COMPUTACIONAL 2

METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL
Prof. Y. Niño — Sem. Primavera 2008

1. Considere la ecuación de difusión 1-D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

definida en el dominio; $0 \leq x \leq 1 \; m$, con $D = 1$ m^2/s, sujeta a las condiciones de borde: $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y a la condición inicial dada por una onda triangular (Fig. 1):

$$u(x,0) = \begin{cases} 2\,x \;\; ; & 0 \leq x \leq 0.5 \; m \\ 2\,(1-x)\; ; & 0.5 \; m \leq x \leq 1 \; m \end{cases}$$

Esta ecuación tiene una solución analítica, obtenida mediante expansión en series de Fourier, dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{10\,n^2} \, \sin\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) \, sin(n\,\pi\,x) \, \exp\left(-n^2\,\pi^2\,t\right)$$

Para resolver numéricamente la ecuación de difusión se considera el esquema general de diferencias finitas FTCS (*forward time-centered space*):

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\Delta t} = D \,(\theta \, \frac{u_{i+1j} - 2\,u_{ij} + u_{i-1j}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta) \, \frac{u_{i+1j+1} - 2\,u_{ij+1} + u_{i-1j+1}}{(\Delta x)^2})$$

donde θ es un parámetro que varía entre 0 y 1. Si $\theta = 1$ el esquema es *explícito*, Si $\theta = 0$ el esquema es *implícito* y si $\theta = 1/2$ el esquema es el conocido como *Crank-Nicolson*.

(a) Para el esquema de diferencias finitas propuesto, determine el factor de amplificación asociado en función del parámetro θ. Comparando este factor de amplificación con el teórico determinado en clase, analice los errores de amplitud y fase de los distintos modos, para los valores $\theta = 1; 1/2; 0$. Determine la condición de estabilidad del esquema, expresada como una relación entre el parámetro adimensional $r = D \; \Delta t/(\Delta x)^2$ y θ. Cuáles serán las condiciones de estabilidad para los casos $\theta = 1; 1/2; 0$?

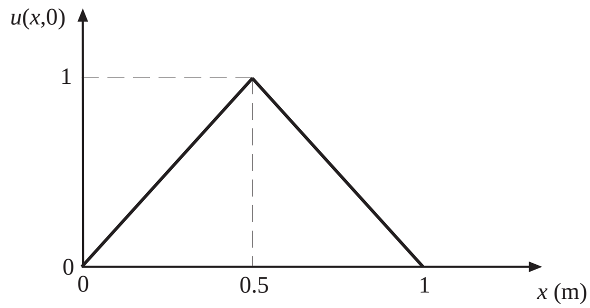

Figura 1: Condición inicial ($t = 0$) para los Problemas 1 y 2.

(b) Considere el esquema explícito ($\theta = 1$) y resuelva numéricamente el problema de difusión anteriormente puesto. En su discretización del espacio-tiempo considere las restricciones de estabilidad para el esquema numérico determinadas previamente. Qué pasa si estas restricciones no se respetan (intente el cálculo en ese caso)?

(c) Considere el esquema implícito ($\theta = 0$) y resuelva numéricamente el problema de difusión anteriormente puesto. Use la misma discretización del caso anterior y luego duplique el valor de Δt utilizado en ese caso.

(d) Considere el esquema de Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$) y resuelva numéricamente el problema de difusión considerando las mismas discretizaciones del punto anterior.

(e) Compare las soluciones numéricas anteriores entre si y con la solución analítica.

2. Considere la ecuación de advección lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donde x y t denotan distancia y tiempo, respectivamente, y $c =$ -1 m/s. Se desea resolver el problema de valor inicial dado por la condición inicial ($t = 0$) indicada en la Fig. 1.

(a) Determine y grafique la solución analítica del problema.

(b) Resuelva numéricamente el problema mediante diferencias finitas usando los siguientes esquemas numéricos revisados en clase: Lax, Lax-Wendroff, MacCormak, Upwind, Euler Implícito. Especifique las condiciones de estabilidad de cada método y en base a ellas determine la discretización temporal, Δt, a utilizar en el cálculo. Se sugiere usar una discretización espacial, Δx, no superior a 0.1 m. Compare y discuta los resultados obtenidos con los distintos métodos en base al comportamiento de los factores de amplificación respectivos.