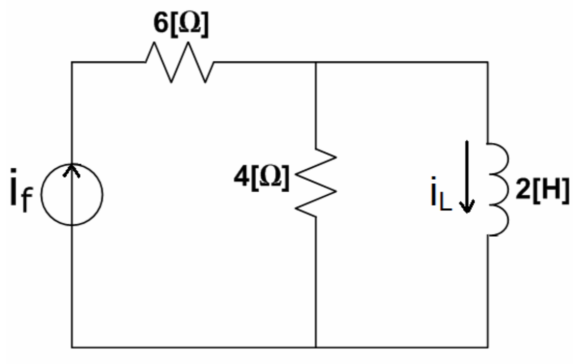
EJERCICIO Nº 5

EL 31-A ANALISIS DE REDES I

Prof **: Santiago Bradford V.** **23 de septiembre de 2008**
Prof. Aux **: Heinz Gerdin H.**

1. Para la red lineal e invariante de la figura a)), la fuente de entrada $i_f(t)$ es la función definida en la figura b)).

i) Determine la Respuesta Completa para la corriente i_L en la inductancia



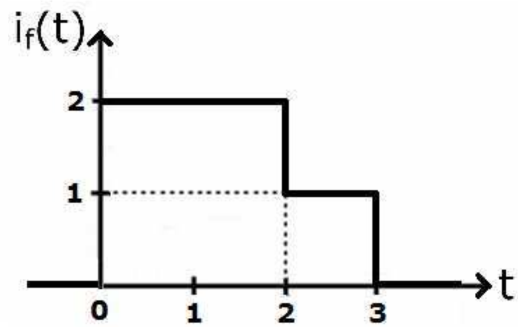
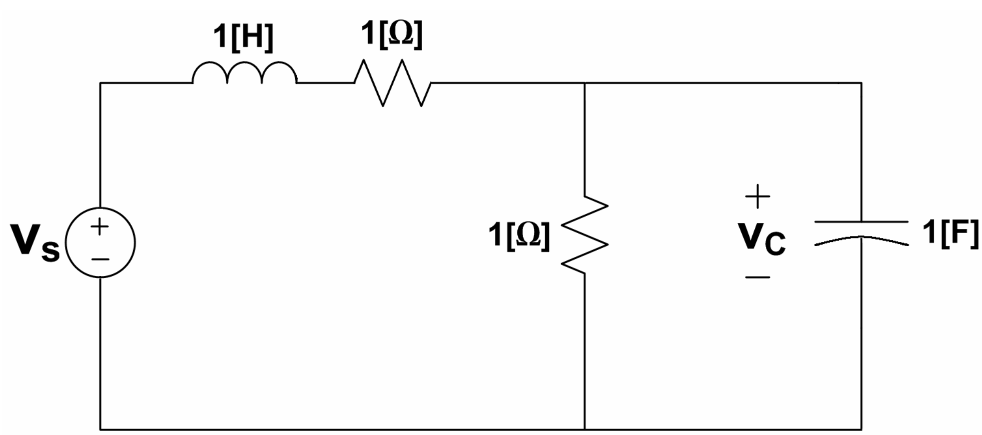
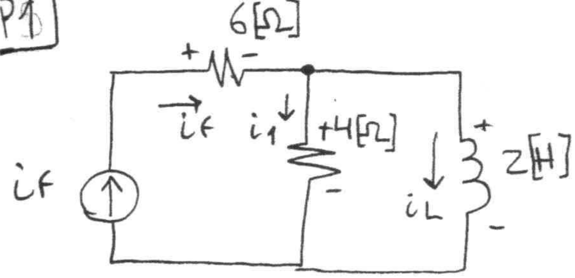


Figura a) $i_L(0)=3[A]$ Figura b)

2. Para la red lineal e invariante de la figura, determine la respuesta al impulso h(t) para la variable v_c como una respuesta de entrada cero con condiciones iniciales en $t = 0^+$.



P1



$\underline{LCK}$: $i_F = i_1 + i_L$

$\Rightarrow \boxed{i_1 = i_F - i_L}$

$\underline{LVK}$: $-4i_1 + v_L = 0$ $\qquad v_L = L\dfrac{di_L}{dt} = 2\dfrac{di_L}{dt}$

$\Rightarrow 2\dfrac{di_L}{dt} - 4i_F + 4i_L = 0 \quad /:2$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{di_L}{dt} + 2i_L = 2i_F} \quad i_L(0) = 3[A] \quad (1)$

La respuesta completa se compone de una RENC y una RESC.

$\underline{RENC}$: $(i_F = 0)$ $i_L(0) = 3[A]$

$\Rightarrow \dfrac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -2 \quad \Rightarrow i_L = K_1 e^{-2t}$ pero $i_L(0) = 3 = K_1$

$\Rightarrow \boxed{i_{L_{RENC}}(t) = 3e^{-2t}\,u(t)}$

$\underline{RESC}$: $i_L(0) = 0$. Como la entrada i_F tiene la forma pealise $i_F(t) = 2u(t) - u(t-2) - u(t-3)$, obtendré la respuesta al escalón del circuito $(u(t))$, y luego usaré el operador RESC Z_0 en $i_F(t)$.

$\Rightarrow$ Pero la respuesta al escalón es por definición una RESC. (c.i.=0)

$\Rightarrow$ si la entrada sería $i_F = u(t)$

$\Rightarrow$ en (1): $\boxed{\dfrac{di_L}{dt} + 2i_L = 2u(t)} \quad i_L(0) = 0$

Particular: $2i_L = 2 \Rightarrow \boxed{i_{L_p} = 1}$

Homogénea: $\dfrac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow i_{L_H} = Ke^{-2t}$

$\Rightarrow i_{Lp} + i_{LH} = i_L(t) = 1 + Ke^{-2t}$ pero $i_L(0) = 0 \Rightarrow K = -1$

$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = (1 - e^{-2t})u(t)} = s(t)$ respuesta al escalón $\boxed{= Z_0[u(t)]}$ Respuesta de estado cero si la entrada es un escalón.

$\Rightarrow Z_0[i_f(t)]$ será la Respuesta de estado cero ante la entrada $i_f(t)$.

$$\Rightarrow \quad i_f(t) = 2u(t) - u(t-2) - u(t-3) \qquad \Big/ \cdot Z_0[\%]$$

$$Z_0[i_f(t)] = Z_0[2u(t)] + Z_0[-u(t-2)] + Z_0[-u(t-3)]$$

$$= 2Z_0[u(t)] - Z_0[T_2 u(t)] - Z_0[T_3 u(t)]$$ T_t operador desplazamiento.

$$= 2Z_0[u(t)] - T_2[Z_0 u(t)] - T_3[Z_0 u(t)]$$

y como $Z_0[u(t)] = (1-e^{-2t})u(t)$

$$\Rightarrow Z_0[i_f(t)] = 2\cdot(1-e^{-2t})u(t) - (1-e^{-2(t-2)})u(t-2) - (1-e^{-2(t-3)})u(t-3)$$

RESC para $i_f(t)$

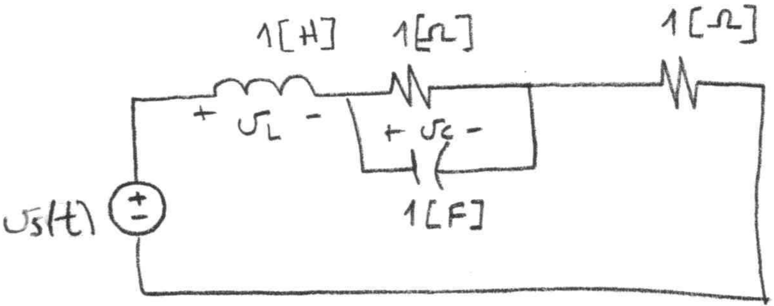
$\Rightarrow$ Respuesta Completa = RENC + RESC

$$\Rightarrow i_L(t) = 3e^{-2t}u(t) + 2(1-e^{-2t})u(t) - (1-e^{-2(t-2)})u(t-2) - (1-e^{-2(t-3)})u(t-3)$$

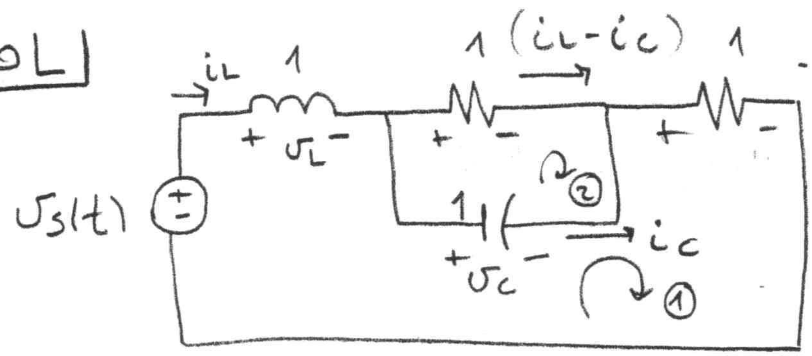
$$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = 2u(t) + e^{-2t}u(t) - (1-e^{-2(t-2)})\cdot u(t-2) - (1-e^{-2(t-3)})u(t-3)}$$

Respuesta completa para la corriente i_L en la inductancia.

P2 Determinar $h(t)$ (respuesta al impulso) como una respuesta de entrada cero con condiciones iniciales en $t=0^+$ (Determinar $h(t)$ para el voltaje en el condensador).



SOL)



$$\text{LVK}_{①}: \boxed{v_s = v_L + v_C + i_L \cdot 1} \quad (1)$$

$$\text{LVK}_{②}: \boxed{i_L - i_C - v_C = 0} \quad (2)$$

$$v_L = 1 \cdot \frac{\partial i_L}{\partial t} \qquad i_C = 1 \cdot \frac{\partial v_C}{\partial t}$$

$$\Rightarrow (2): \boxed{i_L = \frac{\partial v_C}{\partial t} + v_C} \rightarrow \text{Reemplazo en } (1).$$

$$\Rightarrow (1): v_s = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_C}{\partial t} + v_C\right) + v_C + \left(\frac{\partial v_C}{\partial t} + v_C\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v_C}{\partial t^2} + 2\frac{\partial v_C}{\partial t} + 2v_C = v_s} \ (3) \left(\text{y una RESC} \Rightarrow \begin{array}{r} v_C(0^-) = 0 \\ \dfrac{\partial v_C(0^-)}{\partial t} = 0 \end{array}\right)$$

Ahora, reemplazo v_s por un $\delta(t)$, e integro (3) entre $t=0^-$ y $t=0^+$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2}\partial t}_{3} + \underbrace{2\int_{0^-}^{0^+} \frac{\partial v_c}{\partial t}\partial t}_{2} + \underbrace{2\int_{0^-}^{0^+} v_c\,\partial t}_{1} = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,\partial t}_{=1 \text{ por definición del impulso.}} \qquad (4)$$

La única forma de que la ecuación (3) se pueda balancear, siendo $v_s = \delta(t)$ es que v_c sea contínua, siendo así $\frac{\partial v_c}{\partial t}$ un escalón y $\frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2}$ un impulso.

$$\Rightarrow 1 = \int_{0^-}^{0^+} v_c\,\partial t = 0$$

, se anula por integrar en un intervalo ínfimo sobre una variable contínua.

$$\Rightarrow 2 = 2\underbrace{\left(v_c(0^+) - v_c(0^-)\right)}_{=0} \qquad \Rightarrow \boxed{v_c(0^+) = 0}$$

$=0$ pues $v_c(t)$ es contínua, y $v_c(0^-)=0$

$\Rightarrow$ el único término que sobrevive de (4) es 3

$$\Rightarrow (4): \frac{\partial v_c(0^+)}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial v_c(0^-)}{\partial t}} = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_c(0^+)}{\partial t} = 1}$$

0 por resc.

$\Rightarrow$ nuestro nuevo problema a resolver para $t>0$ $(\delta(t)=0$ para $t>0)$ es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} + \dfrac{2\partial v_c}{\partial t} + 2v_c = 0 \qquad (5) \\ v_c(0^+) = 0 \\ \dfrac{\partial v_c}{\partial t}(0^+) = 1 \end{array}}$$

$\leftarrow$ La ecuación (3) para $t>0$.

$\Rightarrow$ de la forma $\boxed{\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\alpha \dfrac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x = 0}$ en (5) distingo:

$\alpha = 1$ $\qquad \alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\alpha < \omega_0}$

$\omega_0^2 = 2$

$\Rightarrow$ caso subamortiguado.

$\Rightarrow$ sol. de la forma $\left[v_C(t) = K_1 e^{-t} \cos(\omega_d t + \phi) \right]$

con $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2-1} = 1$

$\Rightarrow \boxed{v_C(t) = K_1 e^{-t} \cos(t + \phi)}$ Ahora obtengo K_1 y ϕ ctes, usando las C.I.

$\left(\dfrac{\partial v_C}{\partial t}(t) = -K_1 e^{-t} \cos(t+\phi) - K_1 e^{-t} \operatorname{sen}(t+\phi) \right)$

$v_C(0^+) = \boxed{0 = K_1 \cos(\phi).}$ $\quad K_1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{2} \vee \phi = -\frac{\pi}{2}}$

$\dfrac{\partial v_C}{\partial t}(0^+) = 1 = \underbrace{-K_1 \cos(\phi)}_{=0} - K_1 \operatorname{sen}(\phi)$

$\Rightarrow \quad 1 = -K_1 \operatorname{sen}(\phi) \rightarrow \boxed{\text{si } \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K_1 = -1}$

$\boxed{\text{si } \phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow K_1 = 1}$ $\rightarrow$ (Ambas sirven)

$\Rightarrow \boxed{h(t) = v_C(t) = e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot u(t)}$ Respuesta al impulso del circuito.

que es equivalente a

$\boxed{h(t) = v_C(t) = -e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot u(t)}$ Por propiedades del coseno.

$(\cos(\theta) = -\cos(\theta + \pi).)$