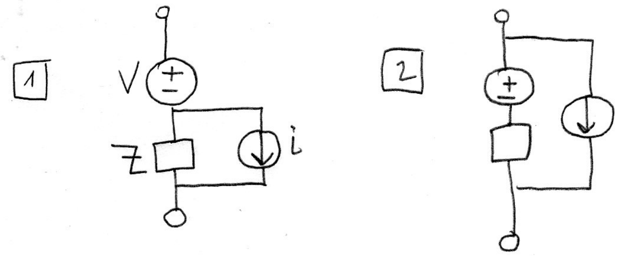
Última Auxiliar antes del Examen.

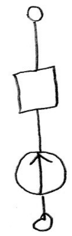
EL31A 29/Nov. Sábado

Heinz Gerdin H.

Ramas típicas:

tienen 2 formas:

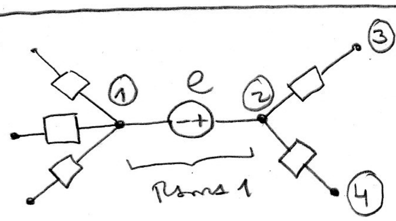




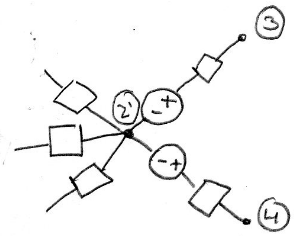
NO es una rama típica.

La idea para confeccionar el grafo, es usar sólo ramas típicas.

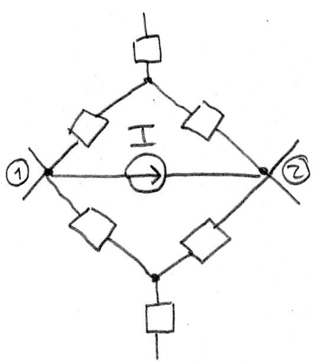
Transformaciones de fuentes:



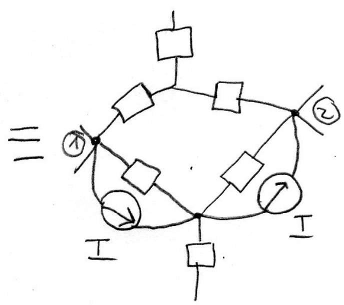
$\equiv$



(solo si NO busco la corriente en la rama 1).



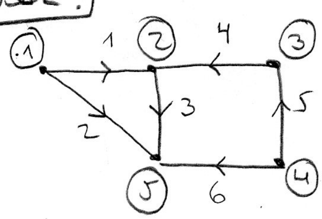
$\equiv$



- La idea es que la fuente de voltaje siempre puede en serie con un elemento, y la fuente de corriente en paralelo con un elemento.

Método Nodal.

Si tengo



La matriz de incidencia nodo-rama es:

$$\text{Nodos}\left\{\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right. = A$$

Ramas

Pongo un "1" si la corriente "sale del nodo"

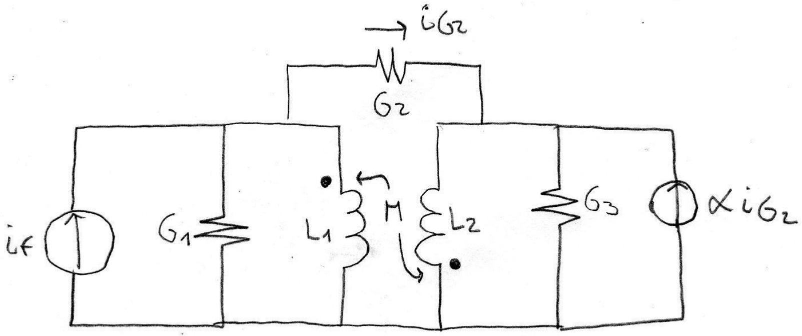
Pongo un "−1" si la corriente "entra al nodo"

Pongo un "0" si no hay relación entre la corriente y el nodo.

→ Siempre hay sólo un "1" y un "−1" en cada columna de la matriz A.

$\boxed{P1}$ Red en RPS. Obtener las ecs. del método nodal $[Y_N(j\omega)][E(j\omega)] = [I_S(j\omega)]$ siguiendo el método matricial sistemático.

Notar que $Y_N = A \cdot Y_B \cdot A^T$ e $I_S = A[Y_B V_S - J_S]$. Se consideran las fuentes dependientes momentáneamente como independientes. Se deben determinar Γ^{-1} para escribir las ecs. del método nodal.



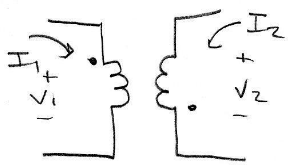
Y_B: matriz de admitancias de cada rama.

V_S: vector de fuentes de voltaje

J_S: vector de fuentes de corriente.

SOL

Primero veo las inductancias acopladas:



$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{L}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

y necesito los valores de I_1 e I_2.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega} \mathbb{L}^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega \underbrace{(L_1L_2 - M^2)}_{\Delta_L}} \begin{bmatrix} L_2 & M \\ M & L_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

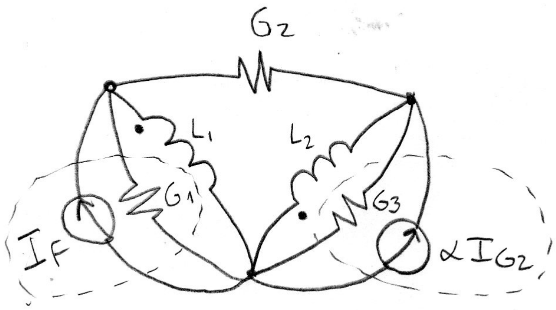
si $\mathcal{L}_1 = L_2/\Delta_L$

$m = M/\Delta_L$

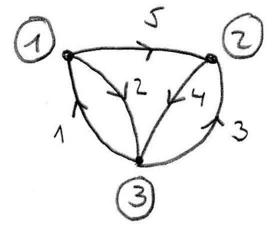
$\mathcal{L}_2 = L_1/\Delta_L$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & m \\ m & \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

⇒ el Grafo sería:



↑ utilizaré estos ↗ como ramas típicas



$$\Rightarrow A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pero ojo que la fila ③ es una combinación lineal de ① y ②, de hecho es −① −② = ③, y como es la fila asociada a la tierra del circuito, la puedo eliminar por redundancia.

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Y_B es la matriz con las admitancias de cada rama.

$$Y_B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_1}{j\omega} & 0 & \frac{m}{j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{j\omega} & 0 & \frac{L_2}{j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow A^t$$

y en el método nodal; $\underbrace{A\, Y_b\, A^T}\, E = \underbrace{A(Y_b V_s - J_s)}$

$$Y_n E = I_s$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_B A^t} = \begin{bmatrix} -G_1 & 0 \\ \frac{\mathcal{L}_1}{j\omega} & \frac{m}{j\omega} \\ 0 & -G_3 \\ \frac{m}{j\omega} & \frac{\mathcal{L}_2}{j\omega} \\ G_2 & -G_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot$$

$A \cdot [Y_B A^t]$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1 + \frac{\mathcal{L}_1}{j\omega} + G_2 & \frac{m}{j\omega} - G_2 \\ \frac{m}{j\omega} - G_2 & G_3 + \frac{\mathcal{L}_2}{j\omega} + G_2 \end{bmatrix} = [A\, Y_B A^t] = \text{“}Y_N\text{”}$$

Ahora el lado derecho de la ecuación, $\vec{Y}_n \cdot \vec{e} = \vec{I}_s$

fuentes de voltaje. fuentes de corriente.

$$= \underbrace{A [Y_B \cdot \vec{V}_F]}_{\substack{(2\times5)(5\times5)(5\times1) \\ \text{vector de } (2\times1)}} - \underbrace{A\, \vec{I}_F}_{\substack{(2\times5)(5\times1) \\ \text{vector de } (2\times1)}}$$

Como no hay fuentes de voltaje en el circuito $\Rightarrow A[Y_B \cdot \vec{V}_F] = 0$.

$$\Rightarrow \vec{I}_s = -A \cdot \vec{I}_F = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_F \\ 0 \\ \alpha i_{G_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -i_F \\ -\alpha i_{G_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_F \\ \alpha i_{G_2} \end{bmatrix} = \vec{I}_s$$

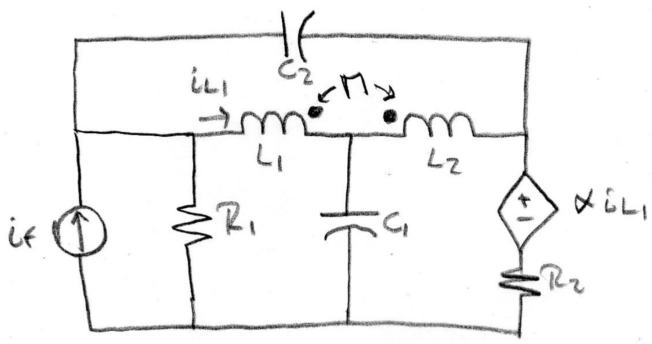
Ahora, $i_{G_2} = G_2(e_1 - e_2) = G_2 e_1 - G_2 e_2 \quad \Rightarrow \vec{I}_s = \begin{bmatrix} i_F \\ \alpha G_2 e_1 - \alpha G_2 e_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ el sistema queda: $[A\, Y_B A^t]\, \vec{e} = \vec{I}_s$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1 + \frac{\mathcal{L}_1}{j\omega} + G_2 & \frac{m}{j\omega} - G_2 \\ \frac{m}{j\omega} - G_2 & G_3 + \frac{\mathcal{L}_2}{j\omega} + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_F \\ \alpha G_2 e_1 - \alpha G_2 e_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1 + \frac{\mathcal{L}_1}{j\omega} + G_2 & \frac{m}{j\omega} - G_2 \\ \frac{m}{j\omega} - G_2 - \alpha G_2 & G_3 + \frac{\mathcal{L}_2}{j\omega} + G_2 + \alpha G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$\boxed{P2}$ Plantear de forma detallada las ecuaciones correspondientes al método matricial de las mallas $[Z_m(j\omega)]\cdot[I(j\omega)] = [E(j\omega)]$, suponiendo C.I. = 0.



Sol) El sistema $Z_m \cdot \vec{I} = E$

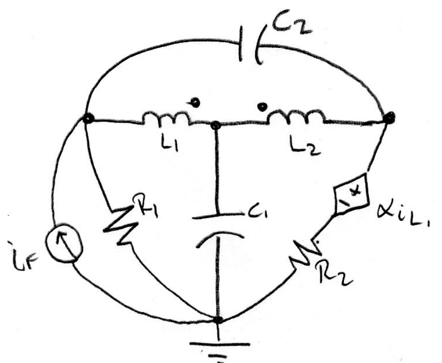
$$\underbrace{[M Z_b M^t]}_{Z_m}\cdot\vec{I} = \underbrace{M[Z_b \vec{I}_s] - M\vec{V}_s}_{E}$$

↑ vector de corrientes ↑ vector de voltajes

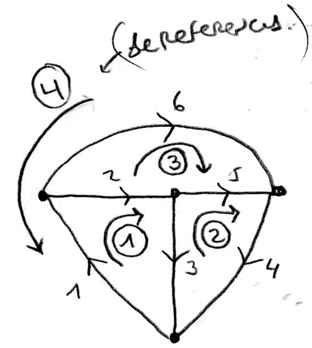
$\to v_{L1} = j\omega L I_{L1} - M j\omega I_{L2}$

$\to v_{L2} = -M j\omega I_{L1} + j\omega L_2 I_{L2}$

⇒ el grafo sería:



⇒



$$\Rightarrow M = \begin{array}{c|c} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}}^{\text{corrientes}} \\ \text{bucles}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hdashline -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

"1" ⇒ van en el mismo sentido

"-1" ⇒ van en sentido contrario

"0" ⇒ corrientes no se tocan

notar que hay un "1" y un "-1" en cada columna. (elimino la fila ④ por ser de referencia).

$$\Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{M} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & 0 & -j\omega M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -j\omega M & 0 & 0 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix}}^{Z_b} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{M^t}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & j\omega L_1 & \frac{1}{j\omega C_1} & 0 & -j\omega M & 0 \\ 0 & -j\omega M & \frac{-1}{j\omega C_1} & R_2 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & -j\omega L_1 + j\omega M & 0 & 0 & j\omega M - j\omega L_2 & \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} & -\frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M & -j\omega L_1 + j\omega M \\ -j\omega M - \frac{1}{j\omega C_1} & \frac{1}{j\omega C_1} + R_2 + j\omega L_2 & j\omega M - j\omega L_2 \\ -j\omega L_1 + j\omega M & j\omega M - j\omega L_2 & j\omega L_1 - 2j\omega M + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} = Z_M$$

$$\Rightarrow Z_m \cdot \vec{I} = \vec{E}$$
$$= M\left[Z_b \vec{I}_s\right] - M\vec{V}_s$$

$$
\underbrace{M \cdot Z_b \cdot \vec{I_s}}\quad - \quad \underbrace{M \cdot \vec{V_s}}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & 0 & -j\omega M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -j\omega M & 0 & 0 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}
- \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha i_{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 i_F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \qquad - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha i_{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
- \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha I_1 - \alpha I_3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

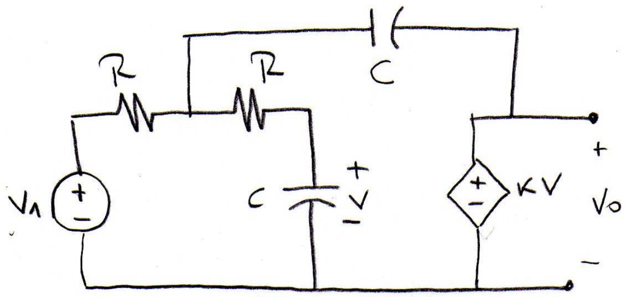
$$
\begin{bmatrix} R_1 i_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \Rightarrow \vec{E} = \begin{bmatrix} R_1 i_F \\ \alpha I_3 - \alpha I_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow Z_m \vec{I} = \vec{E}
$$

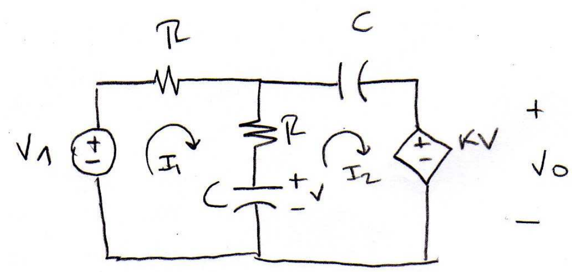
$$
\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} & \frac{-1}{j\omega C_1} - j\omega M & -j\omega L_1 + j\omega M \\ -j\omega M - \frac{1}{j\omega C_1} + \alpha & \frac{1}{j\omega C_1} + R_2 + j\omega L_2 & j\omega M - j\omega L_2 - \alpha \\ -j\omega L_1 + j\omega M & j\omega M - j\omega L_2 & j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M + \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 i_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

B | a | Determinar la función de Red $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_1(s)}$

b | Valor de K para que la respuesta al impulso para $V_o(t)$ sea sinusoidal.



Sol



$$V_1 = RI_1 + R(I_1-I_2) + \overbrace{\frac{1}{sC}(I_1-I_2)}^{\text{"}V\text{"}}$$

$$-\frac{1}{sC}(I_1-I_2) - R(I_1-I_2) + \frac{1}{sC}I_2 + KV = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} V_1 &= I_1\left(2R+\frac{1}{sC}\right) + I_2\left(-R-\frac{1}{sC}\right) \\ -KV &= I_1\left(\frac{-1}{sC}-R\right) + I_2\left(\frac{+2}{sC}+R\right) \end{aligned} \quad \left\} \begin{bmatrix} 2R+\frac{1}{sC} & -R-\frac{1}{sC} \\ -R-\frac{1}{sC} & \frac{2}{sC}+R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -\frac{K}{sC}(I_1-I_2) \end{bmatrix} \right.$$

$$-KV = -K\frac{1}{sC}(I_1-I_2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2R+\frac{1}{sC} & -R-\frac{1}{sC} \\ -R-\frac{1}{sC}+\frac{K}{sC} & \frac{2}{sC}+R-\frac{K}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y como $KV = V_0 = \dfrac{K}{sC}(I_1-I_2)$; $I_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $I_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \Rightarrow V_0 = \dfrac{K(\Delta_1-\Delta_2)}{sC\,\Delta}$

$$\Delta = \left(2R+\frac{1}{sC}\right)\left(\frac{2}{sC}+R-\frac{K}{sC}\right) + \left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(-R-\frac{1}{sC}+\frac{K}{sC}\right)$$

$$= \cancel{\frac{4R}{sC}} + 2R^2 - \frac{2RK}{sC} + \cancel{\frac{2}{s^2C^2}} + \cancel{\frac{R}{sC}} - \cancel{\frac{K}{s^2C^2}} - R^2 - \cancel{\frac{R}{sC}} + \cancel{\frac{RK}{sC}} - \cancel{\frac{R}{sC}} - \cancel{\frac{1}{s^2C^2}} + \cancel{\frac{K}{s^2C^2}}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{s^2C^2} + \frac{1}{sC}(3R-RK) + R^2}$$

$$\Delta_1 = V_1\left(\frac{2}{sC} + R - \frac{K}{sC}\right)$$

$$\Delta_2 = V_1\left(R + \frac{1}{sC} - \frac{K}{sC}\right)$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = V_1\left(\frac{2}{sC} + \cancel{R} - \cancel{\frac{K}{sC}} - \cancel{R} - \frac{1}{sC} + \cancel{\frac{K}{sC}}\right)$$

$$\boxed{(\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{V_1}{sC}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{K \cdot V_1/sC}{sC\left(\frac{1}{s^2C^2} + \frac{(3R - RK)}{sC} + R^2\right)} = \frac{K V_1}{s^2C^2\left(\frac{1}{s^2C^2} + \frac{(3R-RK)}{sC} + R^2\right)}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{K V_1}{s^2(R^2C^2) + s(3RC - RKC) + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{K}{s^2(R^2C^2) + s(3RC - RKC) + 1}}$$

$\boxed{b}$ Respuesta al impulso $\Rightarrow$ entrada $V_1(t) = \delta(t)$

$$\Rightarrow V_1(s) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{V_0(s)}{\cancel{V_1(s)}_{1}} = V_0(s) = \frac{K}{s^2(R^2C^2) + s(3RC - RKC) + 1}$$

Algo en Laplace que tiene forma sinusoidal es de la forma $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}(\%)} \text{sen}(\omega t)$

(no hay "s" arriba)

$$\Rightarrow \text{encuadrando } V_0(s) \ldots \quad \frac{K/R^2C^2}{s^2 + \frac{s(3RC - RKC)}{R^2C^2} + \frac{1}{R^2C^2}} = \frac{K}{RC} \cdot \frac{\frac{1}{RC}}{s^2 + \frac{s(3RC-RKC)}{R^2C^2} + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

(Hay que anular esto!)

$$\Rightarrow \text{si } 3RC - RKC = 0 \Rightarrow 3R\cancel{C} = RK\cancel{C} \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

$$\text{entonces } V_0(s) = \frac{3}{RC} \cdot \frac{1/RC}{s^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \Rightarrow \boxed{V_0(t) = \frac{3}{RC}\,\text{sen}\left(\frac{1}{RC}t\right)}$$

✓ y es sinusoidal!

//