Artificial
2. Determinístico
3. Multivariable
4. Variable Continua
5. Tiempo Continuo
6. Variables Concentradas
7. Invariante
8. Lineal
9. Causal
10. Con Memoria

6 Parte f.

De (1),(2) y (3) es directo que si se hace la analogía :

$$
\begin{aligned}
Masa - Carga : x_i &= q_i \\
Resorte - Capacitor : K_i &= C_i \\
Masa - Inductancia : M_i &= L_i \\
Roce\ Viscoso - Resistencia : f_{vi} &= R_i \\
Fuerza\ Externa - Fuente\ de\ Voltaje : f(t) &= V(t)
\end{aligned}
$$

El sistema mecánico puede ser simulado por una red eléctrica simple, formada por 3 bucles, con parámetros lineales e invariantes en el tiempo y fuentes independientes.