EJEMPLO DE APLICACION ELEMENTOS FINITOS

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL

Prof. Y. Niño Sem. Primavera 2002

Consideremos el siguiente problema de difusión permanente 1-D:

$$K\,\frac{d^2p}{dx^2} = 0$$

sujeta a las condiciones de borde:

$$p = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = 10 \end{cases}$$

La solución analítica de esta ecuación es:

$$p = \frac{x}{10}$$

que indica que la variable dependiente p aumenta linealmente a lo largo de x.

Intentemos una solución por elementos finitos. Con ese fin introducimos una aproximación de la variable p, denominada $\tilde{p}$, que es expresada en términos de una expansión en M funciones base $f_k(x)$, tal que:

$$\tilde{p}(x) = \sum_{k=1}^{M} p_k\, f_k(x)$$

donde p_k denotan los coeficientes de la expansión y que representan los valores de la variable $\tilde{p}$ en los nodos de la malla en la que se discretiza el dominio de cálculo.

Reemplazando esta aproximaxión en la ecuación original genera un residuo $\epsilon \neq 0$:

$$K\,\frac{d^2\tilde{p}}{dx^2} = \epsilon$$

Para minimizar el residuo introducimos el método de Galerkin:

$$\int_0^{10} f_i\, \epsilon\, dx = 0$$

donde $i = 1, \ldots, M$. Este procedimiento genera M ecuaciones para determinar las M incógnitas: p_k, $k = 1, \ldots M$.

La ecuación anterior se expande como:

$$\int_0^{10} f_i \; K \; \frac{d^2\tilde{p}}{dx^2} \; dx = 0$$

Aplicando integración por partes:

$$\int_a^b u \; dv = u(b) \; v(b) - u(a) \; v(a) - \int_a^b v \; du$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$K \; f_i(10) \; \frac{d\tilde{p}}{dx}|_{10} - K \; f_i(0) \; \frac{d\tilde{p}}{dx}|_0 - \int_0^{10} K \; \frac{df_i}{dx} \; \frac{d\tilde{p}}{dx} \; dx = 0$$

Como $f_i(0) = f_i(10) = 0$ para todo nodo i distinto de 1 o M, entonces para los nodos interiores del dominio de cálculo la expresión anterior se reduce a:

$$\int_0^{10} K \; \frac{df_i}{dx} \; \frac{d\tilde{p}}{dx} \; dx = 0$$

con $i = 2, \ldots, M-1$. Expandiendo la integral sobre el dominio en términos de la suma de las integrales sobre subdominios o *elementos finitos*:

$$\sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K \; \frac{df_i}{dx} \; \frac{d\tilde{p}}{dx} \; dx = 0$$

La derivada $d\tilde{p}/dx$ se determina como:

$$\frac{d\tilde{p}}{dx} = \sum_{k=1}^{M} p_k \; \frac{df_k}{dx}$$

En la Fig. 1 se muestra la función $f_k(x)$. Dado que ella es nula para todo x fuera del intervalo $x_{k-1} < x < x_{k+1}$, entonces en el subdomino $x_j < x < x_{j+1}$ la función $\tilde{p}(x)$ está dada por:

$$\tilde{p}(x) = p_j \; f_j(x) + p_{j+1} \; f_{j+1}(x)$$

y por lo tanto, en el mismo subdomino se tiene:

$$\frac{d\tilde{p}}{dx} = p_j \; \frac{df_j}{dx} + p_{j+1} \; \frac{df_{j+1}}{dx}$$

Por otro lado, la derivada df_i/dx se presenta también en la Fig. 1. Es claro que ella es distinta de cero solo en el intervalo $x_{i-1} < x < x_{i+1}$, es decir en dos subdominios o elementos finitos consecutivos.

Con las conclusiones de este análisis se puede entonces escribir la condición para la minimización del residuo para el nodo interno i, como:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} K \; \frac{df_i}{dx} \; (p_{i-1} \; \frac{df_{i-1}}{dx} + p_i \; \frac{df_i}{dx}) \; dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} K \; \frac{df_i}{dx} \; (p_i \; \frac{df_i}{dx} + p_{i+1} \; \frac{df_{i+1}}{dx}) \; dx = 0$$

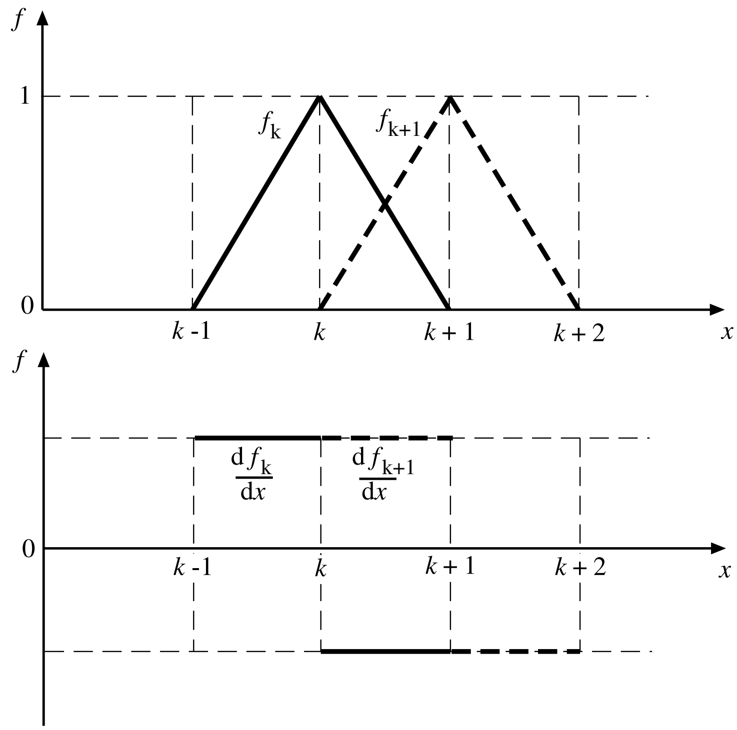

Figura 1: Funciones base lineales y sus derivadas.

con $i = 2, M - 1$.

Consideremos ahora la situación de un elemento finito cualquiera. Este se presenta en la Fig. 2. Suponiendo que la longitud de los subdominios es constante ($x_{i+1} - x_i = x_2^e - x_1^e = L$), entonces en cada subdominio existen solo dos funciones base f_k cuyos valores son distintos de cero. Denominaremos f_1^e y f_2^e a estas funciones. Podemos expresar la condición para la minimización del residuo en términos de estas últimas funciones:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} K \frac{df_1^e}{dx} (p_{i-1} \frac{df_2^e}{dx} + p_i \frac{df_1^e}{dx}) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} K \frac{df_2^e}{dx} (p_i \frac{df_2^e}{dx} + p_{i+1} \frac{df_1^e}{dx}) \, dx = 0$$

con $i = 2, M - 1$.

Dado que las derivadas de las funciones base lineales toman valores constantes dentro de los subdominios, entonces es posible simplificar la ecuación anterior a:

$$K \, L \left\{ p_{i-1} \frac{df_1^e}{dx} \frac{df_2^e}{dx} + p_i \left(\frac{df_1^e}{dx} \frac{df_1^e}{dx} + \frac{df_2^e}{dx} \frac{df_2^e}{dx} \right) + p_{i+1} \frac{df_2^e}{dx} \frac{df_1^e}{dx} \right\} = 0$$

con $i = 2, M - 1$, donde se ha reemplazado:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = L$$

Las funciones base f_1^e y f_2^e se pueden expresar como (Fig. 2):

$$f_1^e = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \quad ; \quad f_2^e = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e}$$

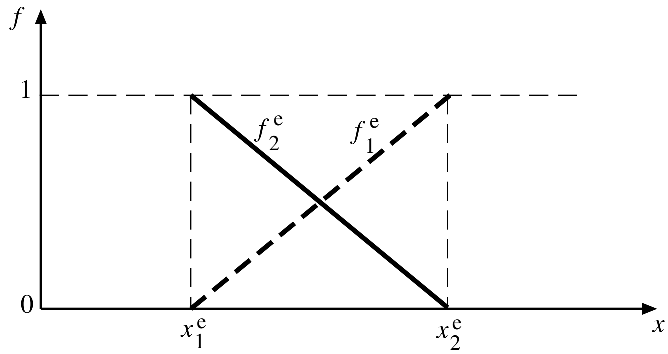

Figura 2: Funciones base en el elemento.

de donde se deduce:

$$\frac{df_1^e}{dx} = \frac{1}{L} \quad ; \quad \frac{df_2^e}{dx} = -\frac{1}{L}$$

Reemplazando estos resultados en la condición de minimización del residuo se obtiene finalmente:

$$\frac{K}{L} \; (\; -p_{i-1} + 2 \; p_i - p_{i+1} \;) = 0$$

o bien:

$$-p_{i-1} + 2 \; p_i - p_{i+1} = 0$$

con $i = 2, \ldots, M-1$. Este corresponde a un sistema de $M-2$ ecuaciones. Para resolver las M incógnitas p_i se requieren 2 ecuaciones adicionales. Ellas se obtienen de las condiciones de borde del problema:

$$p_1 = 0 \quad ; \quad p_M = 1$$

Es posible plantear el sistema de M ecuaciones resultante en forma matricial. Por ejemplo para $M = 5$ se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

cuya solución corresponde a:

$$\tilde{p} = (\; 0, \; 1/4, \; 1/2, \; 3/4, \; 1 \;)$$

que representa efectivamente la variación lineal de la variable p en el dominio del problema y la solución obtenida es exacta.

En este caso, dado que la solución teórica del problema planteado es lineal, la solución numérica obtenida con funciones base lineales es exacta. Ello no ocurre en el caso general, cuando la solución de la ecuación diferencial original no es lineal, representando la solución numérica solo una aproximación del resultado real.