

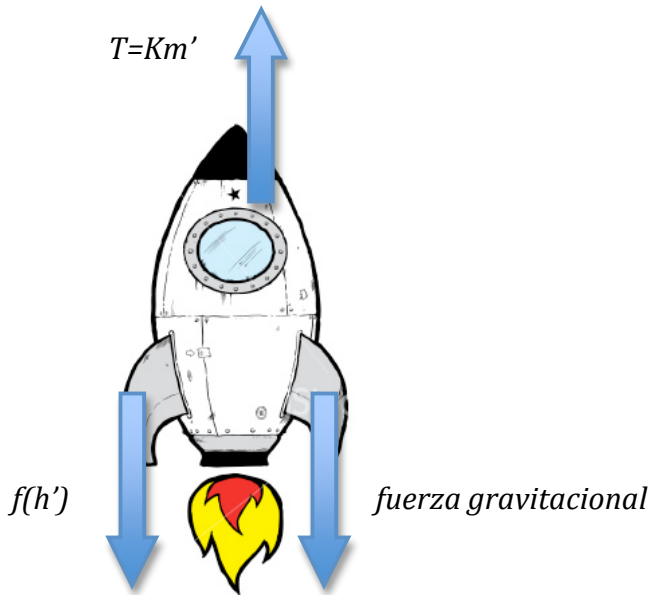
Pauta Auxiliar Control 1 EL32D

Profesor: Marcos Orchard

Auxiliar: Felipe Tobar

Agosto 27, 2008.

Problema 1.



i) Fuerza Gravitacional:

$$f_g = \frac{GMm}{(r+h)^2} = \frac{GM}{r^2} \frac{mr^2}{(r+h)^2} = \frac{gmr^2}{(r+h)^2}$$

ii) 2da Ley de Newton.

$$m\ddot{h} = K\dot{m} - f(\dot{h}) - \frac{gmr^2}{(r+h)^2}$$

iii) Elección de estados.

$$x_1 = h, x_2 = \dot{h}, x_3 = m$$

iv) Ecuación de Estado

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = -f(x_2) - \frac{gx_3r^2}{(r+x_1)^2} + Ku$$

$$\dot{x}_3 = u$$

Problema 2.

Repaso Principio de Mínima acción.

Este principio postula que la acción, es decir la integral de su Lagrangiano $L=T-V$, de un sistema debe ser mínima. Tanto para sistema conservativos y no conservativos.

Se tiene como consecuencia directa de este hecho que:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) + F_i = 0$$

Donde F_i son las fuerzas generalizadas, es decir las fuerzas externas más las fuerzas que se pueden escribir como $F = -\nabla V$.

Recomendación

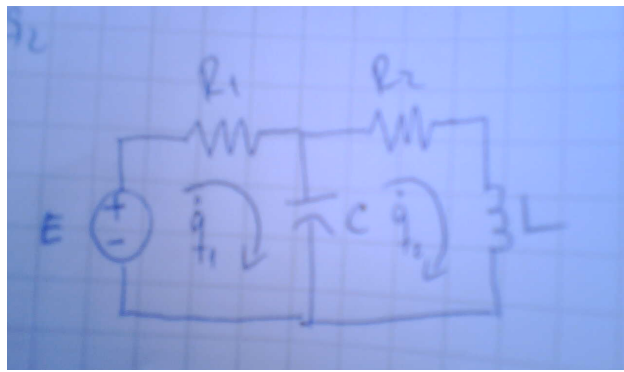
a) Escribir el Lagrangiano como $L=T-V$, donde :

- a. T es la energía cinética total del sistema, i.e.: Masas en movimiento o corriente por una inductancia.
- b. V es la energía potencial del sistema, i.e.: Carga en un capacitor, un resorte comprimido, una masa en altura.

b) Resolver $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + F_i^n = 0 \quad \forall i$, donde F_i^n son las fuerzas que **no fueron**

consideradas como producto de un potencial en la definición de V . Estas fuerzas pueden ser externas al sistema, voltajes, roces viscosos, potencia disipada en una resistencia, etc.

Ejemplo, red eléctrica simple.



$$T = \frac{1}{2} L \dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{(q_1 - q_2)^2}{C}$$

$$F_1 = E - R \dot{q}_1$$

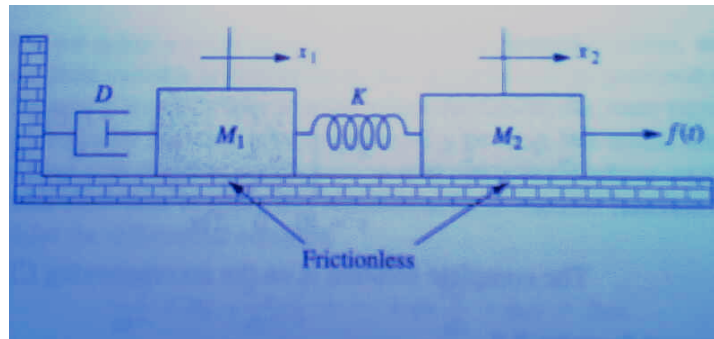
$$F_2 = -R \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + F_i^n = 0 \quad \forall i \Rightarrow$$

$$i) \frac{(q_1 - q_2)}{C} = E - R \dot{q}_1$$

$$ii) L \ddot{q}_2 + \frac{(q_2 - q_1)}{C} = -R \dot{q}_2$$

Resolución Problema 2.



Hipótesis Simplificadoras:

- Todas las fuerzas aplicadas sobre las masas no generan torque alguno
- El comportamiento tanto del resorte como del roce viscoso son lineales e invariantes en el tiempo.
- No existe fricción con el piso.

Aplicando el Principio de Hamilton¹:

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2$$

$$F_1 = -D \dot{x}_1$$

$$F_2 = f(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + F_i^n = 0 \quad \forall i \Rightarrow$$

$$i) M_1 \ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = -D \dot{x}_1$$

$$ii) M_2 \ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = f(t)$$

Escogiendo las variables de estado como $p = x_1, q = \dot{x}_1, r = x_2, s = \dot{x}_2$ se tiene:

$$\dot{p} = q$$

$$\dot{q} = -\frac{D}{M_1} q - \frac{K}{M_1} (p - r)$$

$$\dot{r} = s$$

$$\dot{s} = -\frac{K}{M_2} (r - p) + \frac{1}{M_2} f(t)$$

Notar que es natural expresar la salida como:

$$y = [p \ q]$$

ii)

Variables:

Estados	Posiciones y velocidades
Parámetros	D, K, M1 y M2
Entradas	f(t)
Salidas	Posiciones

¹ **Propuesto:** Ver que si la acción del resorte se toma como una fuerza generalizada de la forma $f=Kx$ y no se toma en cuenta como un potencial en la definición de V, las ecuaciones resultantes son las mismas.

Caracterización

Artificial.	Variable Continua	Lineal
Determinístico	Tiempo Continuo	Con Memoria
Multivariable	Variables concentradas	
Invariante	Causal	

iii) Haciendo la analogía:

Posición=Carga

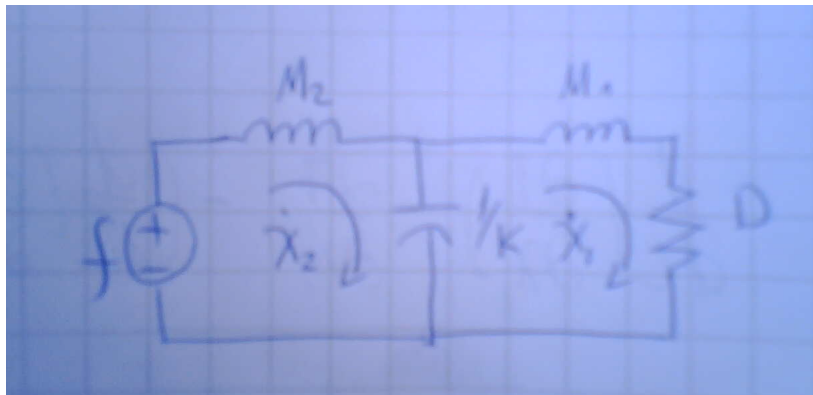
Velocidad=Corriente

Roce viscoso=Resistencia

Fuerza externa=Fuente de Voltaje

Resorte=1/Capacitancia

Masas=Inductancia, el modelo análogo eléctrico queda:



Problema 3

Se escribe el problema en variables de estado:

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{GMM_T L}{2} \frac{\sin(\theta)}{(K - L/2 \cos(\theta))^2}$$

Claramente los puntos de equilibrio son todos los de la forma $x_1^k = k\pi$, $k \in N$

Linealizamos para $x_1 = 0$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = f_2(\theta) &= -\frac{GMM_T L}{2} \frac{\sin(\theta)}{(K - L/2 \cos(\theta))^2} \approx \\ &= 0 - \frac{GMM_T L}{2} \left[\frac{\cos(\theta)(K - L/2 \cos(\theta))^2 - \sin(\theta)2(K - L/2 \cos(\theta))(L/2 \sin(\theta))}{(K - L/2 \cos(\theta))^4} \right] \bigg|_{\theta=0} \partial\theta = \\ &= -\frac{GMM_T L}{2(K - L/2)^2} \partial\theta = \frac{-g_0 ML}{2} \partial\theta\end{aligned}$$

Si no se hubiese considerado la variación de la aceleración de gravedad se habría obtenido la misma respuesta. Por lo que no vale la pena ser tan detallista en un sistema lineal.

Problema 4

i) Se debe resolver la ecuación $\dot{x} = f(x,0)$, las soluciones serán los puntos de equilibrio.

Luego, para cada punto de equilibrio x_e el modelo lineal será:

$$x_{k+1} \approx x_e + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} \partial x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} \partial u$$

Su condición inicial sería la condición inicial desplazada en el punto de equilibrio. Es decir

$$\partial x \approx x - x_e \Rightarrow \partial x_0 = x_0 - x_e$$

ii) El sistema es:

Determinístico

Variable Continua

Causal

Monovariable

Tiempo Discreto

Con Memoria

iii)

Si $d < 0$ entonces el sistema no es causal sino anticipativo, ya que se anticipa a su entrada.

Si w es tal, el sistema es aleatorio, ya que w no está determinado sin incertidumbre.

Problema 5

i)

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{y} + a_1 y) = b_1 \dot{u} + b_0 u - a_0 y$$

$$\text{Sea } \dot{x}_2 = b_0 u - a_0 y$$

$$\therefore \dot{y} + a_1 y = b_1 u + x_2 \Rightarrow x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u$$

$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 + b_0 u$$

ii)

a) Esto se cumple cuando la salida es una función lineal de los estados.

b) En sistemas donde A es no invertible se cumple sólo la implicancia hacia la izquierda. En sistemas con A invertible se tienen ambas.

iii) No tiene sentido ya que ningún estado puede garantizar una respuesta idénticamente igual a cero (ya que esta sería determinística)