COMPUTACIONAL 4

METODO DE ELEMENTOS FINITOS

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL

Prof. Y. Niño Sem. Primavera 2008

Prof. Aux. Diego Ojeda

El objetivo de este laboratorio es aplicar el *método de elementos finitos*, para lo cual se resolverá un problema de difusión bidimensional en régimen permanente. La ecuación elíptica a resolver es la siguiente:

$$k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

donde k representa un coeficiente de difusión isotrópico. El dominio de solución de este problema es un cuadrado en R^2 de lados $L = 1$, con condiciones de borde:

$$u = \begin{cases} \sin(\frac{\pi\, x}{L}) & ; \quad (x, y) = (x, 0) \\ -\sin(\frac{\pi\, x}{L}) & ; \quad (x, y) = (x, L) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, y) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (L, y) \end{cases}$$

- Definición de la malla

  Primero, se utilizará una malla de 121 nodos que forman 200 elementos finitos triangulares isósceles, de los cuales 40 nodos y 38 elementos son externos, donde se imponen las condiciones de borde. Esta malla se muestra gráficamente en la Figura 1, donde también se muestra la numeración de los elementos y los nodos.

  Para la numeración de los nodos (valores i) se cumple que:

  Para m impar, $i(m) = 11\,div(m, 20) + div(mod(m, 20), 2)$, para m par, $i(m) = i(m-1)$,

  donde $div(m, 20)$ entrega el valor entero de $m/20$ y mod el resto de dicha división.

  Por otro lado, dado que por cada elemento m existen tres nodos, éstos serán numerados de 1 a 3 según el sentido de giro de los punteros del reloj, considerando que el elemento 1 es el i del esquema, tanto para m par como impar.

- Funciones de interpolación

  Las funciones de interpolación a utilizar para resolver el problema serán lineales, como las vistas en cátedra, de manera que, para un elemento, la función de aproximación solución del problema puede expresarse como:

Tabla 1: Valores de constantes geométricas de los elementos

i	a_i	b_i	c_i
1	$x_2\ y_3 - x_3\ y_2$	$y_2 - y_3$	$x_3 - x_2$
2	$x_3\ y_1 - x_1\ y_3$	$y_3 - y_1$	$x_1 - x_3$
3	$x_1\ y_2 - x_2\ y_1$	$y_1 - y_2$	$x_2 - x_1$

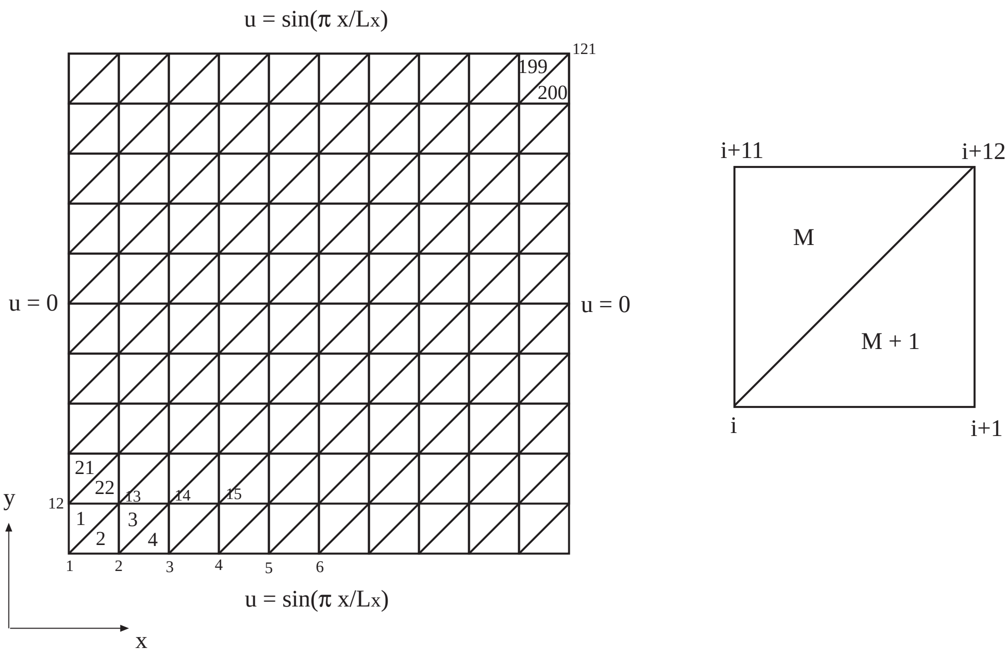

Figura 1: Malla de elementos finitos y esquema de numeración de nodos y elementos.

$$\tilde{u}(x,y) = f_1^m(x,y)\ u_1^m + f_2^m(x,y)\ u_2^m + f_3^m(x,y)\ u_3^m = \sum_e\ f_e^m\ u_e^m$$

con:

$$f_i = \frac{a_i + b_i\ x + c_i\ y}{2\ \Delta}$$

$$2\ \Delta = x_3\ y_2 - x_2\ y_3 - x_1\ y_2 + x_1\ y_3 + x_2\ y_1 - x_3\ y_1$$

donde las constantes a_i, b_i y c_i se expresan en función de las coordenadas de los nodos (x_i, y_i) en la Tabla 1 y Δ representa el área del elemento.

- Esquema numérico

  Para resolver el problema numérico se debe minimizar el residuo ϵ, lo cual requiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones, cuyo número es igual al número de incógnitas del problema:

$$\int_\Omega f_j\ \epsilon\ d\Omega = 0 \quad j = 1, n$$

donde Ω representa el dominio de integración, f_j representa las funciones de ponderación que el método de Galerkin supone igual a las funciones base, y el residuo se expresa como:

$$\epsilon = k\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + k\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \sum_i (k\,\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\,u_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}\,u_i)$$

donde la sumatoria se realiza sobre todos los elementos del dominio.

Usando el Teorema de Green se obtiene que:

$$\int_\Omega f_j\,\epsilon\,d\Omega = \int_\Omega f_j\,(\sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\,u_i + \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\,u_i)\,d\Omega =$$

$$\int_{\partial\Omega} f_j\,(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x}\,u_i + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y}\,u_i)\,ds - \int_\Omega (\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x}\,\frac{\partial f_i}{\partial x}\,u_i + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y}\,\frac{\partial f_i}{\partial y}\,u_i)\,d\Omega$$

donde la primera integral del lado derecho se realiza sobre el borde y por lo tanto se anula al considerar solo los nodos interiores, lo cual es necesario, ya que los nodos del borde no son incógnitas sino condiciones de borde conocidas.

Sin analizar por el momento las condiciones de borde, se obtiene para los nodos interiores el siguiente sistema de ecuaciones, el cual se plantea como la integral sobre un elemento del dominio, ya que la integral sobre el dominio completo se obtiene sumando sobre todos los elementos:

$$\int_\Delta (\frac{\partial f_j}{\partial x}\,\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_j}{\partial y}\,\frac{\partial f_1}{\partial y})\,u_1)\,d\Delta + \int_\Delta (\frac{\partial f_j}{\partial x}\,\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_j}{\partial y}\,\frac{\partial f_2}{\partial y})\,u_2)\,d\Delta +$$

$$\int_\Delta (\frac{\partial f_j}{\partial x}\,\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_j}{\partial x}\,\frac{\partial f_3}{\partial y})\,u_3)\,d\Delta = 0$$

Las integrales y derivadas están dadas por:

$$\int_\Delta \frac{\partial f_i}{\partial x}\,\frac{\partial f_j}{\partial x}\,d\Delta = \frac{b_i\,b_j}{4\,\Delta}$$

$$\int_\Delta \frac{\partial f_i}{\partial y}\,\frac{\partial f_j}{\partial y}\,d\Delta = \frac{c_i\,c_j}{4\,\Delta}$$

lo cual da lugar al siguiente problema para cada elemento, expresado en términos de matrices elementales:

$$\frac{1}{4\,\Delta}\left\{\begin{pmatrix} b_1\,b_1 & b_1\,b_2 & b_1\,b_3 \\ b_2\,b_1 & b_2\,b_2 & b_2\,b_3 \\ b_3\,b_1 & b_3\,b_2 & b_3\,b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\,c_1 & c_1\,c_2 & c_1\,c_3 \\ c_2\,c_1 & c_2\,c_2 & c_2\,c_3 \\ c_3\,c_1 & c_3\,c_2 & c_3\,c_3 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiendo que el espaciamiento entre nodos en las direcciones x e y son iguales a δ, se obtiene que las matrices elementales $A_m = a_{ij}^m$ quedan escritas en función de los nodos i como:

$$a_{j,e}^{m} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 & -\delta^2 \\ 0 & \delta^2 & -\delta^2 \\ -\delta^2 & -\delta^2 & 2\,\delta^2 \end{pmatrix} & m\ par \\ \begin{pmatrix} \delta^2 & -\delta^2 & 0 \\ -\delta^2 & 2\,\delta^2 & -\delta^2 \\ 0 & -\delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix} & m\ impar \end{cases}$$

Para el ensamble final de las matrices elementales, de modo de generar la matriz general del problema, es necesario reordenarlas de manera de considerar las condiciones de borde del problema, reduciendo así el número de incógnitas, y por lo tanto, el tamaño de la matriz a invertir de 121×121 a 81×81.

Primero, los elementos de las esquinas superior izquierda ($m = 181$) e inferior derecha ($m = 20$) no aportan al análisis ya que los tres nodos que lo componen pertenecen al contorno. Del resto de los elementos del contorno, si es que a un nodo se asigna un valor por condición de borde, el término $a_{j,e}\ ue$ asociado pasa al lado derecho con u_e.

Una segunda manera de trabajar es considerando todos los 121 nodos, y asignando que $a_{j,e}$ = 1, si dicho nodo pertenece a la frontera, y al lado derecho se asigna el valor deseado. En este caso, tampoco se consideran los elementos de las esquinas.

- (PUNTAJE EXTRA)

  Se ofrece una nota extra adicional a la del computacional a aquellos que puedan resolver el caso impermanente del problema planteado previamente, es decir la ecuación de difusión 2D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

  considerando las mismas condiciones de borde del problema permanente y una condición inicial: $u(x, y) = 0$ en todo el dominio de cálculo. Verifique que la solución se aproxima a la de régimen permanente a medida que pasa el tiempo.