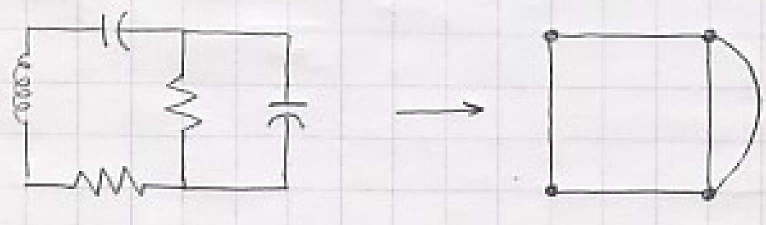
GRAFOS DE REDES

Deseamos desarrollar procedimientos sistemáticos para analizar y establecer propiedades de cualquier red de cualquier complejidad.
Una razón adicional para nuestra necesidad de desarrollar procedimientos sistemáticos es que el mundo de la ingeniería ha sido completamente cambiado por el desarrollo de los computadores.

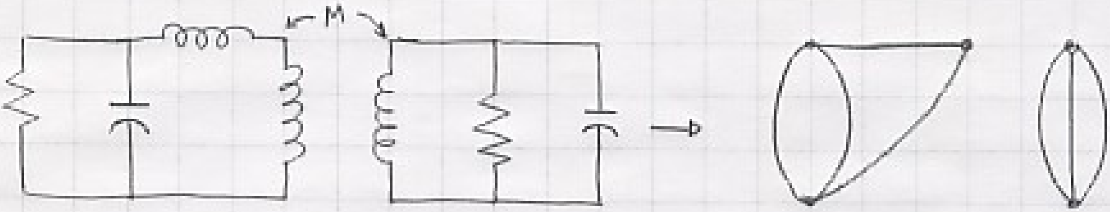
CONCEPTO DE GRAFO

Consideremos cualquier red física, supongamos que nosotros consideramos sólo aquellas frecuencias que permiten modelar la red física como una conexión de elementos concentrados, la red puede ser lineal o no lineal activa o pasiva, variante o invariante. Investigaremos las formas de expresar las restricciones impuestas en los voltaje y corriente de rama por KVL y KCL

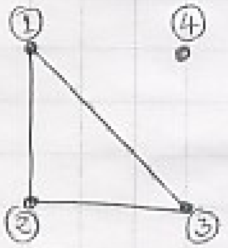
Reemplazamos cada elemento de la red por una rama (representado por un segmento de línea), y al final de cada rama dibujaremos puntos negros llamados nodos, El resultado de este paso es un grafo.



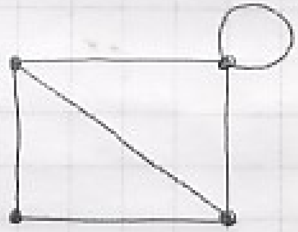
La palabra grafo quiere decir un conjunto de nodo junto con un conjunto de ramas con la condición que cada rama termina en un nodo.



La definición de grafo incluye el caso especial en el cual un nodo no tiene rama conectada a él.

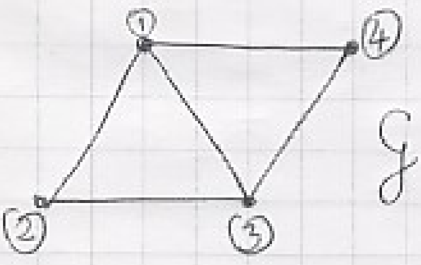


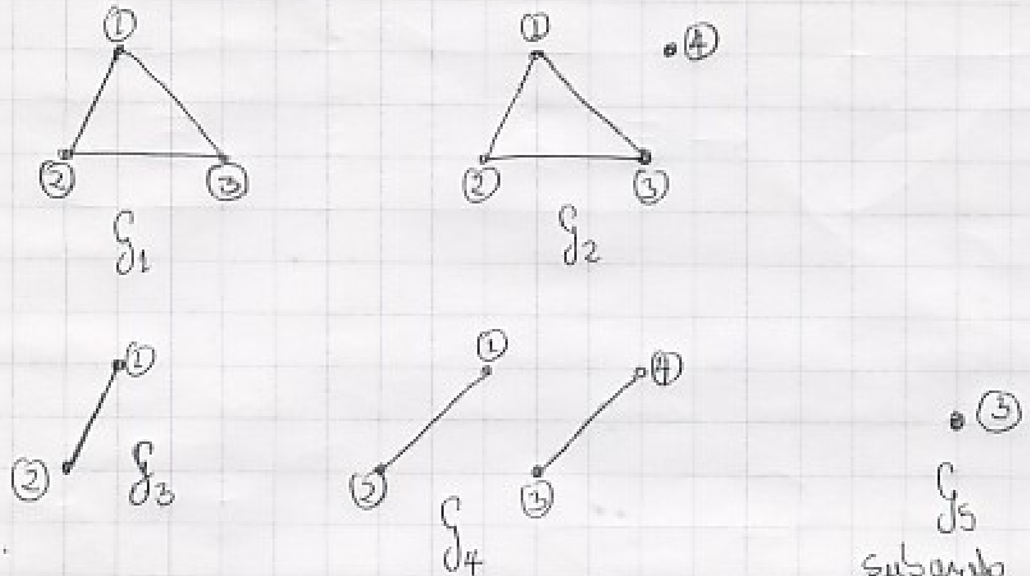
grafo con nodo aislado



grafo con auto loop

Supongamos que tenemos un grafo G, entonces decimos que G_1 es un subgrafo de G si G_1 es a su vez un grafo, si cada nodo de G_1 es un nodo de G y si cada rama de G_1 es una rama de G.

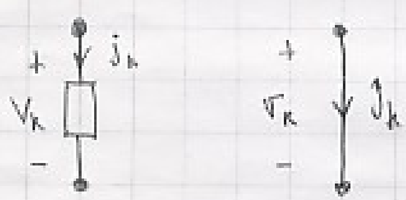




subgrafo degenerado

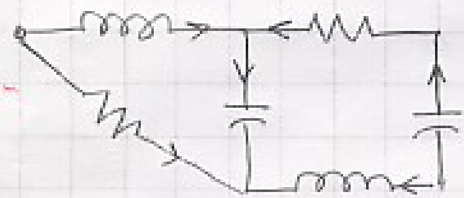
GRAFO ORIENTADO

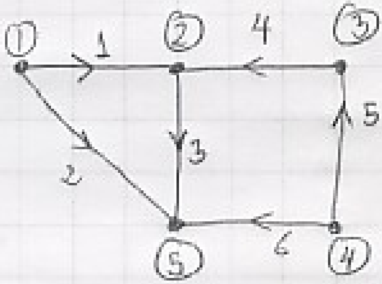
Si adoptamos direcciones de referencia asociadas



Siempre usaremos direcciones de referencia asociadas por lo tanto solo necesitamos indicar la flecha especificando la dirección de referencia de la corriente y omitimos el signo + y − de la dirección de referencia del voltaje.

Dada una red R con direcciones de referencia especificadas para cada una de sus ramas, esta conduce a un grafo cuyas ramas tienen direcciones de referencia.
Este grafo se denomina grafo orientado





Un grafo orientado es un conjunto de nodos junto con un conjunto de ramas orientados.
Mirando el ejemplo podemos ver que la rama 4 es incidente con el nodo 2 y nodo 3, rama 4 sale del nodo 3 y entra al nodo 2

Desde un punto de vista analítico podemos describir el grafo orientado listando todas las ramas y nodos e indicando qué rama está saliendo y entrando en cada nodo.
Es conveniente hacer esto escribiendo una matriz.
Supongamos que el grafo orientado está hecho de $\underline{b}$ ramas y n_t nodos. Supongamos que numeramos arbitrariamente todas las ramas y nodos del grafo.

Llamaremos matriz de incidencia nodo-rama A_a a una matriz rectangular de n_t filas y b columnas cuyo elemento (i,k) está definido por

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si rama } k \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si rama } k \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{si rama } k \text{ no incide con nodo } i \end{cases}$$

Ya que cada rama sale de un único nodo y entra a un único nodo, cada columna de la matriz Aa contiene un 1 y un -1 y el resto de los elementos es cero.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

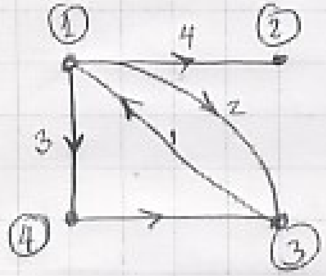
En el trabajo computacional la matriz de incidencia es usada como un método standard para describir la interconexión de los elementos.

Ejercicio

Dibuje un grafo orientado correspondiente a la siguiente matriz de incidencia

$$Aa = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con 4 nodos y 5 ramas



CONJUNTO DE CORTE Y LCK

Para expresar LCK matemáticamente para cualquier red desarrollaremos el concepto de conjunto de corte.

LCK establece que la suma algebraica de todas las corrientes saliendo de un nodo es igual a cero.

Si hacemos la partición de nodos de una red en dos conjuntos mediante una superficie cerrada tal que un conjunto de nodos esté dentro de la superficie y el otro fuera, entonces LCK verifica que la suma de las corrientes saliendo de la superficie es cero.

En muchos casos el conjunto de todas las ramas que atraviesan la superficie, será llamado un conjunto de corte.

Para hacer más precisa esta idea debemos proceder paso a paso y distinguir entre grafos conexos y no conexos.

Diremos que un grafo es conexo si existe al menos un camino a lo largo de las ramas del grafo y desconsiderando las orientaciones de los ramos) entre dos nodos cualquiera del grafo.

Por convención, un grafo consistente de solo un nodo es conexo.

Un grafo conexo se dice que es de una parte separada.

Dado un grafo no conexo sus subgrafos conexos son también llamados partes separadas.

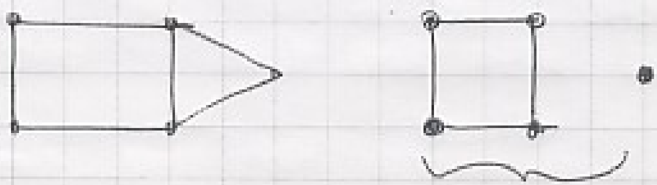
Así un grafo no conexo debe tener al menos dos partes separadas.

conexo — no conexo

Un conjunto de ramos de un grafo conexo G es llamado un conjunto de corte si

(1) La remoción de todos los ramos de el conjunto causa que el grafo resultante tenga 2 partes separadas

(2) La remoción de todos los ramos del conjunto menos uno causa que el grafo resultante sea conexo



grafo no conexo

B

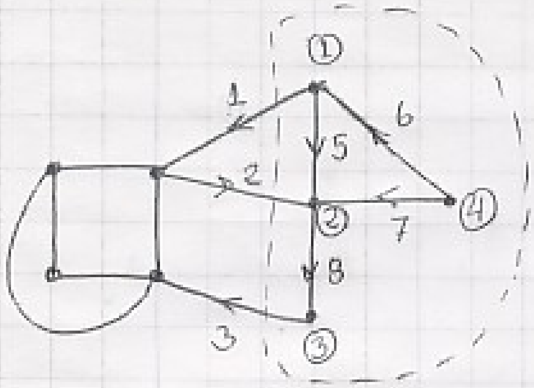


fig a

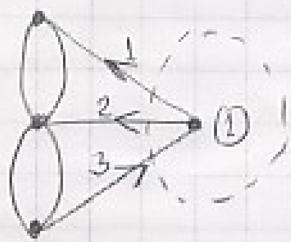


fig b)

En el caso general que un grafo G tiene S partes separadas, un conjunto de corte esta definido como un conjunto de ramas tal que:

1. al remover todos los ramas del conjunto causa que el grafo resultante tenga S+1 partes separadas
2. al remover todas las ramas del conjunto menos una causa que el grafo resultante tenga S partes separadas.

Luego podemos generalizar la LCK

PARA CUALQUIER RED CONCENTRADA, PARA CUALQUIERA DE SUS CONJUNTOS DE CORTE, Y PARA CUALQUIER TIEMPO, LA SUMA ALGEBRAICA DE TODAS LAS CORRIENTES DE RAMA QUE ATRAVIEZAN EL CONJUNTO DE CORTE ES CERO para la figura a)

$$j_1(t) - j_2(t) + j_3(t) = 0 \qquad \forall t$$

para la figura b)

$$j_1(t) + j_2(t) - j_3(t) = 0$$

nodo 1 $\quad J_1 + J_5 - J_6 = 0$

nodo 2 $\quad -J_2 - J_5 - J_7 + J_8 = 0$

nodo 3 $\quad J_3 - J_8 = 0$

nodo 4 $\quad J_6 + J_7 = 0$

sumando $\quad J_1 - J_2 + J_3 = 0 \quad$ que es la ecuación del conjunto de corte

CIRCUITOS Y LVK

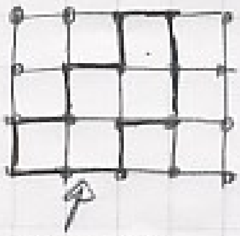
Cuando vemos redes simples, tomamos el significado de circuito como intuitivamente claro.

Groseramente hablando, un circuito es un camino cerrado.

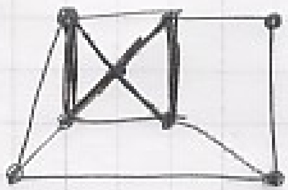
Para simplificar muchos desarrollos en capítulos posteriores, formulamos la siguiente definición de circuito.

Un subgrafo G_1 de un grafo G es llamado un circuito si:

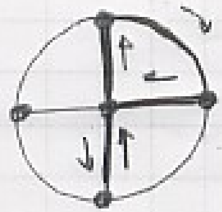
1. El subgrafo G_1 es conexo.
2. dos ramas de G_2 son incidentes con cada nodo



CIRCUITO



NO



NO

LVK

PARA CUALQUIER RED CONCENTRADA, PARA CUALQUIERA DE SUS CIRCUITOS, EN CUALQUIER TIEMPO, LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS VOLTAJES DE RAMA ALREDEDOR DE UN CIRCUITO ES CERO.

TEOREMA DE TELLEGEN

$$\sum_{k=1}^{b} V_k J_k$$

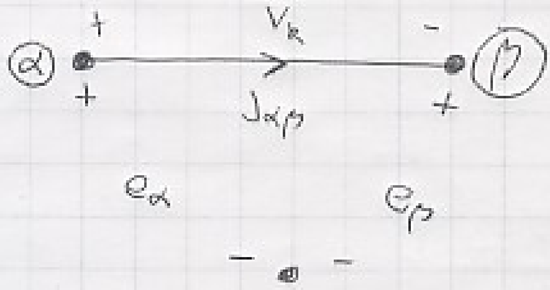
red arbitraria concentrada direcciones de referencia asociadas para los voltajes (V_k) y corrientes de ramas (J_k)

CONSIDEREMOS UNA RED CONCENTRADA ARBITRARIA CUYO GRAFO G TIENE B RAMAS Y N_T NODOS. SUPONGAMOS QUE A CADA RAMA DE ESE GRAFO ASIGNAMOS ARBITRARIAMENTE UN VOLTAJE DE RAMA V_k Y UNA CORRIENTE DE RAMA J_k PARA $k=1,\dots,b$

ellos están dibujados con grafos asociados

SI LOS VOLTAJES DE RAMA SATISFACEN TODAS LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS POR KVL Y SI LAS CORRIENTES DE RAMA $J_1, \dots, J_b$ SATISFACEN TODAS LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS POR KCL ENTONCES

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} V_k j_k = 0}$$



PRUEBA (grafo conexo y no hay ramas en paralelo)

$$V_k J_k = (e_\alpha - e_\beta) J_{\alpha\beta}$$

$$V_k J_k = (e_\beta - e_\alpha) J_{\beta\alpha}$$

→ Si existen ramas en paralelo se puede reducir a sólo una rama y considerar la suma de las corrientes

Si el grafo no es conexo se puede aplicar a cada una de sus partes separadas y luego se suma.

$$V_k J_k = \frac{1}{2}\left[(e_\alpha - e_\beta) J_{\alpha\beta} + (e_\beta - e_\alpha) J_{\beta\alpha}\right]$$

Si extendemos la misma a todas las ramas del grafo obtenemos.

$$\sum_{k=1}^{b} V_k J_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n_t} \sum_{\beta=1}^{n_t} (e_\alpha - e_\beta) J_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{k=1}^{b} V_k J_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n_t} \sum_{\beta=1}^{n_t} (e_\alpha - e_\beta) J_{\alpha\beta}$$

Si no hay rama entre el nodo α y β tenemos $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} = 0$

$$\sum_{k=1}^{b} V_k J_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n_t} e_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{n_t} J_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{n_t} e_\beta \left(\sum_{\alpha=1}^{n_t} J_{\alpha\beta}\right)$$

para cada α fijo, $\sum_{\beta=1}^{n_t} J_{\alpha\beta}$ es la suma de todas las corrientes de rama saliendo del nodo α.

para cada β fijo, $\sum_{\alpha=1}^{n_t} J_{\alpha\beta}$ es la suma de todas las corrientes de rama entrando al nodo β

POR KCL cada una de estas sumas es cero por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{b} V_k J_k = 0$$

good

CONSIDEREMOS DOS REDES ARBITRARIAS CUYA ÚNICA RESTRICCIÓN ES QUE TENGAN EL MISMO GRAFO. EN CADA UNA DE ESTAS REDES ESCOGEMOS LAS MISMAS DIRECCIONES DE REFERENCIA Y NUMERAMOS LAS RAMAS EN LA MISMA FORMA. (LAS REDES PUEDEN SER NO LINEALES Y VARIANTES). SEAN V_k y J_k LOS VOLTAJES Y CORRIENTES DE RAMA DE LA PRIMERA RED Y $\hat{V}_k \hat{J}_k$ LOS VOLTAJES Y CORRIENTES DE RAMA DE LA SEGUNDA RED, YA QUE V_k y $\hat{V}_k$ SATISFACEN EL MISMO CONJUNTO DE KVL y J_k y $\hat{J}_k$ SATISFACEN EL MISMO CONJUNTO DE KCL, EL TEOREMA DE TELLEGEN GARANTIZA

$$\sum_{k=1}^{b} V_k J_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{V}_k \hat{J}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{V}_k J_k = \sum_{k=1}^{b} V_k \hat{J}_k = 0$$

CONSERVACION DE LA ENERGIA

Consideremos una red arbitraria, tenemos con la notación del teorema de Tellegen

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t)\, j_k(t) = 0 \qquad \forall t$$

ya que $v_k(t) \cdot j_k(t)$ es la potencia entregada en el tiempo t por la red a la rama k, el teorema puede ser interpretado como sigue: en cualquier instante t la suma de la potencia entregada a cada rama de una red es cero.

$\Rightarrow$ Conservacion de la energía

CONSERVACION DE LA POTENCIA COMPLEJA

Supongamos que la red está en RPS. Representemos el voltaje $v_k(t)$ por el fasor $\dot{V}_k$ y la corriente de rama J_k por el fasor $\dot{J}_k$

Claramente $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \ldots, \dot{V}_b$ y $\dot{J}_1, \dot{J}_2, \ldots, \dot{J}_b$ satisfacen todas las restricciones impuestas por KVL y KCL.
Sin embargo los conjugados $\dot{J}_1^*, \dot{J}_2^*, \ldots, \dot{J}_b^*$ también satisfacen la KCL por lo tanto por el teorema de Tellegen

$$\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{2} \dot{V}_k \dot{J}_k^* = 0$$

⇒ Conservación de la potencia compleja

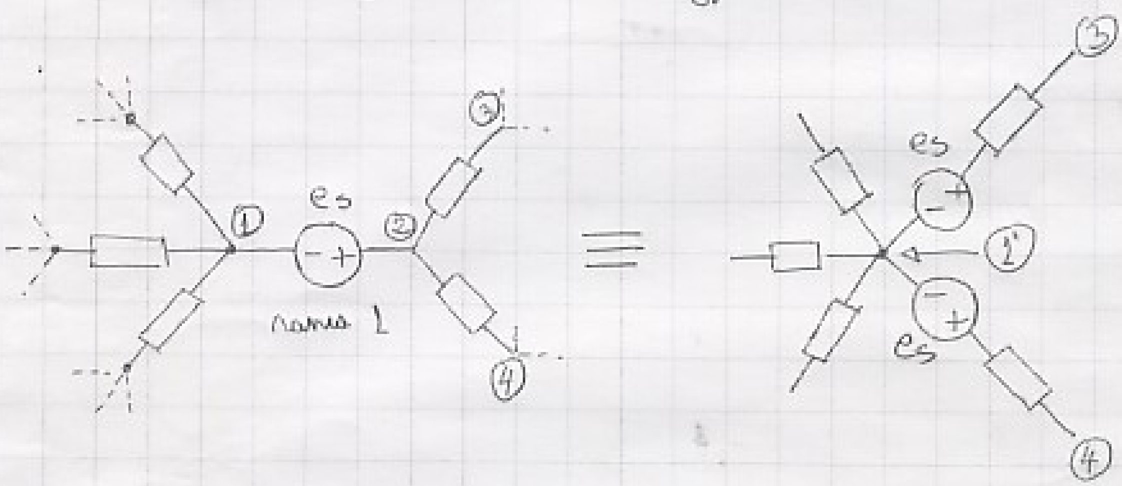
TEOREMA.

CONSIDEREMOS UNA RED LINEAL E INVARIANTE EN RPS, LA CUAL ES MANEJADA POR VARIAS FUENTES INDEPENDIENTES QUE TIENEN LA MISMA FRECUENCIA, ENTONCES LA SUMA DE LA POTENCIA COMPLEJA ENTREGADA POR CADA FUENTE INDEPENDIENTE A LA RED ES IGUAL A LA SUMA DE LA POTENCIA COMPLEJA RECIBIDA POR TODAS LAS OTRAS RAMAS.

ANALISIS DE NODOS Y MALLAS

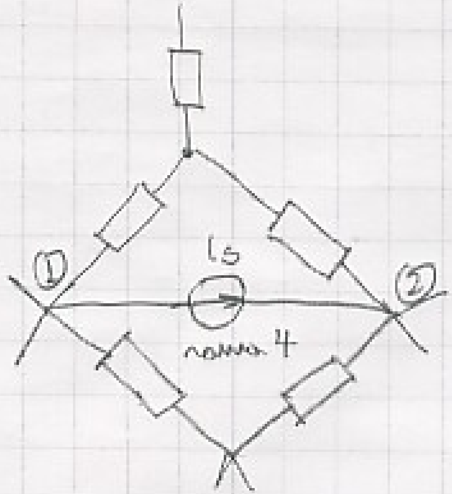
TRANSFORMACIONES DE FUENTES

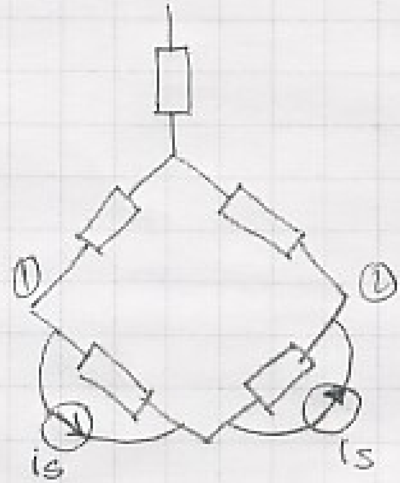
En la discusión del problema de análisis de redes suponemos que el número y la ubicación de las fuentes independientes son arbitrarios mientras no sean violadas las leyes de Kirchhoff



La fuente se traslada de forma tal que en todos los circuitos se cumplan las mismas ecuaciones de voltajes de Kirchhoff

Siempre que la corriente en la rama 1 no sea una variable de interés se puede hacer la traslación de fuente.

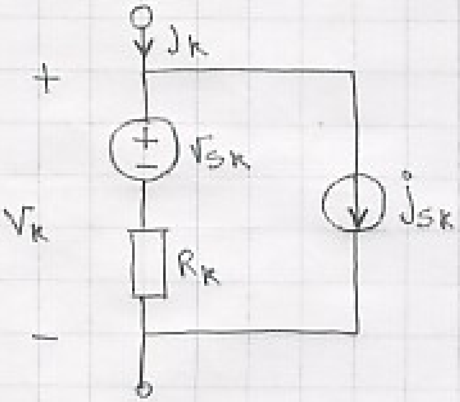


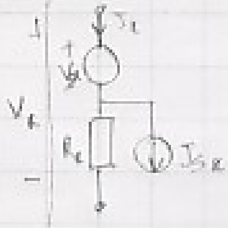


La fuente se traslada de forma tal que en todos los nodos se siguen cumpliendo las mismas ecuaciones de corriente de Kirchhoff

Usando estas transformaciones, podemos modificar cualquier red de forma tal que cada fuente de voltaje está conectada en serie con algún elemento que no es una fuente, y cada fuente de corriente es conectada en paralelo con un elemento que no es una fuente.

Sea la siguiente rama.





$V_K = (J_K - J_{SK}) R_K + V_{SK}$

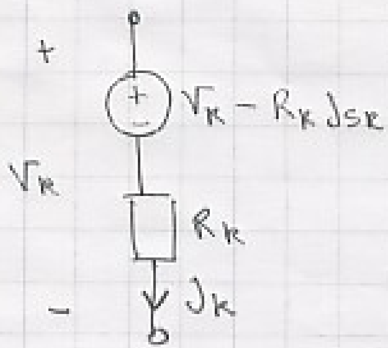
La ecuación de la rama es.

$$V_K = (J_K - J_{SK}) R_K + V_{SK}$$

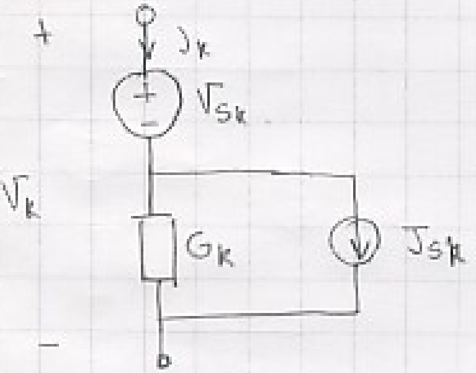
$$V_K = V_{SK} - R_K J_{SK} + R_K J_K$$

esto puede ser puesto como

$$V_K = (V_{SK} - R_K J_{SK}) + R_K J_K$$



Veamos la siguiente rama

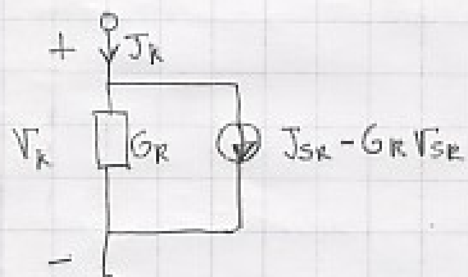


$$J_k = J_{Sk} + G_k(V_k - V_{Sk})$$

$$J_k = J_{Sk} - G_k V_{Sk} + G_k V_k$$

y esto se puede simplificar a

$$J_k = (J_{Sk} - G_k V_{Sk}) + G_k V_k$$



Estos dos ejercicios ilustran equivalencias útiles pues es conveniente aunque no necesario en análisis nodal que todas las fuentes independientes sean fuentes de corriente y es útil aunque no necesario que en el análisis de circuitos regionales todas las fuentes independientes sean fuentes de voltaje.

IMPLICACIONES DE LCK

Consideremos una red $\mathcal{R}$ que tiene n_t nodos y $\underline{b}$ ramas, sin pérdida de generalidad suponemos que el grafo es conexo.

Escogemos arbitrariamente un nodo de referencia en el nodo n_t y los nodos restantes son ①, ②, . . . , ⓝ donde $n \triangleq n_t - 1$

Aplicamos LCK a los nodos ①, ②, . . . ⓝ

Así tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con $\underline{b}$ incógnitas. El primer uso básico del análisis de nodos es

Las n ecuaciones algebraicas (lineales homogéneas) en $J_1, \ldots, J_b$ obtenidos de aplicar la LCK a cada nodo excepto el nodo de referencia, constituye un conjunto de ecuaciones lineales independientes.

Consideremos el sistema de $\underline{n}$ ecuaciones lineales algebraicas que expresan las LCK para todos los nodos excepto el de referencia, esto se puede escribir en forma matricial

$$A \cdot J = 0 \quad (\text{LCK})$$

J vector de corrientes de rama $\quad J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_b \end{bmatrix}$

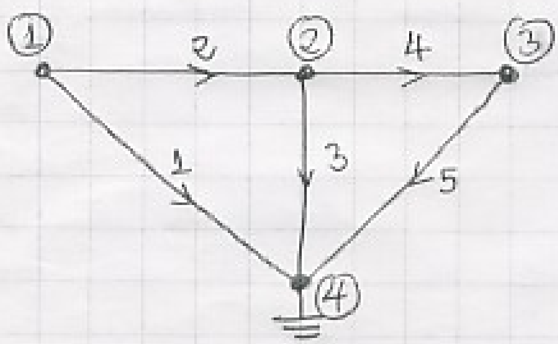
donde A es una matriz de $n \times b$ definida por

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si rama } k \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si rama } k \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{si rama } k \text{ no incide en el nodo } i \end{cases}$$

$A \cdot J$ es por lo tanto un vector de dimensión n

Observamos que la matriz A es idéntica a la matriz de incidencia nodo-rama ya vista la única diferencia es que A_a tiene $n_t = n+1$ filas. Obviamente, A se obtiene de A_a borrando la fila correspondiente al nodo de referencia. A por lo tanto es llamada, la matriz de incidencia reducida

Consideremos el grafo de la figura



$$J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A \cdot J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$J_1 + J_2 = 0$$
$$-J_2 + J_3 + J_4 = 0$$
$$-J_4 + J_5 = 0$$

Es fácil ver que estas ecuaciones son linealmente independientes, pues cada una contiene una variable que no contiene la otra.

IMPLICACIONES DE LVK

Denominemos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ los voltajes en los nodos ①, ②, ..., ⓝ medidos con respecto al nodo de referencia. Usaremos estos voltajes de nodo con respecto a la referencia en el análisis nodal.

KVL garantiza que los voltajes de nodo con respecto a la referencia son definidos sin ambigüedad.

Podemos demostrar que los voltajes de rama se pueden obtener de los voltajes de nodo por la ecuación

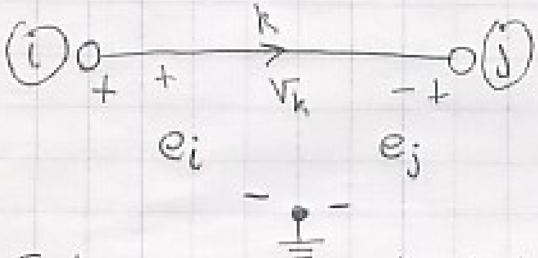
$$v = A^T e$$

donde A^T es una matriz de $b \times n$ la cual es la transpuesta de la matriz de incidencia reducida

Para mostrar esto es necesario considerar dos tipos de ramas, aquellas que inciden al nodo de referencia y las que no.

Las que inciden el voltaje de rama será el voltaje de nodo o su negativo,.

En las que no incide el voltaje de rama debe formar un loop con dos voltajes de nodo y por lo tanto puede ser expresado como una combinación lineal de dos voltajes de nodo por KVL.



Si la rama incide en el nodo de referencia

$$v_k = \begin{cases} e_i & \text{si rama } k \text{ sale del nodo } i \\ -e_i & \text{si rama } k \text{ entra al nodo } i \end{cases}$$

Si la rama no incide en el nodo de referencia

$v_k = e_i - e_j$ si rama k sale del nodo i y entra al nodo j

Luego

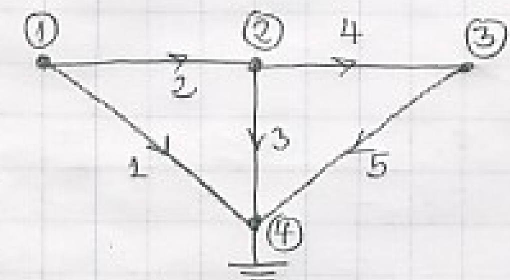
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{b1} & c_{b2} & \cdots & c_{bn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

donde c_{ki} son 0, 1 o −1

$$c_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si rama } k \text{ sale nodo } i \\ -1 & \text{si rama } k \text{ entra nodo } i \\ 0 & \text{si rama } k \text{ no incide en nodo } i \end{cases}$$

se puede ver que $c_{ki} = a_{ik}$

$$\Rightarrow \quad C = A^T$$



$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v = A^T e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$v_1 = e_1$
$v_2 = e_1 - e_2$
$v_3 = e_2$
$v_4 = e_2 - e_3$
$v_5 = e_3$

Las ecuaciones $A \cdot J = 0$ y $v = A^T e$ son dos ecuaciones básicas del análisis de nodos. Ellas se obtienen del grafo de la red y de las leyes de Kirchhoff, lo cual hace que sean independientes de los elementos

Obviamente para resolver las n variables $e_1, e_2 \ldots e_n$ necesitamos conocer la caracterización de las ramas de la red es decir como se relaciona el voltaje de rama v_n con la corriente de rama J_n
Para el caso de elementos no lineales esto es complicado por lo tanto abordaremos el problema de redes lineales

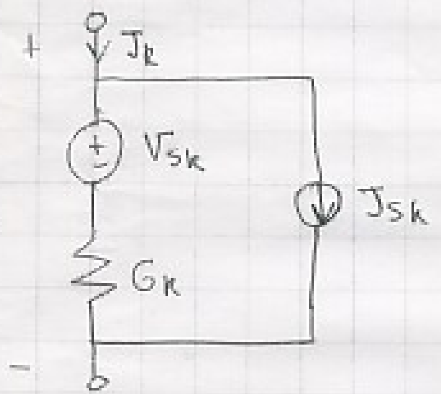
ANALISIS NODAL DE REDES LINEALES INVARIANTES

El problema del análisis general de redes es combinar las ecuaciones de rama con las dos ecuaciones básicas ya vistas

$$A \cdot J = 0 \qquad (KCL)$$

$$v = A^T e \qquad (KVL)$$

Consideremos una red lineal invariante resistiva con b ramas y n_t nodos y una parte representa una rama típica se muestra en la figura



$$v_k = R_k j_k + v_{sk} - R_k j_{sk}$$ o equivalentemente

$$j_k = G_k v_k + j_{sk} - G_k v_{sk}$$

en notación matricial

$$J = G V + J_s - G V_s$$

donde G es la matriz conductancia de ramas y es una matriz diagonal de orden $\underline{b}$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & G_b \end{bmatrix}$$

los vectores J_s y V_s son vectores de fuente de dimensión $\underline{b}$

$$J_s = \begin{bmatrix} J_{s1} \\ \vdots \\ J_{sb} \end{bmatrix} \qquad V_s = \begin{bmatrix} V_{s1} \\ \vdots \\ V_{sb} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot J = 0 \qquad AGV + AJ_s - AGV_s = 0$$

pero $\quad V = A^T e$

$$AGA^T e + A(J_s - GV_s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad AGA^T e = A(GV_s - J_s)$$

$$Y_n \triangleq AGA^T$$

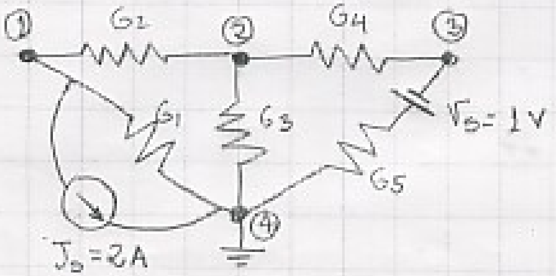
$$i_s = AGV_s - AJ_s \quad \Rightarrow$$

$\boxed{Y_n e = i_s}$ ecuaciones de nodo

Y_n : matriz de admitancia de nodo

i_s = Vector de fuentes de corriente de nodo.

EJEMPLO



$G_1 = 2\ \mho$

$G_2 = 1\ \mho$

$G_3 = 3\ \mho$

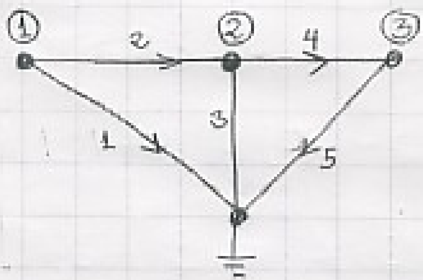
$G_4 = 1\ \mho$

$G_5 = 1\ \mho$

Paso 1: escogemos un nodo de referencia, numeramos los nodos

Paso 2 numeramos los ramos y asignamos a cada una una dirección de referencia

Paso 3



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

escriba las ecuaciones de rama en la forma

$$J = GV + J_S - GV_S$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Habíamos planteado las ecuaciones

$$A \cdot J = 0$$
$$v = A^T e$$

$$J = G v + J_s - G v_s$$

luego debemos llegar a

$$Y_n e = i_s$$

donde

$$Y_n = A G A^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{i_s} \triangleq A G v_s - A J_s$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

C

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_s = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego la ecuación de nodos es

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

luego esta ecuación se puede resolver con métodos de inversión de matrices

$$e = Y_n^{-1} i_s = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

una vez que hemos encontrado los voltajes de nodo podemos encontrar los voltajes de rama con la ecuación

$$v = A^T e = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -1 \\ -13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

luego podemos encontrar las corrientes de rama como

$$J = GV + J_s - GV_s = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 16 \\ -16 \\ -3 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

ECUACIONES DEL METODO DE LOS NODOS POR INSPECCION

El método paso a paso explicado antes es muy importante por dos razones principales

① muestra muy claramente los hechos que deben ser usados para analizar la red

② es completamente general en el sentido que puede ser usado en todos los casos, por lo tanto es adecuado para cálculo automático

En el caso de redes resistivas con fuentes independientes (en particular sin elementos acoplantes tales como fuentes dependientes) las ecuaciones de nodo pueden ser escritas por inspección. Si nosotros llamamos y_{ik} el elemento (i,k) de la matriz admitancia de nodo Y_n, la ecuación es:

$Y_n e = i_s$ y escrito en forma escalar

$$\begin{bmatrix} y_{11} & & y_{1n} \\ & & \\ y_{n1} & & y_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ \vdots \\ i_{sn} \end{bmatrix}$$

Se puede seguir las siguientes reglas

1.- y_{ii} es la suma de las conductancias de todas las ramas conectadas al nodo (i) ; y_{ii} se denomina la admitancia propia del nodo (i)

2.- y_{ik} es el negativo de la suma de las conductancias de todas las ramas conectadas entre el nodo (i) y el nodo (k) : y_{ik} se denomina la admitancia mutua entre el nodo (i) y el nodo (k)

3.- Si convertimos todas las fuentes de voltaje en fuentes de corriente, entonces i_{sk} es la suma algebraica de todas las fuentes de corriente entrando al nodo k ; las fuentes de corriente cuya dirección de referencia entra al nodo (k) tienen signo positivo, el resto tiene signo negativo.

NOTAS

(1) Para redes hechas de resistencias y fuentes independientes, la matriz admitancia de nodo Y_n es simétrica
i.e., $y_{ik} = y_{ki} \quad \forall i,k$

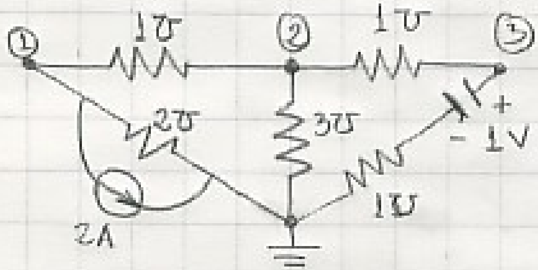
además ya que $Y_n \triangleq AGA^T = Y_n^T = (AGA^T)^T = AG^TA^T = AGA^T$

$= Y_n$ suponiendo que sus elementos acoplados G es una matriz diagonal

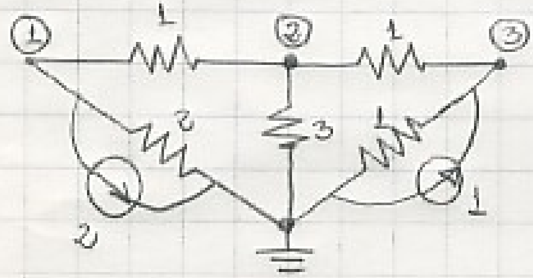
(2) Si todas las conductancias de una red resistiva lineal son positivas es fácil mostrar que $\det(Y_n) > 0$

Por lo tanto la regla de cramer garantiza que $Y_n e = i_s$ tiene una solución única.

Ejemplo



transformando las fuentes de voltaje en fuentes de corriente.



por inspección

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

ANALISIS EN RPS

Consideremos ahora una red lineal e invariante que contiene resistencias, inductancias y condensadores y fuentes independientes.
Supongamos que estamos interesados sólo en el análisis en régimen permanente sinusoidal.
Luego todas las fuentes independientes serán sinusoides de la misma frecuencia angular ω. Suponemos que cada rama incluye una fuente de voltaje y/o una fuente de corriente además de un elemento que no es una fuente

Las ecuaciones son las mismas, pero en términos de admitancias

La ecuación de rama es

$$\dot{J}_K = Y_K \dot{V}_K + \dot{J}_{SK} - Y_K \dot{V}_{SK} \quad K = 1, 2, \ldots, b$$

donde $\dot{J}_K$ y $\dot{V}_K$ son los fasores corriente y voltaje de la K-esimo rama. y $\dot{J}_{SK}$ y $\dot{V}_{SK}$ son los fasores representando de las fuentes de corriente y voltaje de la rama K, luego en forma matricial

$$J = Y_b V + J_S - Y_b V_S$$

La matriz Y_b se denomina matriz admitancia de ramas
El análisis es exactamente el mismo que para la red resistiva
La ecuación de nodo es de la forma

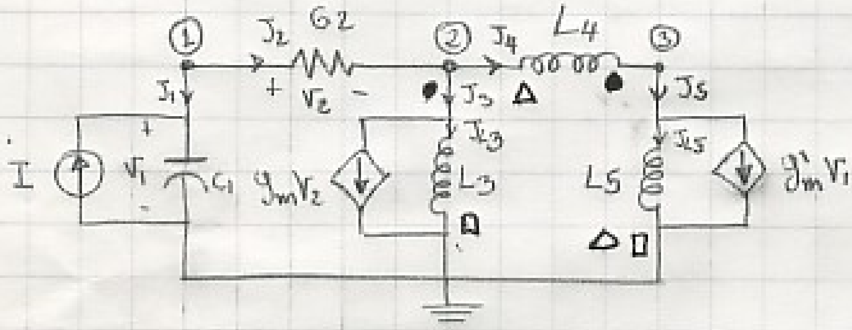
$Y_n E = I_S$ — E fasor que representa el vector de voltajes de nodo
I_S vector fuente de corriente

$$Y_n = A Y_b A^T$$

$$I_S = A Y_b V_S - A J_S$$

Ejemplo:

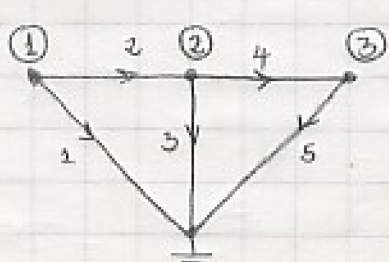
Consideremos la red de la figura



Las inductancias L_3, L_4 y L_5 están magnéticamente acoplados y su matriz inductancia es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ 1 & -4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_{L3} \\ V_{L4} \\ V_{L5} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ 1 & -4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_{L4} \\ J_{L5} \end{bmatrix}$$

Hagamos un grafo orientado de la red



matriz de incidencia

$$A = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

luego necesitamos expresar las ecuaciones de rama

$J_1 = j\omega C_1 V_1 - I$

$J_2 = G_2 V_2$

para escribir J_3, J_4 y J_5 en términos de V_k's no es suficiente además la matriz inductancia sólo nos da la relación entre V_3, V_4 y V_5 y las corrientes por las inductancias

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ 1 & -4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_3 \\ J_4 \\ J_{L5} \end{bmatrix}$$

invirtiendo la matriz

$$\begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

habiendo obtenido estas relaciones y notando que

$J_3 = J_{L3} + g_m V_2$ y

$J_5 = J_{L5} + g'_m V_1$

podemos escribir las últimas tres ecuaciones de rama como sigue.

$$J_1 = j\omega C_1 V_1 - I$$
$$J_2 = G_2 V_2$$
$$J_3 = g_m V_2 + \frac{3}{j\omega} V_3 + \frac{1}{j\omega} V_4 - \frac{1}{j\omega} V_5$$
$$J_4 = \frac{1}{j\omega} V_3 + \frac{2}{j\omega} V_4 + \frac{1}{j\omega} V_5$$
$$J_5 = g_m V_1 - \frac{1}{j\omega} V_3 + \frac{1}{j\omega} V_4 + \frac{2}{j\omega} V_5$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega C_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & g_m & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ & & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ g'_m & & \frac{-1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego la matriz Y_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_m & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ g'_m & 0 & \frac{-1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega C_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2+g_m & \frac{4}{j\omega} & \frac{3}{j\omega} & 0 \\ g'_m & 0 & -\frac{2}{j\omega} & \frac{-1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2+g_m & \frac{4}{j\omega} & \frac{3}{j\omega} & 0 \\ g'_m & 0 & \frac{-2}{j\omega} & \frac{-1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix}$$

$I_s = -A J_s$ ya que $V_s = 0$

$$I_s = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego la ecuación final es

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este ejemplo muestra claramente el valor del método sistemático, obviamente es riesgoso tratar de escribir la ecuación del método de los nodos por inspección

El ejemplo detallado sugiere un método para escribir las ecuaciones de RPS de cualquier red, la cual es invariante con fuentes sinusoidales de la misma frecuencia, note que la red puede incluir R, L, C inductancias mutuas, fuentes dependientes e independientes

Los pasos son como sigue.

(1) Realize (si es necesario) transformaciones de fuentes, para dejar la red en términos de ramas típicas

(2) numere las ramas y nodos.

(3) Dibuje un grafo orientado y plantee la matriz de incidencia

(4) Escriba las ecuaciones de Kirchhoff

$A \cdot J = 0$

$V = A^T e$

(5) Escriba las ecuaciones de rama

$$J = Y_b(j\omega)V - Y_b(j\omega)V_s + J_s$$

(6) obtenga las ecuaciones de nodo

$$Y_n(j\omega)\,E = I_s$$

donde

$$Y_n(j\omega) = A\,Y_b(j\omega)\,A^T$$

$$I_s = A Y_b(j\omega) V_s - A J_s$$

(7) Resuelva las ecuaciones de nodo para el fasor E

(6) obtenga $V = A^T e$ y $J = Y_b(j\omega)V - Y_b(j\omega)V_s + J_s$

nosotros obtenemos las siguientes propiedades útiles

1.- Si no hay elementos acoplantes (ni inductancias mutuas ni fuentes dependientes), la matriz Y_b es diagonal y por lo tanto la matriz Y_n es simétrica.

2.- Si no hay fuentes dependientes (se permiten inductancias mutuas) $Y_b(j\omega)$ y $Y_n(j\omega)$ son simétricas.

ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES

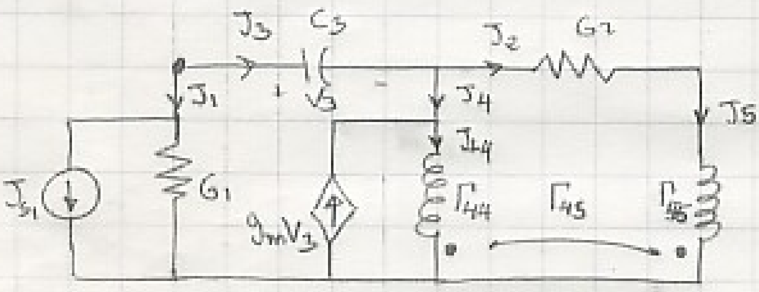
En general el análisis de nodo conduce a un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales simultáneas

Presentamos un método sistemático para obtener las ecuaciones integrodiferenciales de nodo de cualquier red lineal e invariante

Lo presentaremos mediante un ejemplo

Ejemplo Sea la siguiente red

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{44} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{41} & \Gamma_{55} \end{bmatrix}$$

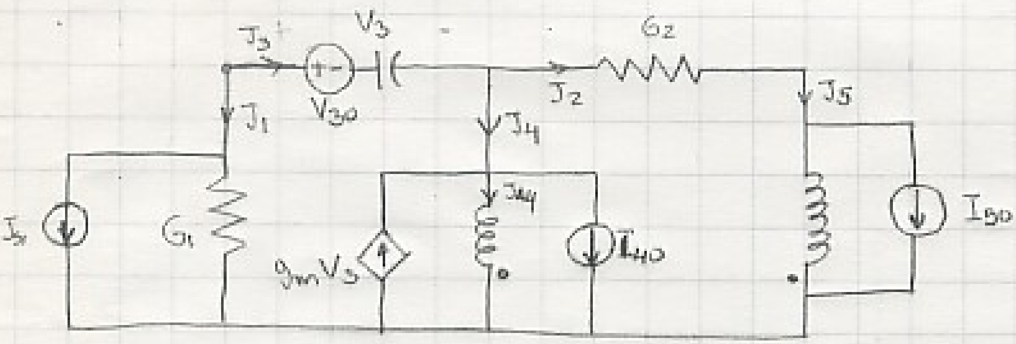


$v_{C3}(0) = V_{30}$

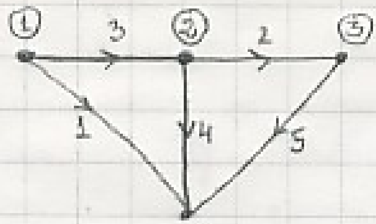
$i_{L4}(0) = I_{40}$

$i_{L5}(0) = I_{50}$

pongo las condiciones iniciales como fuentes



grafo orientado



matriz de incidencia de nodos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Expresamos las corrientes en función de los voltajes

$$J_1 = G_1 V_1 + J_{S1}$$

$$J_2 = G_2 V_2$$

$$J_3 = C_3 D V_3 - C_3 D V_{30} u(t)$$

$$J_4 = \frac{\Gamma_{44}}{D} V_4 + \frac{\Gamma_{45}}{D} V_5 - g_m V_3 + I_{40} u(t)$$

$$J_5 = \frac{\Gamma_{45}}{D} V_4 + \frac{\Gamma_{55}}{D} V_5 + I_{50} u(t)$$

luego las ecuaciones de rama pueden ser escritas en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_m & \Gamma_{44}/D & \Gamma_{45}/D \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{45}/D & \Gamma_{55}/D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{S1} \\ 0 \\ 0 \\ I_{40}u(t) \\ I_{50}u(t) \end{bmatrix} - Y_b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{30}u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego podemos calcular la matriz Y_n

$$Y_n = A Y_b A^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_b = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & C_3D & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & -C_3D-g_m & \Gamma_{44}/D & \Gamma_{45}/D \\ 0 & -G_2 & 0 & \Gamma_{45}/D & \Gamma_{55}/D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+C_3D & -C_3D & 0 \\ -C_3D-g_m & G_2+C_3D+g_m+\Gamma_{44}/D & -G_2+\Gamma_{45}/D \\ 0 & -G_2+\Gamma_{45}/D & G_2+\Gamma_{55}/D \end{bmatrix}$$

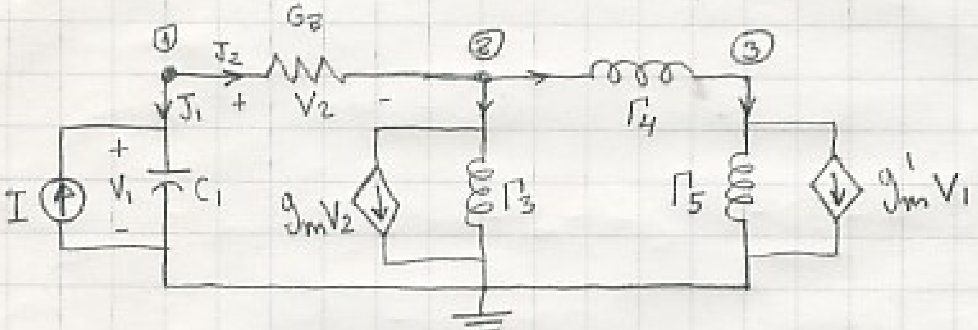
calculamos ahora el vector de fuentes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -J_{S1} \\ 0 \\ C_3DV_{30}u(t) \\ -I_{40}u(t) \\ -I_{50}u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{S1}+C_3DV_{30}u(t) \\ -C_3DV_{30}u(t)-I_{40}u(t) \\ -I_{50}u(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+C_3D & -C_3D & 0 \\ -C_3D-g_m & G_2+C_3D+g_m+\Gamma_{44}/D & -G_2+\Gamma_{45}/D \\ 0 & -G_2+\Gamma_{45}/D & G_2+\Gamma_{55}/D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{S_1}+C_3DV_{30}\,u(t) \\ -C_3DV_{30}\,u(t)-I_{40}\,u(t) \\ -I_{50}\,u(t) \end{bmatrix}$$

Cuando las redes bajo estudio involucran solo unos pocos fuentes dependientes, las ecuaciones pueden ser escritas por inspección si uno usa la siguiente idea: trate las fuentes dependientes como fuentes independientes, y solo en el último paso exprese la fuente en términos de las variables apropiadas

Ejemplo: sea la siguiente red en RPS.



Escribiendo las ecuaciones por inspección.

$$\begin{bmatrix} G_2+j\omega C_1 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+\Gamma_3/j\omega+\Gamma_4/j\omega & -\Gamma_4/j\omega \\ 0 & -\Gamma_4/j\omega & \dfrac{\Gamma_4}{j\omega}+\dfrac{\Gamma_5}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -g_mV_2 \\ -g_m'V_1 \end{bmatrix}$$